Symmetrien und Eichtheorien

Georg Bergner

TPI FSU Jena

Zwei Wege zu Eichtheorien ...

1. Symmetrien und lokale Symmetrien

   ... wichtige Leitlinie der modernen Physik

2. Eichinvarianz in der Elektrodynamik

   ... Maxwell-Gleichungen sind Ausgangspunkt der modernen Physik

Eichtheorien beschreiben Wechselwirkungen der Teilchen...

3. Yang-Mills-Theorie und Quantenchromodynamik

   ... von den starken Kräften

4. Ausblick

   ... zu neuen Entwicklungen

„. . . Und preiset er das Weltgebäude,
So prangt es durch die Symmetrie."

[Friedrich Schiller, Die Künstler]

Grundlegendes Prinzip der modernen Physik: Symmetrien

Invarianz der physikalischen Gesetze unter Transformationen T

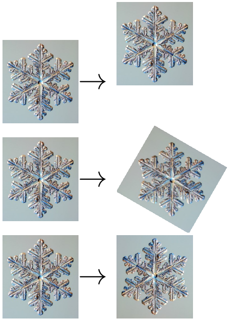
- Translation
- Rotation
- Spiegelung

Invarianz der Wirkung! $\delta_T S = 0$

Transformationen (diskret, kontinuierlich) können

- mehrfach angewendet werden $T_1 T_2$
- invertiert werden $T^{-1} T = I$

$\Rightarrow$ mathematisch: Gruppentheorie



Theorien für kontinuierliche Felder

Lagrange-Funktion einer periodischen Kette mit Auslenkungen q_n

$$L = T - V = \frac{M}{2} \sum_n \left[\dot{q}_n^2 - \kappa (q_{n+1} - q_n)^2 - \omega^2 q_n^2 \right]$$

Übergang zu einer kontinuierlichen Kette mit Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$

$$L = \frac{1}{2} \int dx \, \left[(\dot{\phi}(x))^2 - (\partial_x \phi(x))^2 - m^2 \phi(x)^2 \right] = \int dx \, \mathcal{L}[\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi]$$

Theorie des Klein-Gordon-Feldes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Feldgleichungen und Wirkung

Wirkung:

$$S = \int dt\ L = \int d^4x\ \mathcal{L}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Bewegungsgleichung ist Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

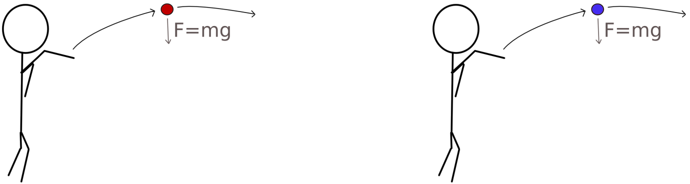
Symmetrie unter Translationen, Rotationen
(Lorentz-Transformationen):

$$\phi(x) \rightarrow \phi(T^{-1}(x))\ , \quad \delta_T S = 0$$

Innere Symmetrien

Verallgemeinerung:

- Raum-Zeit-Transformationen wirken auf Felder
  (z. B. Vektorfeld $A_\mu \to T(A_\mu)(T^{-1}(x))$)
- von Raum-Zeit unabhängige Symmetrie: innere Symmetrie



Innere Symmetrie-Transformationen

- wirken an jedem Raum-Zeit-Punkt x auf „inneren Raum“

$$\text{z. B.} \quad \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$$

Komplexes Skalarfeld

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

Invariant unter Transformationen mit komplexer Phase $U = e^{i\alpha}$

$$\phi(x) \to U\phi(x) \quad (U^\dagger U = 1)$$

Entspricht Rotation

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

Emmy Noether

Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Das Noethersche Theorem

Noethersches Theorem

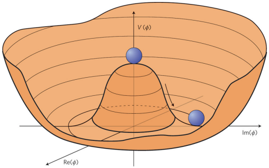
(kontinuierliche) Symmetrie $\Leftrightarrow$ Erhaltungsgröße

- Translation $\Leftrightarrow$ Impuls
- Rotation $\Leftrightarrow$ Drehimpuls
- komplexer Phasenfaktor $\Leftrightarrow$ (elektrische) Ladung

- erhaltener Strom J_μ mit $\partial_\mu J^\mu = 0$
- Ladung $Q = \int d^3x \, J^0$, $\dot{Q} = 0$

Spontane Symmetriebrechung

Eine Symmetrie der Wirkung bedeutet keine Symmetrie des Grundzustandes:



[L. Álvarez-Gaumé, J. Ellis, Nature Physics 7, 2–3 (2011).]

