

3.1 Störungstheorie

Bislang haben wir lediglich Pfadintegrale vom Fresnel-Typ (Gauß-Typ) behandelt. Andere Pfadintegrallösungen sind i. d. R. schwierig zu finden; es gibt allgemein kein universelles Rezept für Wirkungen, die nicht quadratisch in x sind.

Für den Fall, daß die nicht-quadratischen Anteile in gewissem Sinne "klein" sind, bietet sich Störungstheorie an; dazu betrachten wir das Beispiel

$$G(x,t,y,0) = \int_{y,0}^{x,t} \mathcal{D}x \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right) dt} \quad (3.1)$$

Nun sei $V(x)$ eine kleine Störung des freien Teilchens. Eine Entwicklung nach $V(x)$ liefert

$$\begin{aligned} G(x,t,y,0) &= \int \mathcal{D}x \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{m\dot{x}^2}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^j \left(\int_0^t V(x(t)) dt \right)^j \\ &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^j G_j(x,t,y,0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der $j=0$ Term ist der Freie Propagator

$$G_0(x,t; y,0) = \int \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{t}} \quad (3.3)$$

Betrachten wir nun den $j=1$ Term:

$$G_1(x,t; y,0) = \int_{y,0}^{x,t} \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2}} \int_0^t d\tau V(x(\tau)) \quad (3.4)$$

Hier ist die diskretisierte Form hilfreich:

$$G_1(x,t; y,0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^N \Delta t \int \prod_{i=1}^N dx_i \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{N+1}{2}} e^{\frac{i m}{2 \hbar \Delta t} \sum_{n=0}^N (x_{n+1} - x_n)^2} V(x_l) \quad (3.5)$$

Die Integrale von $i=1, \dots, l-1$ und von $i=l+1, \dots, N$ sind frei-Teilchen Integrale. Nennen wir $x_l \rightarrow \xi$, so ergibt sich

$$G_1(x,t; y,0) = \int_0^t d\tau \int d\xi \ G_0(x,t; \xi, \tau) V(\xi) G_0(\xi, \tau; y,0). \quad (3.6)$$

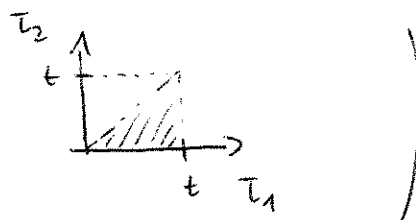
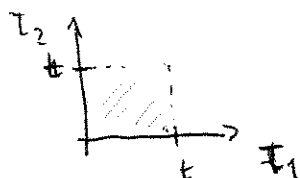
Für den j ten Term in (3.2) folgt ähnlich:

$$\begin{aligned} G_j(x,t; y,0) &= \frac{1}{j!} \int \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2}} \left(\int_0^t d\tau V(x(\tau)) \right)^j \\ &= \int \mathcal{D}x \ e^{\frac{i}{\hbar} \int \frac{m \dot{x}^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{j!} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_j))}_{= \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{j-1}} d\tau_j V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_j))} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Vertauschungssymmetrie von $V(x(\tau_1)) \dots V(x(\tau_j))$ ausgenutzt.

(NB: Beispiel $j=2$:

$$\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots \rightarrow \int_0^t dt_1 \int_0^{\tau_1} dt_2 \dots$$



Weiter folgt wie in (3.6):

$$G_j^{(1,0)} = \int_0^t dt_1 \int_0^{\tau_1} dt_2 \dots \int_0^{\tau_{j-1}} dt_j \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_j$$

$$G_0(x, t; \xi_1, \tau_1) V(\xi_1) G_0(\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2) V(\xi_2) \dots$$

$$\dots V(\xi_j) G_0(\xi_j, \tau_j; \gamma, 0)$$

(3.7)

Dazu gibt es eine diagrammatische Darstellung
à la Feynman

$$G_0(x, t; \gamma, 0) : \begin{array}{c} x, t \text{ --- } \gamma, 0 \end{array}$$

$$\int V(\xi) : \begin{array}{c} \text{wavy line} \end{array}$$

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right) :$$

$$\begin{array}{c} \text{blob} \end{array}$$

(3.2)

 $\Rightarrow$

(3.7)

$$G(x,t;y,0) \equiv \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Gl. (3.7) kann auch rekursiv dargestellt werden:

$$G_j(x,t;y,0) = \int_0^t d\tau \int d\xi G_0(x,t;\xi,\tau) V(\xi) G_{j-1}(\xi,\tau;y,0) \quad (3.8)$$

$j \geq 1$

$$\Rightarrow \underline{G(x,t;y,0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^j G_j = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^j G_j$$

$$\stackrel{(3.8)}{=} G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^j \int_0^t d\tau \int d\xi G_0 V(\xi) G_{j-1}$$

$$= \underline{G_0(x,t;y,0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \int d\xi G_0(x,t;\xi,\tau) V(\xi) G(\xi,\tau;y,0)}$$

(3.9)

Dies entspricht der allgemeinen QM Formulierung von zeitabh. Störungstheorie. Diagrammatisch

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---}$$

(3.10)

Nach Iteration von (3.10) bzw. (3.9) folgt wieder

$$(3.7) \text{ und } \text{---} = \text{---} + \frac{\xi}{\text{---}} + \frac{\xi\xi}{\text{---}} + \frac{\xi\xi\xi}{\text{---}} + \dots$$

Bemerkungen:

Bislang haben wir Störungen um das freie Teilchen betrachtet, es können aber allgemeine Störungen um einen anderen bekannten Fall betrachtet werden.

Beispiel: Anharmonischer Oszillator

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \lambda x^4 \right] dt$$

$$= S_{HO} + S_{\lambda} \quad (3.11)$$

$$\text{mit } S_{\lambda} = - \int dt \lambda x^4 = - \int dt V_{\lambda}$$

Grundzustandsenergie in 1. Ordnung Störungstheorie

a la Feynman - Kac:

$$E_0 = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \int dx G(x, -i\hbar\tau; x, 0)$$

$$= - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left[\underbrace{\int_0^{\hbar\tau} ds}_{= \int_0^{\tau} ds} G_{HO} \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\hbar s} ds' G_{HO} V_{\lambda}(s') G_{HO} \right) \right]$$

$$E_0 = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[\ln \int G_{HO} - \frac{\int G_{HO} V_A G_{HO}}{\int G_{HO}} \right] \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} \omega + \frac{3}{4} \cdot \omega \frac{\lambda}{\omega^3} \quad (\hbar = 1) \quad (3.13)$$