

3.2 Asymptotische Analyse

Die soeben vorgestellte Störungstheorie impliziert, daß eine Entwicklung in der Wechselwirkung "Sinn macht".

Das wäre z.B. der Fall, falls physikalische Observable eine Taylor-Entwicklung im Störungsparameter besäßen (mit endlichem Konvergenzradius!).

In vielen Fällen von QM und QFT Störungstheorie ist jedoch die Störungstheorie eine Entwicklung mit Konvergenzradius $= 0$, wie einfache Überlegungen verdeutlichen:

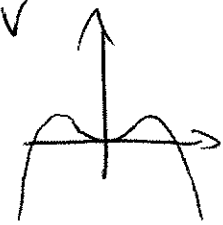
Beispiel: Anharmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{m}{2} \omega^2 x^2 + \lambda x^4$$



Hätte die Störungsentwicklung in λ einen endlichen Konvergenzradius, dann gäbe es auch Werte mit $\lambda < 0$, für die die Störungsreihe für physikalische Observable existiert.

In diesem Fall ist das Potential aber von der Form

keine Beschränkung  , hat also nach unten.

Die Theorie ist instabil und physikalische

Observable sollten Singularitäten zeigen.

z.B. $\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow$ Umkehrschluß: Konvergenzradius der Störungstheorie $= 0$!

In welchem Sinne macht dann Störungstheorie Sinn?

Antwort: im Sinne der asymptotischen Analyse.

Zunächst einige Definitionen:

Gegeben seien 2 Funktionen $f(x), g(x)$, die wir im Limes $x \rightarrow c$, $|c| \leq \infty$, betrachten.

Wir definieren das $\mathcal{O}$ -Symbol:

Falls $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow c$, dann gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad , x \rightarrow c \quad (3.14)$$

Das gewöhnliche $\mathcal{O}$ -Symbol erlaubt $f(x)$, relativ betrachtet "größer" zu sein:

Falls $|f(x)/g(x)| < \infty$ für $x \rightarrow c$, dann gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad , x \rightarrow c \quad (3.15)$$

Bemerkungen:

– Die " $=$ " Zeichen gehören mit zur Definition und sind mit Vorsicht zu verstehen, denn z.B.

$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$$

$$\text{und } o(f(x)) = O(f(x)),$$

aber $O(f(x)) \stackrel{?}{=} o(f(x))$ gilt im. Allgem. nicht.

– (3.15) läßt sich verallgemeinern für beschränktes $|f(x)/g(x)| < \infty$ auf dem Intervall $[c_1, c_2]$:

$$f = O(g) \text{ für } x \in [c_1, c_2].$$

In diesem Fall gibt es eine Schranke $M = \sup |f/g|$,
d.h., daß

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \quad x \in [c_1, c_2].$$

Def.: Die formale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.16)$$

ist eine asymptotische Reihe für die Funktion

$f(x)$ für $x \rightarrow 0$, wenn für jedes N gilt:

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^N a_j x^j \right| = o(x^N). \quad (3.17)$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.18)$$

Der fundamentale Unterschied zwischen asymptotischen und konvergenten Reihen ist:

- Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bedeutet:
gegeben ein ε und ein x , dann existiert ein N mit

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^M a_n x^n \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } M > N \quad (3.19)$$

- Asymptotisch ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wenn:
gegeben ein ε und ein N , dann existiert ein ξ mit

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| < \varepsilon x^N \quad \text{für } x < \xi \quad (3.20)$$

① einfaches Beispiel:

$$\text{Sei } G(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{(\lambda+1)^x} dx = \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+\lambda x} dx \quad (3.21)$$

Entwicklung des Integranden:

$$\frac{1}{1+\lambda x} = 1 - \lambda x + (\lambda x)^2 - \dots$$

Vertauschen von Summe und Integral :

$$G(\lambda) \approx \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} (-\lambda x)^n dx$$

$$\approx \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n! (-\lambda)^n \quad (3.22)$$

Die Reihe divergiert offensichtlich mit $a_n \sim n!$.

Das Integral (3.21) existiert aber für alle $\lambda > 0$.

Betrachten wir die ersten Terme von (3.22) für

z.B. $\lambda = \frac{1}{10}$:

$$G\left(\frac{1}{10}\right) \approx \underbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} - \frac{6}{10000} + \dots}_{= 0.0914} \quad (3.23)$$

(Numerische) Integration von (3.21) liefert $G\left(\frac{1}{10}\right) \approx 0.09156\dots$

Die Abschätzung (3.23) ist also nützlich ("macht Sinn"), obwohl das Hinzunehmen von mehr und mehr Termen irgendwann das Ergebnis verschlechtert.