Symmetrien werden spontan gebrochen.

Globale Symmetrie $\rightarrow$ lokale Symmetrie

- bisher: Transformationen unabhängig von x (an allen Orten gleichzeitig angewendet)
- jetzt: lokale Transformationen

$$U = e^{i\alpha} \rightarrow U(x) = e^{i\alpha(x)}$$

Problem: Invarianz von Ableitungstermen geht verloren

$$\partial_\mu U\phi(x) = U(\partial_\mu + i(\partial_\mu \alpha(x)))\phi(x)$$

Unter lokalen Transformationen ist $(\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi$ nicht invariant.

Minimale Kopplung

- führen Feld A_μ ein, dessen Transformationen die zusätzlichen Terme kompensieren

$$(\partial_\mu + iqA'_\mu)U\phi = U(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi$$

- dadurch ergibt sich die Transformation: $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)/q$
- kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

Unter lokalen Transformationen ist $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi$ invariant.

Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho\,, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} = 0$$

- Potentiale: $A^\mu = (\Phi(x), \mathbf{A}(x))$
- Strom: $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$
- Feldstärketensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Eichinvarianz und Kopplung an Materie

Eichinvarianz (Invarianz von $F^{\mu\nu}$)

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

Langrangedichte für Bewegungsgleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

Wie kann man die Eichinvarianz mit j^μ herstellen?
$\Rightarrow$ Kompensation durch Zusatzterm.

Eichinvarianz und Kopplung an Materie

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

globale Symmetrie: Noether-Strom j^μ $\longrightarrow$ lokale Symmetrie: Kopplung $j_\mu A_\mu$

Quantenelektrodynamik: Eichinvarianz, lokale Symmetrie

Elektrodynamik: Eichinvarianz $\longrightarrow$ Kopplung an Ladung $j_\mu A_\mu$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Weitere Sichtweise

- globale Symmetrie, Invarianz unter globaler Transformation $U = e^{i\alpha}$

$\Leftrightarrow$ Erhaltung der elektrischen Ladung Q bezogen auf das ganze Volumen

- lokale Symmetrie, Invarianz unter lokalen Transformation $U = e^{i\alpha(x)}$

$\Leftrightarrow$ Lokale Erhaltung der elektrischen Ladung $Q(x)$

- lokale Ladungserhaltung erfordert statische Ladungen
  d. h. Teilchen mit unendlich großer Masse
  bzw. keine Ableitungsterme
- Lösung ohne statische Ladungen: Eichprinzip

Konsequenzen der Eichinvarianz in der klassischen Elektrodynamik

- effektiv eine redundante Beschreibung: **B** und **E** Felder physikalisch
- Eichfreiheit im Bezug auf $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$
- eichinvariante Größen beschreiben Energie des Feldes und Wechselwirkungen
- praktische Rechnungen: Eichfixierung, z.B. Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
- A_μ ist nur eine „Hilfsgröße“

Übergang zur Quantentheorie

- Phasenfaktor von Wellenfunktion: $\Psi \to \Psi \exp(i\frac{q}{\hbar}\alpha(x))$
- Pfadintegralformalismus: Integration über alle Pfade gewichtet mit Phasenfaktor mit klassischer Wirkung S

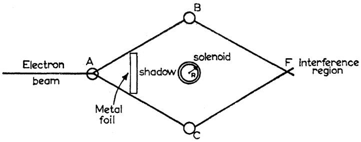
$$\int \mathcal{D}x \exp(\frac{i}{\hbar}S[x])$$

- Lagrange-Funktion: $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$

Hat Änderung von Potential $A_\mu = \partial_\mu \alpha$ physikalische Konsequenz, wenn $\mathbf{B} = 0$ und $\mathbf{E} = 0$?

Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory

Y. AHARONOV AND D. BOHM
H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England
(Received May 28, 1959; revised manuscript received June 16, 1959)



- Pfadintegralformalismus der Quantenmechanik

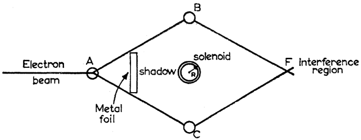
$$\langle x|e^{-iHt}|y\rangle = \int \mathcal{D}x \; e^{iS[x]}$$

- Quantenmechanik im Pfadintegralformalismus liefert Phasenfaktor:

$$e^{iS[C_{ACF}]/\hbar}\left(1 + e^{i(S[C_{ABF}]-S[C_{ACF}])/\hbar}\right)$$

Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory

Y. Aharonov and D. Bohm
H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Bristol, England
(Received May 28, 1959; revised manuscript received June 16, 1959)



- Phase bestimmt vom Feld in der Spule:

$$S[C_{ABF}] - S[C_{ACF}] = e\int_{C_{ABF}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - e\int_{C_{ACF}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_F \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}$$

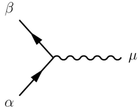
- Interferenz-Muster zeigt Abhängigkeit vom magnetischem Fluß durch Spule

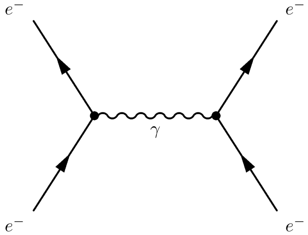
Konsequenzen der Eichinvarianz in der Quantenelektrodynamik

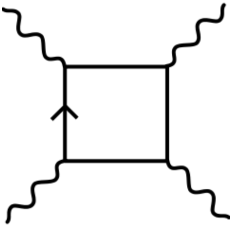
- Beschreibung mit Potentialfeld A_μ
- Projektion auf physikalische eichinvariante Observablen
- Eichfixierung: Quantisierung mit Nebenbedingungen
- redundante Freiheitsgerade: Kompensation durch Geister
- Alternative eichinvariante Formulierung: Gitter-Quantenfeldtheorie

Quantenelektrodynamik

- Elektronen-Felder ψ
- Wechselwirkung zwischen e^- durch Photonen-Felder A_μ
- $\mathcal{L}$ gibt Wechselwirkung vor $-iq\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu \psi$







Symmetrien und Eichtheorien in der Teilchenphysik

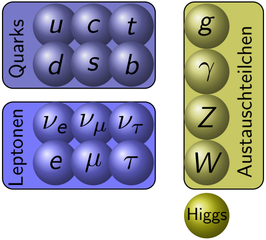
- Symmetrien bringen Ordnung in den Teilchen-Zoo: Identifikation der gemeinsamen Grundbausteine
- wesentliche Wechselwirkungen werden durch Eichtheorien beschrieben (Elektromagnetismus, schwache Kraft, starke Kraft)

Weiterer wichtiger Baustein ist spontane Brechung einer Symmetrie:

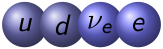
- Higgs-Effekt: Erzeugung von Teilchenmasse durch spontane Symmetriebrechung

Das Standardmodell der Teilchenphysik

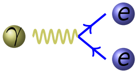
Standardmodell



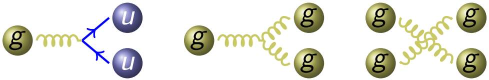
- stabile Materie-Teilchen



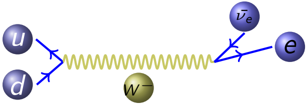
- Elektromagnetismus



- starke Wechselwirkung



- schwache Wechselwirkung



Was sehen wir vom Standardmodell?

Beobachtbar auf Alltagsskalen:

- Gravitation (nicht im SM)
- Elektrodynamik: Elektronen und Photonen

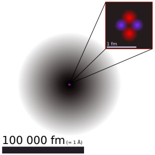
Schwache Wechselwirkung:

- Reichweite durch Masse von W- und Z-Bosonen begrenzt

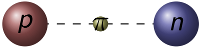
Starke Wechselwirkung:

- begrenzt durch Selbst-Wechselwirkung der Gluonen
- "Confinement": einzelne Ladungen nicht beobachtbar
- 99% der Masse von Nukleonen ergibt sich aus Wechselwirkung

