# 2 Perturbative Renormierung

## 2.1 Quantenfeldtheoretische Grundlagen

Physikalische Information (Teilchenspektren, Wirkungsquerschnitte, Zeitevolution, etc.) wird in der QFT aus Korrelationsfunktionen extrahiert.

Pfadintegraldefinition:

$$\langle 0 | T[\phi(x_1,t_1) \ldots \phi(x_n,t_n)] | 0 \rangle$$

$$= \frac{\int_\Lambda D\phi \; \phi(x_1,t_1) \ldots \phi(x_n,t_n) \; e^{iS[\phi]}}{\int_\Lambda D\phi \; e^{iS[\phi]}} \qquad (2.1)$$

n-Punkt Funktionen

Diese Informationen sind zusammengefasst im <u>Schwinger</u>-<u>Funktional</u>: erzeugendes Funktional der n-Punkt Funktionen (im Folgenden genügt es, im Euklidschen zu arbeiten):

$$Z[J] = \exp W[J] \doteq \int_\Lambda D\chi \; e^{-S[\chi] + \int J\chi} \qquad (2.2)$$

$$\Rightarrow \langle 0 | T[\chi_1 \ldots \chi_n] | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J_1 \ldots \delta J_n} Z[J] \Big|_{J=0} \qquad (2.3)$$

$W[J]$: erzeugendes Funktional der zusammenhängenden Green's Funktionen

(nicht-zusammenh. Green's Funktionen lassen sich durch direkte Produkte von zus'h. darstellen)

Noch effizienter ist die Effektive Wirkung:

Def.: "klassisches" Feld: $\phi := \langle \chi \rangle_J = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J}$

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi[J] \tag{2.4}$$

Def.: effektive Wirkung mittels Legendre Trafo:

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int J\phi \quad , \quad \text{mit} \quad J = J[\phi] \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = -\int \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J}}_{=\phi} \frac{\delta J}{\delta\phi} + \int \frac{\delta J}{\delta\phi}\phi + J = J \tag{2.6}$$

Bestimmungsgleichung für $\Gamma[\phi]$:

$$e^{-\Gamma[\phi] + \int J\phi} = e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\chi \; e^{-S[\chi] + \int J\chi}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\Gamma[\phi]} = \int_\Lambda \mathcal{D}\chi \; e^{-S[\chi] + \int \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}(\chi - \phi)}$$

$$\overset{\chi \to \chi+\phi}{=} \int_\Lambda \mathcal{D}\chi \; e^{-S[\chi+\phi] + \int \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}\chi} \tag{2.7}$$

funktionale Integro-Differentialgleichung

Vertex - Entwicklung:

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_1 \dots x_n} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \tag{2.8}$$

$$\stackrel{FT}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{p_1 \dots p_n} \delta(p_1 + \dots + p_n)\, \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)\, \varphi(p_1) \dots \varphi(p_n)$$

(Einsetzen von (2.8) in (2.7) ergibt die Dyson-Schwinger Gleichungen)

$\Gamma^{(n)}$: eigentliche Vertizes (proper vertices)

$\hat{=}$ 1-PI Green's Funktionen (1-Teilchen irreduzibel)

n-Punkt Funktionen können aus den $\Gamma^{(n)}$ rekonstruiert werden. Es zeigt sich, daß insbesondere die Divergenzanalyse anhand der $\Gamma^{(n)}$ einfacher ist.

Störungstheoretische Berechnung von $\Gamma[\varphi]$: Beispiel: 1-loop Ordnung

$$e^{-\Gamma[\varphi]} = \int_\Lambda \mathcal{D}\chi\, e^{-S[\varphi] - \int \underbrace{\left(\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \chi} - \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi}\right)}_{\mathcal{O}(\hbar)} \chi - \int \chi \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\chi\delta\chi} \chi + \mathcal{O}(\chi^3)}$$

$$\simeq e^{-S[\varphi]} \, \det{}_\Lambda^{-1/2} \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\chi\delta\chi}$$

