

2.2 Korrespondenz - Limes

Im folgenden zeigen wir eine heuristische Ableitung des Korrespondenz-Limes (à la Bohr), d.h. des klassischen bzw. Semi-klassischen Limes, aus dem Pfadintegral. Vorausgesetzt ist natürlich dessen Existenz, d.h. eine Beschränkung von Hamilton-Operatoren auf geeignete Operatoren (z.B. mit nach unten beschränkten Potentialen).

Beginnend mit (2.18) hat der Propagator die Form

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x \, e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (2.22)$$

Wir sind interessiert am Limes $\hbar \rightarrow 0$.

Betrachten wir als Beispiel ein gewöhnliches Integral der Form

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{i\lambda f(x)} \quad (2.23)$$

im Limes $\lambda \rightarrow \infty$. Für große λ oszilliert der Integrand schnell mit x mit Ausnahme der Punkte x_0 , bei denen $f(x)$ stationär ist, d.h. $f'(x_0) = 0$.

Im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ kommt also der dominante Beitrag zu $F(\lambda)$ von Punkten x_0 mit $f'(x_0) = 0$. Entwicklung des Integrals um diese Punkte liefert:

$$F(\lambda) = \sum_{\{x_0\}} \int dx \, e^{i\lambda f(x_0) + \frac{\lambda}{2} i (x-x_0)^2 f''(x_0) + \dots}$$

$$= \sum_{\{x_0\}} \sqrt{\frac{2\pi i}{\lambda f''(x_0)}} e^{i\lambda f(x_0)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad (2.24)$$

($f''(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt)

Mit Blick auf (2.22) bedeutet dies:

$$\begin{array}{lll} \lambda \rightarrow \infty & \rightsquigarrow & \hbar \equiv \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0 \\ \int dx & \rightsquigarrow & \int \mathcal{D}x \\ \text{stationäre Punkte} & \rightsquigarrow & \text{stationäre Pfade} \\ x_0 & & x_0(t) \\ f'(x_0) = 0 & \rightsquigarrow & \frac{\delta S[x(t) = x_0(t)]}{\delta x(t)} = 0 \end{array} \quad (2.25)$$

$\Rightarrow$ Im Limes $\hbar \rightarrow 0$ ist das Pfadintegral dominiert durch die klassischen Pfade, die das Wirkungsprinzip erfüllen, $\delta S[x(t) = x_0(t)] = 0$

NB: Der Limes $\hbar \rightarrow 0$ ist nicht rein formaler Natur, sondern entspricht physikalischen Systemen mit

$$S[\underline{x}_0(t)] \gg 1$$

z.B.: ein Teilchen der Masse $m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$, das sich 1s lang frei mit $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegt, hat die Wirkung

$$S = \int_0^1 dt \frac{1}{2} m \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \simeq 5 \cdot 10^{30} \hbar$$



Die obige Betrachtung geht dennoch über den rein klassischen Grenzfall hinaus:

angenommen es existieren für ein System 2 (oder mehr) stationäre Pfade $x_{0,1}(t) \neq x_{0,2}(t)$ mit

$$S_1 = S[x_{0,1}] \quad , \quad S_2 := S[x_{0,2}] \quad \text{und} \quad \left. \frac{\delta S}{\delta x} \right|_{x=x_{0,1/2}} = 0 ;$$

dann ist im Limes $\hbar \rightarrow 0$ der Propagator von der Form

$$\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle = c_1 e^{\frac{i}{\hbar} S_1} + c_2 e^{\frac{i}{\hbar} S_2} , \quad (2.26)$$

mit $c_{1,2}$ analog zum Vorfaktor $\sqrt{\%}$ in (2.24).

Nun ist (2.26) lediglich eine Wahrscheinlichkeitsamplitude; die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben

durch

$$\begin{aligned}
 |\langle x_b t_b | x_a t_a \rangle|^2 &= (c_1 e^{\frac{i}{\hbar} S_1} + c_2 e^{\frac{i}{\hbar} S_2}) (c_1^* e^{-\frac{i}{\hbar} S_1} + c_2^* e^{-\frac{i}{\hbar} S_2}) \\
 &= \underbrace{|c_1|^2 + |c_2|^2}_{\text{klassischer Beitrag}} + \underbrace{c_1 c_2^* e^{\frac{i}{\hbar} (S_1 - S_2)} + c_2 c_1^* e^{\frac{i}{\hbar} (S_1 - S_2)}}_{= 2 \operatorname{Re} c_2^* c_1 e^{\frac{i}{\hbar} (S_1 - S_2)} \text{ Interferenzterm}} \\
 &\quad (2.27)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Selbst im Korrespondenz-Limes $\hbar \rightarrow 0$, d.h. im Limes $\frac{S_1}{\hbar}, \frac{S_2}{\hbar} \gg 1$ kann ein Quanteninterferenzmuster entstehen, wenn $\frac{S_1 - S_2}{\hbar}$ nicht zu groß ist ("Schrödinger-cat states").