

Pfadintegrale können in der QFT sowohl technisch als auch anschaulich sehr hilfreich sein.

Dann betrachten wir ein einfaches Beispiel in Form einer Theorie eines geladenen Skalarfeldes $\phi(x) \in \mathbb{C}$ im äußeren Elektromagnetischen Feld. Die Lagrange-Funktion bzw. Lagrange-Dichte der klass. Theorie ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi \quad (4.1)$$

wobei wir die Raumzeit als Euklid'sch annehmen. ($D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$)

Wir quantisieren nun das skalare Feld analog zur Quantisierung eines klass. Teilchens, indem wir über alle Feldkonfigurationen $\phi(x)$ (zu vorgegebenen Randbedingungen) integrieren.

Betrachten wir also den Ausdruck ($\hbar = 1$)

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\int d^4x \mathcal{L}} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \int d^4x (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2)} \quad (4.2)$$

Ähnlich wie in der QM, $\int \mathcal{D}x(t) = \prod_i \int dx_i$, wo wir das Maß durch Diskretisierung des Zeitparameters durch Zeitschnitte konstruiert haben, können wir uns

$\int \mathcal{D}\phi$ durch Diskretisierung der Raumzeit (Gitter) konstruiert vorstellen, $\int \mathcal{D}\phi = \prod_i \int d\phi_i$ ($\phi_i = \phi(x_i)$)
 $\uparrow$ Produkt über alle Raumzeitpunkte

Feldquantisierung erfolgt also hier zunächst durch ein Funktionalintegral, d.h. die D-dimensionale Verallgemeinerung des Pfadintegrals.

Wie können wir $Z[A]$ interpretieren?

Betrachten wir dazu den Limes $e \rightarrow 0$
 (Kopplung von A_μ an ϕ):

$$\lim_{e \rightarrow 0} Z[A] = e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \underbrace{\int \mathcal{D}\Phi e^{-\int d^4x (|D_\mu \Phi|^2 + m^2 |\Phi|^2)}}_{= \text{const in } A_\mu}$$

$$\Rightarrow S_{\text{Maxwell}}[A] = - \ln \lim_{e \rightarrow 0} Z[A] + \text{const.} \quad (4.3)$$

Im Limes $e \rightarrow 0$ ist also $\ln Z$ verknüpft mit der klass. Wirkung des EM Feldes. Es liegt also nahe, die Korrekturen für $e \neq 0$ als

Quantenkorrekturen zur Maxwell-Theorie zu interpretieren, die sich aus Mittelung über alle Φ -Feld-Fluktuationen ergeben. Das

Resultat ist die effektive Wirkung $\Gamma[A]$:

$$e^{-\Gamma[A]} = e^{-S_{\text{Maxwell}}[A]} \int \mathcal{D}\Phi e^{-\int d^4x (|D_\mu \Phi|^2 + m^2 |\Phi|^2)} \quad (4.4)$$

Das Funktional-Integral in (4.4) ist vom Gaußschen Typ, kann also exakt durchgeführt werden. In Analogie zum Pfadintegral für quadratische Wirkungen erhalten wir

$$e^{-\Gamma[A]} = e^{-S_{\text{Maxwell}}[A]} \mathcal{N} \left(\det(-\partial^2 + m^2) \right)^{-1} \quad (4.5)$$

$-1 = 2 \cdot (-\frac{1}{2})$
 $\uparrow$ Zahl der Freiheits-
 grade eines
 komplexen Skalarfeldes

Die Normierung $\mathcal{N}$ bestimmt sich aus dem Limes $\epsilon \rightarrow 0$ zu

$$\mathcal{N} = \det(-\partial^2 + m^2) \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \Gamma[A] = S_{\text{Maxwell}} + \ln \left(\frac{\det(-\partial^2 + m^2)}{\det(-\partial^2 + m^2)} \right) = \det \frac{(-\partial^2 + m^2)}{(-\partial^2 + m^2)}$$

Wegen $\ln \det M = \ln \prod_{\{\text{Eigenwerte } \lambda\}} \lambda = \sum_{\lambda \in \mathcal{S}} \ln \lambda = \text{Tr} \ln M$

folgt

$$\Gamma[A] = S_{\text{Maxwell}} + \text{Tr} \ln \frac{(-\partial^2 + m^2)}{(-\partial^2 + m^2)} \quad (4.7)$$

Da $D_r = \partial_r - ie A_r(x)$, ist (4.7) explizit vom betrachteten Feld $A_r(x)$ abhängig.

Eq. (4.6) oder (4.7) sind in der Tat ein schwieriges Feldtheoretisches Problem, da im Mehrdimensionalen bislang keine generelle Verallgemeinerung der Gelfand-Yaglom-Methode bekannt ist.

Im Prinzip wird das Spektrum von $-\mathcal{D}^2$ benötigt,

$$-\mathcal{D}^2 \phi = \lambda \phi \quad (4.8)$$

und es muß über das Spektrum summiert werden:

$$\text{Tr} \ln \frac{(-\mathcal{D}^2 + m^2)}{(-\mathcal{D}^2 + m^2)} = \sum_{\{\lambda\}} \ln \frac{(\lambda + m^2)}{(\lambda_{\lambda=0} + m^2)} \quad (4.9)$$

Für beliebiges $A_\mu(x)$ sind beide Schritte beliebig schwierig. (Zusätzlich müssen mögliche Divergenzen regularisiert werden, und die physik. Parameter renormiert werden).

Wesentlich effizienter geht dies mit Hilfe einer geschickten Pfadintegraldarstellung:

Zunächst wählen wir eine nützliche Darstellung des Logarithmus: (Fruhlami's Formel)

$$\ln \frac{A}{B} = - \int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-AT} - e^{-BT}) \quad , A, B > 0 \quad (4.8)$$

Der Integrationsparameter heißt Fock-Schwinger Eigenzeit.

$$\Rightarrow \Gamma[A] = S_{\text{Haw.}} - \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-\frac{m^2 T}{2}} \text{Tr} (e^{-(-D^2)T} - e^{-(-\partial^2)T}) \quad (4.9)$$

Betrachten wir nun

$$\text{Tr} e^{-(-D^2)T} = \int d^4x \langle x | e^{-(-D^2)T} | x \rangle \quad (4.10)$$

Es liegt nahe, diesen Ausdruck als QM Zustands-summe (integrierter Propagator im Koinkidenzlimites) zu betrachten mit Hamiltonfkt.:

$$H \hat{=} -D^2 \quad (\text{Teilchen im EM Feld})$$

und Euklidische (imaginäre) "Zeit" T .

$\Rightarrow$ Pfadintegraldarstellung

$$\text{Tr} e^{-(-D^2)T} = \int d^4x \mathcal{N} \int_{x(0)=x(T)=x} Dx \quad e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{x}^2}{4} - ie \oint dx \cdot A(x(t))} \quad (4.11)$$

Die Normierung lässt sich relativ zum freien Fall durchführen:

$$\text{Tr } e^{-(-\partial^2)T} = \int d^4x \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}^{\# \dim} \stackrel{m=\frac{1}{2}}{\# \dim=4} \int d^4x \frac{1}{(4\pi T)^2} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \text{Tr } e^{-(-\partial^2)T} = \int d^4x \frac{1}{(4\pi T)^2} \int_{x(0)=x(T)=x} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{x}^2}{4}} e^{-ie \oint dx \cdot A} \quad (4.13)$$

mit der Normierung $\int \mathcal{D}x e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{x}^2}{4}} \stackrel{!}{=} 1$

Damit folgt:

$$\Gamma[A] = S_{\text{Maxw}} - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^T \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \int d^4x \int_{x(0)=x(T)=x} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{x}^2}{4}} \left(e^{-ie \oint dx \cdot A} - 1 \right) \quad (4.14)$$

"Weltlinien darstellend" der (1-loop)
effektiven Wirkung

Die Bestimmung des Spektrums $\{\lambda\}$ und die Summe über das Spektrum sind somit durch eine Pfadintegration ersetzt.

Betrachten wir als Beispiel ein konstantes Feld:

$$A_r = -\frac{1}{2} F_{rv} x_v, \quad F = \text{const}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint dx \cdot A_r &= -\frac{1}{2} \int_0^T dt \dot{x}_r F_{rv} x_v \\ &= +\frac{1}{2} \int_0^T dt x_r F_{rv} \frac{d}{dt} x_v \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\Rightarrow$ Die Pfadintegral-Wirkung ist quadratisch:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x \ e^{-\int_0^T dt \left(\frac{\dot{x}^2}{2} - i \frac{e}{2} x_r F_{rv} \frac{d}{dt} x_v \right)} \\ = \left(\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \partial_t^2 & -ie F \frac{d}{dt} \\ -\frac{1}{2} \partial_t^2 \end{pmatrix} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nun haben wir es nur noch mit einer 1-Dim Funktional-Determinante zu tun! (+ 4 Dim. Lorentz-Matrix-Struktur)

$$G_Y: \left(\det \dots \right)^{-1/2} = \underset{\uparrow}{\text{tr}} \left(\frac{eFT}{\sin eFT} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

Für ein Magnetfeld gilt: Übungsaufgabe!

$$\left(\det \dots \right)^{-1/2} = \frac{eBT}{\sin eBT}$$

Für die effektive Wirkung gilt also:

$$\Gamma[B] = S_{\text{Maxw.}} - \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T^3} e^{-m^2 T} \int d^4x \left(\frac{eBT}{\sinh eBT} - 1 + \frac{1}{6} (eBT)^2 \right)$$

Subtraktionsterm
durch Ladungs- und
Feldstärke renormierung

(4.18)

$\Gamma[B]$ hängt also nicht-linear von B^2 ab, beschreibt
also die nicht-linearen Quantenkorrekturen zur
Maxwell'schen Theorie.

"Heisenberg - Euler
effektive Wirkung"

des skalaren QED