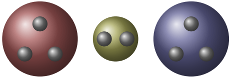
Die starke Kraft



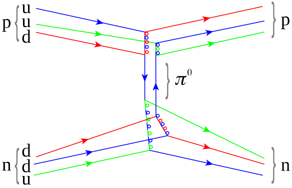
1932



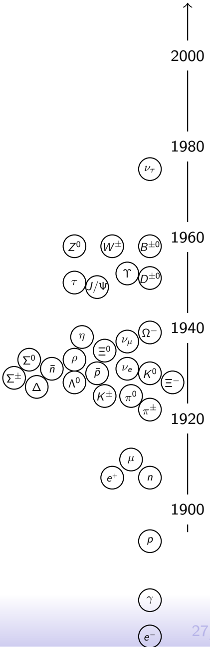
1935



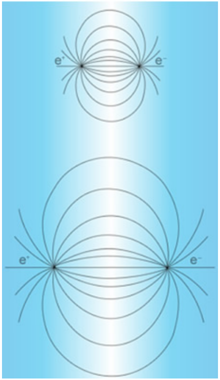
1964



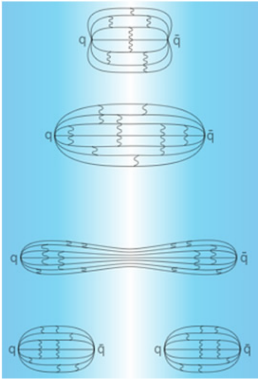
1973



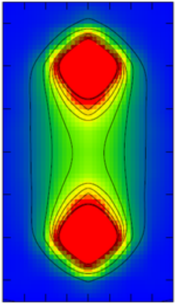
⇒ Formulierung der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD)



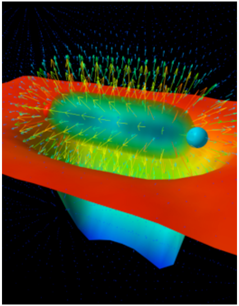
elektromagnetische Kraft



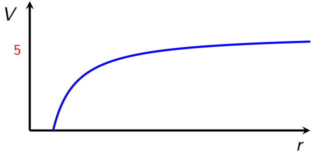
starke Kraft

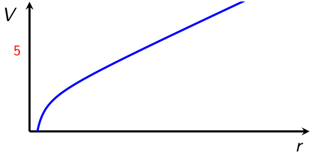


[M. Cardoso et al.,Phys. Rev. D 81, 034504 (2010)]

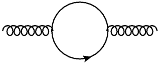


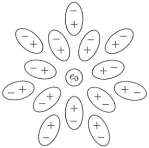
[D. Leinweber]



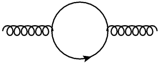


Abschirmung durch Elektronen

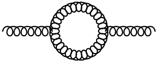




Abschirmung durch Quarks



Anti-Abschirmung durch Gluonen

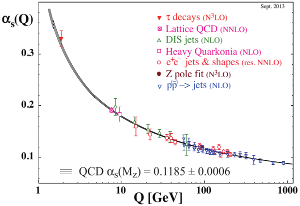


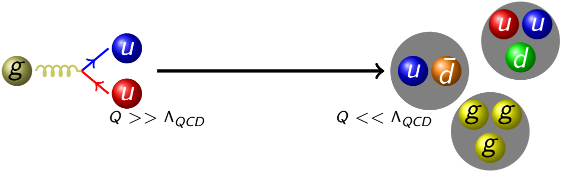
elektromagnetische Kraft

starke Kraft

Starke Wechselwirkungen des Standardmodells: Quanten-Chromo-Dynamik

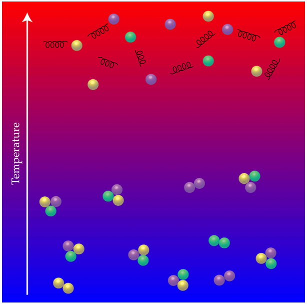
- hohe Energien: asymptotische Freiheit
  - schwach gekoppelte Quarks und Gluonen
  - Störungstheorie anwendbar
- niedrige Energien: Confinement
  - stark gebundene Zustände von Quarks und Gluonen
  - effektive Theorie von Hadronen
  - Bildung von Fermionkondensat





[K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).]