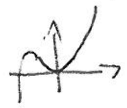
$$\Rightarrow \quad \Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \Gamma^1[\varphi] \tag{2.9}$$

$$\text{mit } \Gamma^1[\varphi] = \frac{1}{2} \ln \det S^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln S^{(2)}[\varphi]$$

## 2.2 Divergenzen in Störungstheorie (Beispiel)

Beispiel: $\phi^3$ Theorie auf 1-loop Niveau

$$S[\varphi] = \int d^dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} g \varphi^3 \right] \qquad (2.10)$$

((NB) Die Theorie ist eigentlich unphysikalisch, da das Potential nicht nach unten beschränkt ist  .
Es existiert aber eine wohldefinierte pert. Entwicklung, und die 3er-Vertex-Struktur taucht in vielen physikalischen Theorien auf.)

$$S^{(2)}[\varphi] = -\partial^2 + m^2 + g\varphi(x) \qquad (2.11)$$

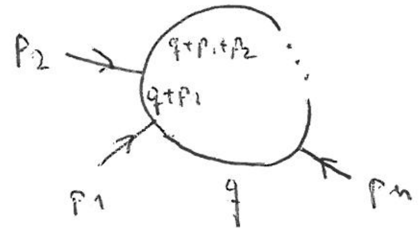
$$\Rightarrow \Gamma^1[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^dx \, \langle x | \ln\left(-\partial^2 + m^2 + g\varphi\right) | x \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int d^dx \, \langle x | \ln\left(1 + \frac{1}{-\partial^2 + m^2} g\varphi\right) | x \rangle + \text{const}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \int d^dx \, \langle x | \left(\frac{1}{-\partial^2 + m^2} g\varphi(x)\right)^n | x \rangle \qquad (2.12)$$

$\Rightarrow$ eigentlichen Vertizes:

$$\Gamma^{(n)\,1\text{-loop}}_{(p_1,\dots,p_n)} = -\frac{(n-1)!}{2} (-g)^n \int \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \frac{1}{(q+p_1)^2+m^2} \cdots \frac{1}{(q+p_1+\dots+p_{n-1})^2+m^2} \qquad (2.13)$$



Das UV-Verhalten der loop-Integration $q^2 >> p_1^2 \ldots p_n^2, m^2$ ist

$$\Gamma^{(n)} \sim \int d^d q \quad q^{-2n} \,, \tag{2.14}$$

divergiert also für $d \geq 2n$ !

$d=1$: alle Korrelationsfunktionen sind endlich (Quantenmechanik)

$d=2$: die 1-Punkt Funktion divergiert ("tadpole")

$$\Gamma^{(1)\,1\text{loop}} = \frac{g}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2+m^2} \tag{2.15}$$

⋮

$d=6$: (1-3)er Vertizes divergieren

Regularisierung: Beschränkung der Impulsintegration auf Impulsraumkugel $|q| < \Lambda$, mit $\Lambda^2 >> p_1^2 \ldots p_n^2, m^2$ (cutoff Regularisierung)

Bestimmung der Divergenzen durch Entwicklung in $p_1, \ldots, p_n, m^2$, z.B.

$$\Gamma^{(1)\,1\text{loop}}_{\text{div}} = \frac{g}{2} \int^\Lambda \frac{d^6 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{q^2+m^2} = \frac{g}{2} \underbrace{\int^\Lambda \frac{d^6 q}{(2\pi)^6}}_{= \underbrace{V_{S5}}_{=\pi^3} \int \frac{dq\, q^5}{(2\pi)^6}} \left( \frac{1}{q^2} - \frac{m^2}{q^4} + \frac{m^4}{q^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^8}\right) \right)$$

$$= \frac{g}{2^7 \pi^3} \left[ \frac{\Lambda^4}{4} - \frac{m^2 \Lambda^2}{2} + m^4 \ln \frac{\Lambda}{m} + \mathcal{O}(1) \right] \tag{2.16a}$$

IR cut bei m!

Ähnlich folgen:

$$\Gamma^{(2)\,1\text{loop}}_{\text{div}} = -\frac{g^2}{2^7\pi^3}\left[\frac{\Lambda^2}{2} - \left(2m^2 + \frac{p^2}{3}\right)\ln\frac{\Lambda}{m} + \mathcal{O}(1)\right] \qquad (2.16b)$$

$$\Gamma^{(3)\,1\text{loop}}_{\text{div}} = \frac{g^3}{2^6\pi^3}\ln\frac{\Lambda}{m} \qquad (2.16c)$$

Warum $d=6$? $d=6$ ist speziell, weil Divergenzen nur in den Vertizes auftreten, die maximal in der ursprünglichen Wirkung vorkommen:

$$S[\phi] = \int \Gamma^{(1)0}\phi + \frac{1}{2}\int \Gamma^{(2)0}\phi^2 + \frac{1}{3!}\int \Gamma^{(3)0}\phi^3$$

mit $\Gamma^{(1)0} = 0$ (kann aber durch Shift $\phi \to \phi + \text{const}$ generiert werden)

$$\Gamma^{(2)0}(p) = p^2 + m^2$$

$$\Gamma^{(3)0}(p_1, p_2, -p_1-p_2) = g \qquad (2.17)$$

Noch dazu ist die Abh. der Divergenzen vom äußeren Impuls gleich der Impulsabh. der "nackten" Vertizes $\Gamma^{(n)0}$.
z.B. in $d=8$ ist $\Gamma^{(4)\,1\text{-loop}}$ divergent, aber $\Gamma^{(4)0} = 0$.

## Entfernung der Divergenzen

Divergenter Anteil der 1-loop Wirkung in $d=6$:

$$\Gamma^1_{div} = \int d^6x \left[ g\, a_1(\Lambda)\, \varphi(x) + \frac{1}{2} g^2 a_2(\Lambda)\, (\partial_\mu \varphi)^2_{(x)} + \frac{1}{2} g^2 a_3(\Lambda)\, \varphi^2(x) + \frac{1}{3!} g^3 a_4(\Lambda)\, \varphi^3_{(x)} \right] \qquad (2.18)$$

mit (vgl. (2.16))

$$a_1(\Lambda) = \frac{1}{2^7 \pi^3} \left( \frac{\Lambda^2}{4} - \frac{m^2 \Lambda^2}{2} + m^4 \ln \frac{\Lambda}{m} \right)$$

$$a_2(\Lambda) = \frac{1}{3 \cdot 2^7 \pi^3} \ln \frac{\Lambda}{m} \qquad (2.19)$$

$$a_3(\Lambda) = \frac{1}{2^7 \pi^3} \left( - \frac{\Lambda^2}{2} + 2 m^2 \ln \frac{\Lambda}{m} \right)$$

$$a_4(\Lambda) = \frac{1}{2^6 \pi^3} \ln \frac{\Lambda}{m^2}$$

Der Ursprung der Divergenzen liegt darin, daß Fluktuationen auf <u>allen</u> Skalen zu den Vertexfunktionen beitragen.

Physikalisches Problem:

Was haben die Niederenergiemeßgrößen (Masse, Kopplung, Amplitude), die mit den vollen Vertexfunktionen zusammenhängen, zu tun mit den Parametern der "nackten" Wirkung $g, m^2, \varphi$, welche die Hochenergieparameter der mikroskopischen Theorie bei Skala $\Lambda$ bezeichnen?

Idee: Fixiere Masse, Kopplung, Amplitude, etc an einem **Renormierungspunkt** $\mu$ (z.B. Niederenergie meßskala) auf die Werte $m_R$, $g_R$, $\Phi_R$ durch **Renormierungsbedingungen** an die **vollen** Vertices:

z.B $\mu=0$:

$$\Gamma^{(2)}_{(p^2\to 0)} = m_R^2 \qquad \text{(fixiert phys. Masse)} \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_{(p^2\to 0)} = 1 \qquad \text{(fixiert Feldamplitudennormierung)} \quad (2.20b)$$

$$\Gamma^{(3)}_{(p_1=p_2=p_3=0)} = g_R \qquad \text{(fixiert phys. Kopplung)} \quad (2.20c)$$

$\Rightarrow$ renormierte Parameter stimmen mit Niederenergieexperimenten (bei $p^2\to 0$) überein (allgemeiner: fixiere Parameter bei $p^2\to\mu^2$ beliebig).

(NB: Während $m_R$ und $g_R$ "echter" physikalischer Input sind, stellt (2.20b) lediglich eine Normierungsvorschrift dar; Reskalierungen des Feldes lassen die Physik weiterhin invariant)

Renormierte Störungstheorie:

Entwicklung um $g_R$:

$$S[\phi] \equiv S_\Lambda[\phi] = \int \left( \frac{1}{2}\phi(-\partial^2+m^2)\phi + \frac{1}{3!} g\phi^3 \right)$$

$$\equiv S_R[\phi_R] + \delta S_R[\phi_R]$$

$$= \int \Big[ \frac{1}{2}\phi_R(-\partial^2+m_R^2)\phi_R + \frac{1}{3!} g_R \phi_R^3 \qquad (2.21)$$

$$+ \frac{1}{2}(Z_\phi-1)(\partial_\mu \phi_R)^2 + \frac{1}{2}\delta m^2 \phi_R^2 + \frac{1}{3!} g_R (Z_g-1)\phi_R^3 \Big]$$ ← counter terme

wobei
$$\phi = Z_\phi^{1/2}\phi_R \qquad (Z_\phi: \text{Wellenfunktionsrenormierung})$$
$$g = g_R \frac{Z_g}{Z_\phi^{3/2}} \qquad (Z_g: \text{Kopplungsrenormierung}) \qquad (2.22)$$
$$m^2 = (m_R^2+\delta m^2)\frac{1}{Z_\phi}$$

$Z_\phi, Z_g, \delta m^2$ den Zusammenhang zwischen nackten und renormierten Größen parametrisieren.

Annahme: $Z_\phi, Z_g, \delta m^2$ besitzen eine Entwicklung in $g_R$, so daß $(Z_\phi-1), \delta m^2, (Z_g-1) = \mathcal{O}(g_R^2)$ (2.23)

$\Rightarrow$ 2. Zeile von (2.21) ist von gleicher Ordnung wie 1-loop Beitrag zur Wirkung

$\Rightarrow$ 1-loop Rechnung muß nur mit $S_R[\phi_R)$ gemacht werden

$$\Rightarrow \Gamma[\varphi_R] = S_\Lambda[\varphi] + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln S_\Lambda^{(2)}[\varphi] + \mathcal{O}(2\text{-loop})$$

$$= S_R[\varphi_R] + \delta S_R[\varphi_R] + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln S_R^{(2)}[\varphi_R] + \mathcal{O}(2\text{-loop}) \qquad (2.24)$$

Die Renormierungsbedingungen (2.20) legen nun die Zusammenhänge $Z_\varphi, Z_g, \delta m^2$ fest. Insbesondere für die divergenten Anteile gilt wegen (2.20)

$$\Gamma[\varphi_R] = \mathcal{O}(\Lambda^0) \qquad (2.25)$$

$$\Rightarrow \quad \delta S_R[\varphi_R] + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln S_R^{(2)}[\varphi_R] = \mathcal{O}(\Lambda^0)$$

Mit (2.18) für Störungsrechnung um $g_R$,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln S_R^{(2)}[\varphi_R] = \int d^6x \left[ g_R\, a_1(\Lambda)\, \varphi_R + \frac{1}{2} g_R^2\, a_2(\Lambda) (\partial\varphi_R)^2 + \frac{1}{2} g_R^2\, a_3(\Lambda)\, \varphi_R^2 + \frac{1}{3!} g_R^3\, a_4(\Lambda)\, \varphi_R^3 \right] \qquad (2.26)$$

und $a_i(\Lambda)$ aus (2.19) folgt

$$\begin{aligned} Z_\varphi &= 1 - g_R^2\, a_2(\Lambda) \\ Z_g &= 1 - g_R^2\, a_4(\Lambda) \\ \delta m^2 &= g_R^2\, a_3(\Lambda) \end{aligned} \qquad (2.27)$$

$\Rightarrow$ Annahme (2.23) ist selbstkonsistent!

$\Rightarrow$ $\Gamma[\varphi_R]$ ist endlich auf 1-loop, und hängt nur von phys. Parametern ab!