

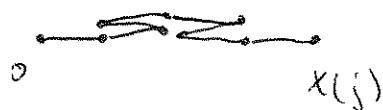
2.5 Pfadintegral und Brown'sche Bewegung

Brown'sche Bewegung kann beschrieben werden durch einen diskreten "Random Walk". Als Beispiel betrachten wir einen 1-dim Random Walk mit konstanter Schrittweite Δ und konstanter Schrittfrequenz: 1 Schritt pro Zeitschritt ε .

Seien p und q die Wahrscheinlichkeiten für einen Schritt nach rechts und nach links mit $p+q=1$.

Die gesamte Zahl an Schritten sei N
 $\Rightarrow$ gesamte Zeit $t = N \cdot \varepsilon$.

Ferner sei $u(j, N)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Random Walker nach N Schritten eine Gesamtdistanz $x(j) = j \cdot \Delta$ vom Ursprung (bei $t_0=0$, $x_0=0$) zurückgelegt hat



z.B.: $j=4$
 $N=8$

z.B. resultiert eine Nettodistanz von j Schritten nach rechts aus p Schritten nach rechts und v Schritten nach links, mit

$$\begin{aligned} \mu - \nu &= j \\ \mu + \nu &= N \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Schrittfolgen ist $\binom{N}{\mu}$,
so daß

$$u(j, N) = \begin{cases} \binom{N}{\mu} p^\mu q^\nu & , \text{ falls } N-j \text{ gerade} \\ 0 & , \text{ falls } N-j \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.81)$$

Für große N und j gilt nach Stirling's Formel,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

daß

$$\binom{N}{\mu} = \frac{N!}{(N-\mu)! \mu!} \stackrel{\substack{N-j \text{ gerade} \\ \mu = \frac{1}{2}(j+N)}}{=} \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N-j)\right]! \left[\frac{1}{2}(N+j)\right]!}$$

$$\begin{aligned} &\approx \sqrt{\frac{2\pi N}{2\pi \frac{1}{2}(N-j) \cdot 2\pi \frac{1}{2}(N+j)}} \left(\frac{N}{e}\right)^N \left(\frac{e}{\frac{1}{2}(N-j)}\right)^{\frac{1}{2}(N-j)} \left(\frac{e}{\frac{1}{2}(N+j)}\right)^{\frac{1}{2}(N+j)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{N}{(N^2 - j^2)}} \cdot N^N \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(N-j)\right)^{\frac{1}{2}(N-j)}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}(N+j)\right)^{\frac{1}{2}(N+j)}} \end{aligned}$$

(2.82)

Betrachten wir nun $u(j, N)$ für

$$N \gg j \gg 1 \quad \text{und}$$

$$p = \frac{1}{2}(1+\delta), \quad q = \frac{1}{2}(1-\delta), \quad \delta \ll 1:$$

$$\underline{u(j, N)} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{N}{N^2 - j^2}} \cdot N^N \left(\frac{q}{\frac{1}{2}(N-j)} \right)^{\frac{1}{2}(N-j)} \left(\frac{p}{\frac{1}{2}(N+j)} \right)^{\frac{1}{2}(N+j)}$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[\frac{1}{2} N \ln \frac{N^2}{\frac{1}{2}(N-j) \frac{1}{2}(N+j)} - \frac{1}{2} j \ln \frac{N+j}{N-j} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} N \ln q \cdot p - \frac{1}{2} j \ln \frac{q}{p} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[\frac{1}{2} N \ln \frac{1}{1 - \frac{j^2}{N^2}} - \frac{1}{2} j \ln \frac{1 + \frac{j}{N}}{1 - \frac{j}{N}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} N \ln 4qp - \frac{1}{2} j \ln \frac{q}{p} \right]$$

$\underbrace{\frac{j^2}{N^2} \approx \frac{j^2}{N^2}}_{\approx -\delta^2} \quad \underbrace{\frac{1}{4}(1-\delta^2)}_{\approx 1-\delta^2} \quad \underbrace{\frac{q}{p}}_{\approx 1-\delta}$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[-\frac{j^2}{2N} + j\delta - \frac{1}{2} N \delta^2 \right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[-\frac{1}{2N} (j - N\delta)^2 \right] \quad (2.83)$$

Im dem Limes $N \gg j \gg 1$, $\delta \ll 1$, ist somit die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens pro Einheitsintervall in x :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g(x, t)}} &= \frac{u(j, N)}{2\Delta} \quad \swarrow \text{wegen } u=0 \text{ f\"ur } N, j \text{ ungerade} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi t \Delta^2}} \exp\left(-\frac{1}{2t} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta^2}\right) (x - N\delta\Delta)^2\right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Der Limes kontinuierlicher Zeit und Ort ist m\"oglich mit $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$; es erfordert aber

$$D := \frac{\Delta^2}{2\varepsilon} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nicht zu verwechseln mit } D(t_1, t_2) \\ \text{aus dem GY Formalismus} \end{array} \right) \quad (2.85)$$

konstant zu halten (Diffusionskoeffizient).

Außerdem soll

$$c := \frac{\Delta}{\varepsilon} \delta \quad \left(\Rightarrow N\delta\Delta = \underbrace{\varepsilon N}_{t} \frac{\delta\Delta}{\varepsilon} = c \cdot t \right)$$

endlich bleiben, so daß δ auch im Kontinuumslimes gegen 0 gehen muß.

Damit gilt im Kontinuums limit:

$$g(x,t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}\right] \quad (2.86)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte einer 1-dim Brown'schen Bewegung, die bei $x=0$ zum Zeitpunkt $t=0$ startet. (c ist also die Driftgeschwindigkeit der Diffusion).

Für $c=0$ liegt die Analogie zum Propagator eines freien Teilchens auf der Hand:

Brown'sche Bewegung

QM, freies Teilchen

Dt

$\longleftrightarrow$

$\frac{i\hbar}{2m} t$

(2.87)

Heuristisch: die QM-Propagation eines freien Teilchens entspricht einer Brown'schen (stochastischen) Bewegung in imaginärer Zeit.

Wichtiger Unterschied: $g(x,t)$ bezeichnet schon eine Wahrscheinlichkeitsdichte, während in der QM erst das Quadrat des Propagators einer Wahrscheinlichkeitsdichte entspricht.

Letzteres ist wesentlich für die Entstehung von Interferenztermen.

Zurück zur Brownschen Bewegung:

Falls $x=0$ bei $t=0$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen zur Zeit t zwischen a und b ist, gegeben durch

$$W(t; a, b) = \int_a^b dx \, g(x, t) \quad (2.88)$$

In gleicher Weise ist die Wahrscheinlichkeit für den Prozeß:

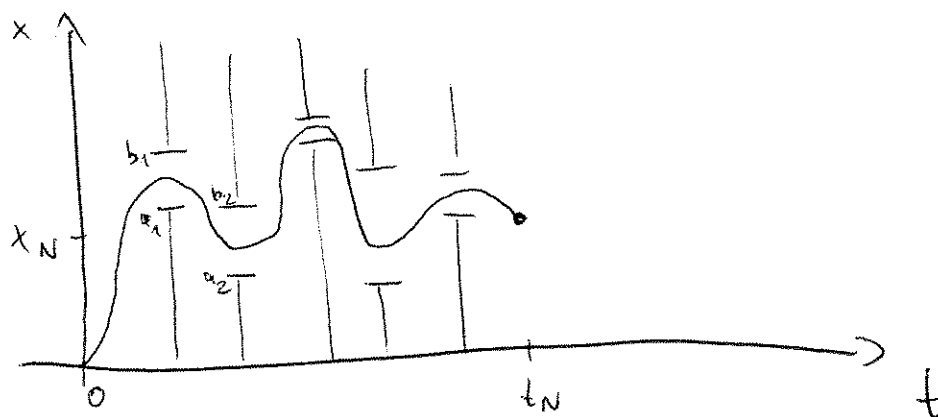
$$x=0, t=0 \rightarrow x \in [a_1, b_1], t=t_1 \rightarrow x \in [a_2, b_2], t=t_2 \rightarrow \dots x \in [a_N, b_N], t=t_N$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} W(t_1; a_1, b_1 | t_2; a_2, b_2 | \dots | t_N; a_N, b_N) \\ = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N \, g(x_1, t_1) \, g(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots g(x_N - x_{N-1}, t_N - t_{N-1}) \end{aligned} \quad (2.99)$$

Ohne die x_N Integration (und nach Division durch $g(x_N, t_N)$) entspricht dies der Wahrscheinlichkeit eines Pfades $(0, 0) \rightarrow (x_N, t_N)$ mit der Bedingung, daß der Pfad bestimmte Intervalle

passiert:



In der Tat kann man mit der Konstruktion (2.99) im Limes $N \rightarrow \infty$, $b_i - a_i \rightarrow 0$

ein Maß auf dem Raum aller Pfade definieren:

das Wiener Maß, welches dem Wiener-

Integral zugrunde liegt. (heuristisch: $w \sim Dx$)

Letzteres steht in voller Analogie zum Feynman-Pfadintegral für imaginäre Zeiten.

Da das Wiener-Integral auf mathematisch soliden Fundament steht, empfiehlt es sich, quantenmechanische Propagatoren und Amplituden durch analytische Fortsetzung von Imaginärzeit-Propagatoren und -Amplituden abzuleiten. (vgl. Euklidische QFT)

Bemerkungen:

Die Analogie zwischen Pfadintegral und Brown'scher Bewegung verdeutlicht noch:

Die Konstanz des Diffusionskoeffizienten $D = \frac{\Delta^2}{2\varepsilon}$ im Kontinuumslimit bedeutet für die Pfade im Pfadintegral wegen $\varepsilon \equiv \Delta t$ (Zeitscheibendicke), $\Delta \equiv \Delta x$, daß

$$\dot{x}(t) \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}} = \sqrt{2D} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \rightarrow \infty \quad (2.100)$$

im Limes $\Delta t \rightarrow 0$. D.h., in der Regel sind die Pfade im Pfadintegral zwar kontinuierlich, d.h. stetig, (per constructionem), aber nicht differenzierbar.

Ebenso folgt, daß die Wirkung dieser Pfade

$$S[x] = \int dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \dots \right) \rightarrow \infty \quad (2.101)$$

i.A. nicht endlich ist.

Pfade mit endlicher Wirkung (und damit auch die klassischen Pfade) bilden in der Menge alle Pfade also die Ausnahme und nicht die Regel

(mathematisch gesprochen sind sie eine Menge vom Maß Null).