Phasenübergänge in der QCD



[APS/Joan Tycko]

- hohe Temperaturen: freies Gas von Quarks und Gluonen
- niedrige Temperaturen: Gas von Hadronen
- Phasenübergang: Deconfinement, Fermion-Kondensation

Yang-Mills-Theorie und die starke Wechselwirkung

Was ist anders als bei der QED? Beginnen wieder mit lokaler Symmetrie:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^\dagger(x) \cdot \phi(x) = \sum_i \phi_i^\dagger(x)\phi_i(x)$$

Transformationen U sind (komplexe) Matrizen $U^\dagger U = I$

$$D'_\mu U\phi = (\partial_\mu - igA'_\mu)U(x)\phi(x) = U(x)(\partial_\mu - igA_\mu)\phi(x)$$

A_μ Matrix-Feld

$$A_\mu \to UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger \cdot (D_\mu\phi) + m^2\phi^\dagger \cdot \phi$$

Yang-Mills-Theorie

Nun analog zur Elektrodynamik: Eich-Sektor
Invarianter Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Eichinvarianz verlangt (Selbst-) Wechselwirkung von A_μ (Gluonen)

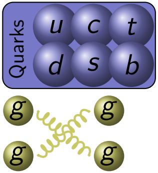
Gluonen tragen Ladung!

Quantenchromodynamik

Wirkung der Quantenchromodynamik:

$$S_{\mathrm{QCD}} = \int d^4x \left[\sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (i\gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu) + m_f)\psi_f - \frac{1}{4}\mathrm{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right] ,$$

- N_f Quarks: up, down, strange, charm, top, bottom
- Gluon-Feld: A_μ (tragen Farbladung)
- Farb-Feldstärke
  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$
- rein gluonischer Anteil: Yang-Mills-Theorie



Lehren aus der Theorie der starken Wechselwirkung (Frank Wilczek, Nobel Lecture)

Paradoxien:

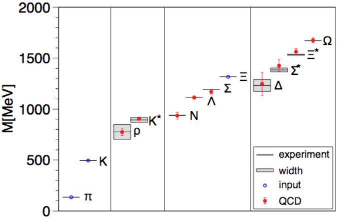
1. „Quarks are Born Free, but Everywhere They are in Chains “
2. „Special Relativity and Quantum Mechanics Both Work “

Paradigmen:

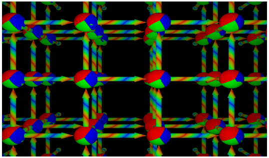
1. „The Hard Reality of Quarks and Gluons “
2. „Mass Comes from Energy “
3. „The Early Universe was Simple “
4. „Symmetry Rules “

Wieso ist QCD die richtige Theorie?

- Analytischer Beweis: “Millenium problem”
- einzige Möglichkeit numerische Methoden
- Diskretisierung, Monte-Carlo-Methoden zur Auswertung des Pfadintegrals



[S. Dürr, et al., Science 322, 1224 (2008)]



[FZ Jülich]

Ausblick

- Können Symmetrien erweitert werden?
- Wie kann man Gravitation mit einbinden?
- Ist eine Vereinheitlichung der Wechselwirkungen möglich?
- Wie kann man die Theorie der starken Wechselwirkung verstehen?
- Warum ist die Wechselwirkung durch das Higgs-Boson anders als die anderen Bestandteile des Standardmodells keine Eichtheorie?

Supersymmetrie

Erlaubte Symmetrien in der QFT:

Poincare Symmetrie
[Coleman & Mandula]
Transformationen durch Spin vorgegeben

Supersymmetrie
[Haag, Lopuszanski & Sohnius]
transformiert Fermionen $\leftrightarrow$ Bosonen

Innere Symmetrie
[Coleman & Mandula]
Teichlen mit gleichem Spin

Supersymmetrie ist einzig mögliche (nicht triviale) Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrie!

Supersymmetrie

Erlaubte Symmetrien in der QFT:

Poincare Symmetrie

[Coleman & Mandula]

Transformationen durch Spin vorgegeben

Supersymmetrie

[Haag, Lopuszanski & Sohnius]

transformiert Fermionen $\leftrightarrow$ Bosonen

Innere Symmetrie

[Coleman & Mandula]

Teichlen mit gleichem Spin

Supersymmetrie ist einzig mögliche (nicht triviale) Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrie!