# Physik der Skalen:

# die Renormierungsgruppe

Holger Gies

— Vorlesungsmotizen —

Kontakt:


Prof. Dr. Holger Gies

Theoretisch-Physikalisches Institut

Fröbelstieg 1, Raum 302

D-07743 Jena

Tel. 03641 947190

Fax. 03641 947102

Sekr. 03641 947100

holger.gies@uni-jena.de

www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/gies/welcome.html

# 1. Einführung

## Aspekte der Renormierungsgruppe

### a) Perturbative QFT

Beobachtung: perturbativ berechnete Korrelationsfunktionen enthalten i. A. Divergenzen

⇒ Regularisierung: quantitative Kontrolle der Divergenzen (cutoff)

Renormierung: wähle Parameter der QFT so, daß die Korrelationsfkten einen endlichen Limes für cutoff → ∞ haben.

Ist dies immer möglich? ⇒ Klassifikation perturbativ Renormierbarer Theorien

Fragen:

- Sind die Vorhersagen der Theorie unabhängig von der Regularisierungsprozedur?
- Welche Rolle spielt der cutoff?
- Warum sind (fast) alle in der Natur realisierten Theorien (Standardmodell) renormierbar in perturbativer QFT?

## b) Kritische Phänomene

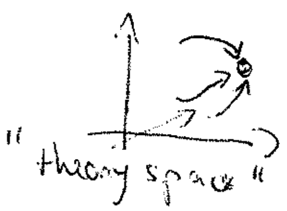
Beobachtung: Völlig unterschiedliche Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden und komplexen Wechselwirkungen zeigen insbesondere in der Nähe von Phasenübergängen quantitativ gleiche Eigenschaften, die mit wenigen Variablen und Skalenrelationen beschrieben werden können (Universalität).

Diese Skalenrelationen folgen oft Potenzgesetzen, z.B. $\chi \sim |t|^{\gamma}$ ($\gamma$: kritischer Exponent)

Besonderheit: $\gamma$ kann nicht-rational sein, hängt oft nur von den Symmetrien des Systems ab und nicht von den Details der WW

=> Renormierungsgruppenidee (Wilson):
Starte mit mikroskopischer Theorie (Hamiltonian / Wirkung) und mittele sukzessive über Fluktuationen von kleinen zu großen Längenskalen (=> skalen-abhängiger Hamiltonian / Wirkung)

=> Universalität ergibt sich, wenn diese Mittelungsprozedur (RG Trafo) einen Fixpunkt hat




(Bsp.: Ferromagneten, Flüssig-Dampf-Übg. "binary mixtures", superfluides He, Polymere)

=> Fixpunkteigenschaften lassen sich oft beschreiben durch eine renormierbare Feldtheorie!

Umkehrschluß: renormierbare QFT's lassen sich verstehen (und definieren) als statistische Systeme am kritischen Punkt.

Nebenbemerkung zu Skalenrelationen:

Skalenrelationen ergeben sich in klassischen Systemen oft aus dimensionellen Überlegungen mit Exponenten $\in \mathbb{Z}$ oder $\in \mathbb{Q}$.

Beispiel: 3. Keplersches Gesetz


Mit $V(r) \sim \frac{1}{r}$ folgt Umlaufzeit $T \sim r^{3/2}$

„mikroskopische" Skalen $R_1, R_2$ sind irrelevant

$\Rightarrow$ „Universalität" folgt aus Skalenseparation $r \gg R_1, R_2$

Hingegen finden sich in Systemen mit statistischen Fluktuationen oft Exponenten $\notin \mathbb{Q}$

Beispiel: Ferromagnet nahe am kritischen Punkt

Korrelationsfunktion der lokalen Fluktuationen $G(r)$ gehorcht eine Laplace-Gleichung für $r \ll \xi$ Korrelationslänge

$$\Rightarrow \quad G(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{für} \quad a \ll r \ll \xi$$


In Analogie zu klassischen Überlegungen erwarten wir, daß auf großen Skalen $r, \xi$ der Gitterabstand $a$ vernachlässigt werden kann, also

$$G(r) \overset{?}{\simeq} \frac{1}{r} f(r/\xi)$$

$\Rightarrow$ Vorhersage für magnetische Suszeptibilität

$$\chi \sim \int G(r)\, d^3r \overset{?}{\sim} \xi^2$$

Aber: Exponent "2" $\in \mathbb{Z}$ ist im Widerspruch zum Experiment!

Grund: das kritische Verhalten ist bestimmt durch Fluktuationen auf allen Längenskalen.

$\Rightarrow$ Gitterkonstante $a$ ist immer noch zu berücksichtigen:

$$G(r) = \frac{1}{r} f(r/\xi, a/\xi)$$

Die Abhängigkeit von $f$ von $a/\xi \ll 1$ erweist sich als Potenzgesetz $\sim (a/\xi)^\eta$ mit $\eta$ klein.

$\Rightarrow$ magnetische Suszeptibilität:

$$\chi \sim a^\eta\, \xi^{2-\eta}$$

Exponent $2-\eta$ folgt nicht aus naiver dimensioneller Analyse $\Rightarrow$ $\eta$ : anomale Dimension

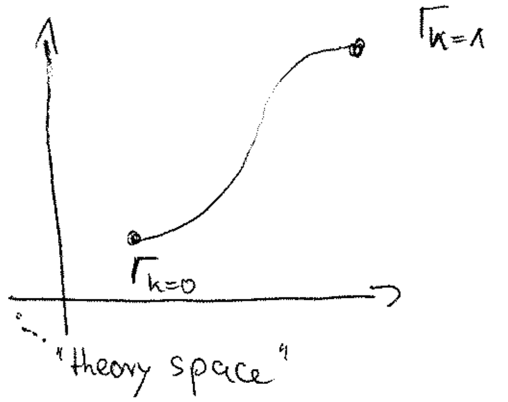
c) RG-basierte Konstruktion / Definition von QFT's

Problem: Divergenzanalyse jenseits von Störungstheorie ist "schwierig" (z.B. nicht perturbative Analyse des Schwinger fkt.als in Kontinuums-QFT ist ungenügend verstanden)

Idee: Ein "RG Schritt" (Ausintegration von Fluktuationen in einer Impulsschale) ist endlich.

$\Rightarrow$ Konstruiere Integration über alle Fluktuationen durch (unendliche) Folge von RG Schritten

$\Rightarrow$ "exakte Renormierungsgruppe", Flußgleichungen




RG Fluß der effektiven Mittelwertwirkung $\Gamma_k$
(oder Hamiltonian für statistische Systeme)

Flußgleichung beschreibt kontinuierliche Trajektorie zwischen mikroskopischer Wirkung $\Gamma_{k=\Lambda}$ und voller Quantenwirkung $\Gamma_{k=0}$

d) QFT's im Hochenergielimes

- Bei perturbativ renormierbaren QFT's können die Hochenergierandbedingungen bei cutoff $\Lambda$ so gewählt werden, daß die Niederenergievorhersagen unabh. von $\Lambda$ sind.

  Frage: Wie "natürlich" sind diese Randbedingungen für verschiedene Systeme?
  Ist "fine-tuning" erforderlich?
  (z.B. "Natürlichkeitsproblem" oder "Hierarchieproblem" im SM)

- Kann der cutoff bei pert. renorm. QFT's nach $\infty$ geschoben werden?

  Falls ja: QFT kann auf allen Skalen gültig sein (fundamentale Theorie)

  Falls nein: QFT sagt ihr eigenes Zusammenbrechen voraus (Trivialität)
  $\Rightarrow$ Hinweis auf neue Physik

- Gibt es QFT's, die pert. nicht-renorm. aber nicht-pert. renormierbar sind?

  $\Rightarrow$ Weinberg's "asymptotic safety" Szenario