Im Sinne von (3.20) gibt es zu einem vorgegebenen Wert λ ein optimales N , für das die Reihe eine sinnvolle Aussage macht; für größere N ist sie nutzlos.

"Störungstheorie" in λ ist dann völlig nutzlos, wenn das gewünschte λ so groß ist, daß $N_{\text{opt.}} \leq 1$.

② Beispiel a la Anharmonischer Oszillator

$$G(\lambda) = \int_0^\infty dx e^{-x^2 - \lambda x^4} < \infty \quad \text{für } \lambda \geq 0 \quad (3.24)$$

$$= \int_0^\infty dx e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} x^{4n}$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \frac{1}{2} \Gamma(2n + \frac{1}{2})$$

$$G(\lambda) = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \lambda + \frac{105}{32} \lambda^2 - \frac{10395}{128} \lambda^3 + \dots \right]$$

z.B. $\lambda = \frac{1}{50}$: $G(\lambda) \approx 0.4931$ $\lambda = 1/50$ stimmt mit Integration überein

Bemerkung

- Offensichtlich ist das Vertauschen von Integral und Summe keine mathematisch gültige Identität (gleichmäßige Stetigkeit ist nicht gegeben). Es gilt aber, daß die RHS eine asymptotische Reihe von $G(\lambda)$ ist (ohne Beweis), daher das Symbol " $\sim$ ".
- Die Rechnungen lassen sich auch rückwärts lesen: gegeben eine nicht-konvergente asymptotische Reihe mit $a_n \sim \Gamma(kn+B)$ läßt sich durch die Eulerdarstellung der Γ -Funktion

eine endliche Integraldarstellung finden, zu der die Reihe eine asymptotische Entwicklung darstellt
($\Rightarrow$ Borel-Resummation).

③ Beispiel

$$f_n(x) = x^{-n} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{mit } n \geq 0$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0^+$$

(3.25)

$$\Rightarrow G(\lambda) = e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\sim 0$$

Die asymptotische Entwicklung von $e^{-\frac{1}{\lambda}}$ verschwindet.

$\Rightarrow$ Falls eine physikalische Observable einen Beitrag der Form $\approx e^{-\frac{1}{\lambda}}$ hat, ist dieser in Störungstheorie nicht sichtbar!

Im nächsten Kapitel wird es um WKB-Approximation gehen. Dabei handelt es sich um eine Stationäre-Phasen Approximation des Pfadintegrals. Es lohnt sich also, eine solche Approximation auch einmal an einem

gewöhnlichen Integral zu testen, und zwar im

④ Beispiel a la AHO, Teil 2

Diesmal betrachten wir

$$G(\lambda) = \int_0^\infty dx e^{i(x^2 - \lambda x^4)} \quad (3.26)$$

und reskalieren $x = \frac{y}{\sqrt{\lambda}}$

$$\Rightarrow G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty dy e^{-\frac{i}{\lambda}(y^2 - y^4)}$$

Die Phase wird stationär, d.h. $\frac{d}{dy}(y^2 - y^4) = 0 \Rightarrow y(1 - 2y^2) = 0$,
bei $y_0 = 0$ und $y_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. (3.27)

Entwicklung um $y_0 = 0$ führt zurück auf Beispiel ②.

Betrachten wir also z.B. $y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und entwickeln um

diesen Punkt mit $u = y - \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_+(\lambda) &\approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-a}^{\infty} du e^{\frac{i}{\lambda} \left(\frac{1}{4} - 2u^2 - u^3(2\sqrt{2} + u) \right)} \\ &\quad -a, a \text{ in between } 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{i/4\lambda} \int_{-a}^{\infty} du e^{-\frac{2iu^2}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} (u^3(2\sqrt{2} + u))^n \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit $G(\lambda) \approx G_0 + G_- + G_+$

Dies führt bei Vertauschen von Σ und $\int$ zu einer asymptotischen Reihe vom Typ ②.

Mit der Näherung $a \rightarrow \infty$ ist der $n=0$ Term von der Form

$$\begin{aligned} G_+(1) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{i}{4\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{2iu^2}{\lambda}} \\ &= -\sqrt{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i}{4\lambda}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\Rightarrow$ Die Stationäre-Phasen Approximation macht also eine wesentliche Singularität für $\lambda \rightarrow 0$ sichtbar, der in Störungstheorie prinzipiell nicht detektiert werden kann!