

Einführung in Monte-Carlo-Simulationsmethoden:
vom Ising-Modell zur Gittereichtheorie
Teil 2: $SU(2)$ Gitter-Eichtheorie

Georg Bergner

TPI FSU Jena
WWU Münster

Motivation und Aufbau des zweiten Teils

Aus erstem Teil:

- Monte-Carlo-Methoden auf Spin-Modellen
- Verallgemeinerung: Kontinuierliche Spins, lokale Symmetrie
- Vergleich Pfad-Integral in QM
- Phasenübergang: Skalen-Invarianz

Gitter-Eichtheorie:

- Eichtheorie im Kontinuum: Wiederholung aus QFT
- Eigenschaften starker Wechselwirkungen: Grenzen perturbativer Methoden
- Gitter-QFT Formulierung: Eichinvarianz auf dem Gitter
- Simulationstechniken für Gitter-Eichtheorie

Eichtheorie

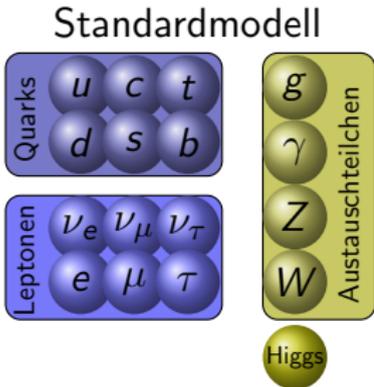
Eichtheorien sind die fundamentale Beschreibung der QFT-Wechselwirkungen:

- Elektromagnetismus
- schwache Wechselwirkung
- starke Wechselwirkung
- Vergleichbare Ansätze werden auch für die Gravitation diskutiert.

Nur Elektromagnetismus (und Gravitation) kann auf Alltagsskalen beobachtet werden, da

- schwache Wechselwirkung: schwere W/Z-Eichbosonen begrenzen Reichweite
- starke Wechselwirkung: Confinement, keine einzelnen Ladungen beobachtbar

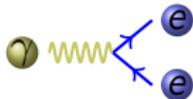
Das Standardmodell der Teilchenphysik



- stabile Materie-Teilchen



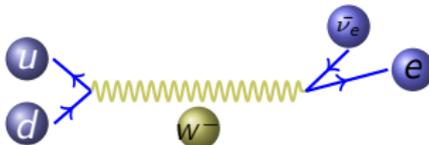
- Elektromagnetismus



- starke Wechselwirkung



- schwache Wechselwirkung



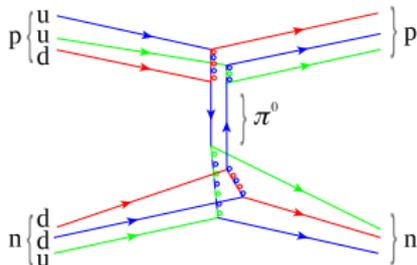
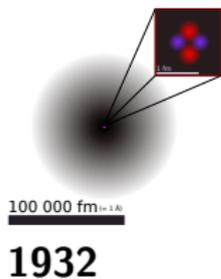
Kurzer Überblick: Beobachtete Eigenschaften der starke Wechselwirkung

Starke Wechselwirkung bindet fundamentale Bausteine zu Protonen und Neutronen zusammen. Sie ist auch für die effektive Bindung im Atomkern verantwortlich. Eigenschaften:

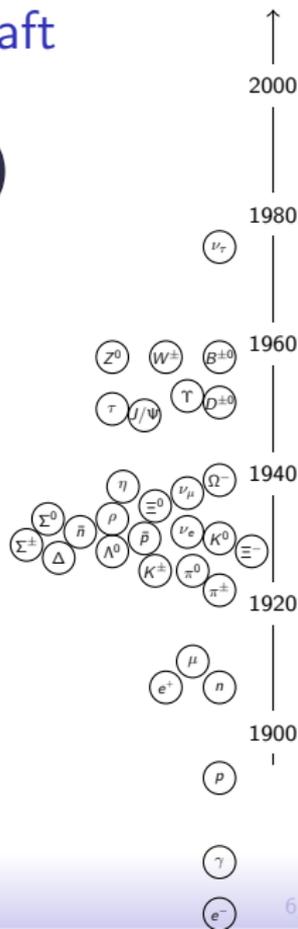
- niedrige Energien: Confinement
- hohe Energien: Asymptotische Freiheit

Experimente bei hohen Energien (z. B. deep inelastic scattering) habe erste Hinweise auf zugrundeliegende Theorie gegeben.

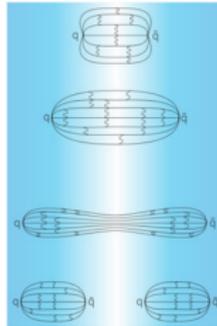
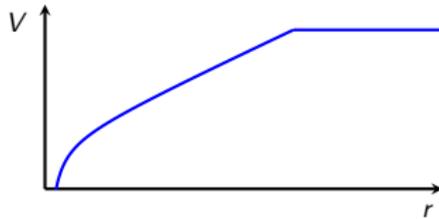
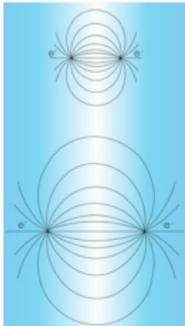
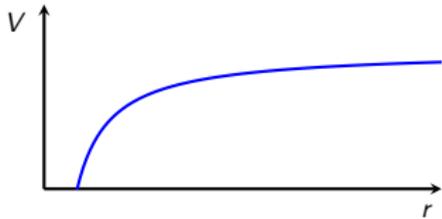
Kurzer Überblick: Die starke Kraft



⇒ Formulierung der **Q**uanten-**C**hromo-**D**ynamik (**QCD**)



Kurzer Überblick: Das Potential der QCD



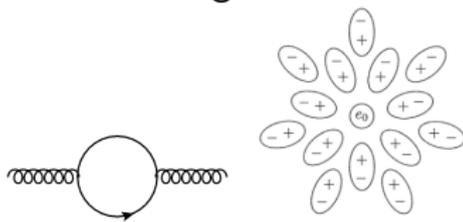
elektromagnetische Kraft

starke Kraft

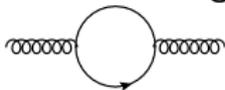
Freie Quarks sind nicht beobachtbar!

Kurzer Überblick: Durch Quantenfluktuationen sind Kopplungskonstanten nicht konstant

Abschirmung durch Elektronen



Abschirmung durch Quarks



Anti-Abschirmung durch Gluonen



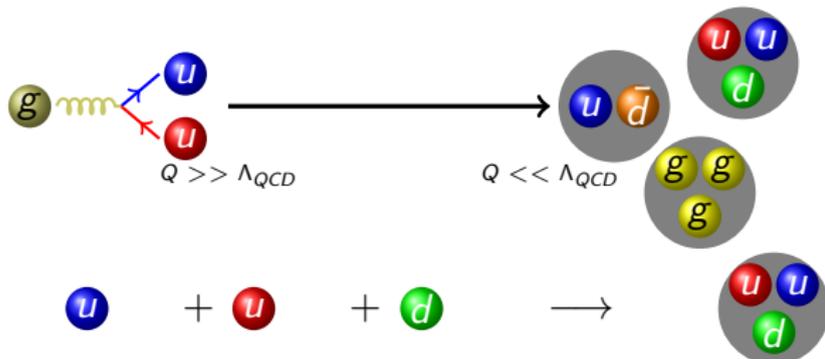
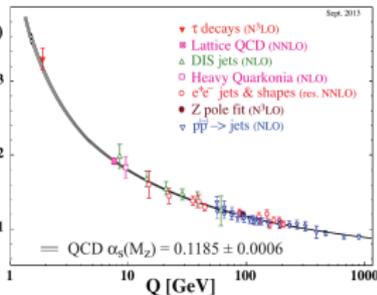
elektromagnetische Kraft

starke Kraft

Die Kopplungskonstante ist abhängig von der Skala bei der man sie betrachtet.

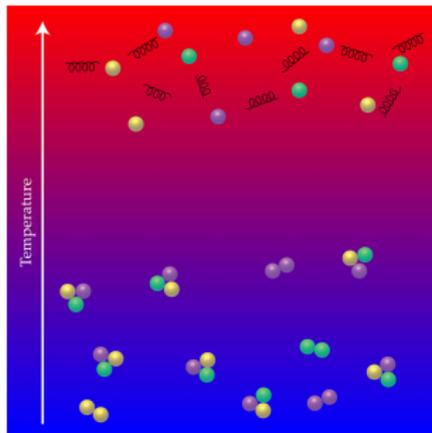
Kurzer Überblick: Skalenabhängigkeit der starken Wechselwirkung

- hohe Energien: asymptotische Freiheit
 - schwach gekoppelte Quarks und Gluonen
 - Störungstheorie anwendbar
- niedrige Energien: Confinement
 - stark gebundene Zustände von Quarks und Gluonen
 - effektive Theorie von Hadronen



[K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014).]

Kurzer Überblick: Phasenübergänge in der QCD



- hohe Temperaturen: freies Gas von Quarks und Gluonen
- niedrige Temperaturen: Gas von Hadronen
- Phasenübergang: Deconfinement, Fermion-Kondensation

[APS/Joan Tycko]

Kurzer Überblick: Lehren aus der Theorie der starken Wechselwirkung (Frank Wilczek, Nobel Lecture)

Paradoxien:

- ① „Quarks are Born Free, but Everywhere They are in Chains “
- ② „Special Relativity and Quantum Mechanics Both Work “

Paradigmen:

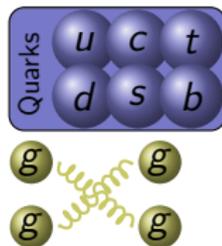
- ① „The Hard Reality of Quarks and Gluons “
- ② „Mass Comes from Energy “
- ③ „The Early Universe was Simple “
- ④ „Symmetry Rules “

Kurzer Überblick: Quantenchromodynamik

Wirkung der Quantenchromodynamik:

$$S_{\text{QCD}} = \int d^4x \left[\sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (i\gamma_\mu (\partial_\mu + igA_\mu) + m_f) \psi_f - \frac{1}{4} \text{Tr}\{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} \right],$$

- N_f Quarks: up, down, strange, charm, top, bottom
- Gluon-Feld: A_μ (tragen Farbladung)
- Farb-Feldstärke
 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$
- rein gluonischer Anteil: Yang-Mills-Theorie



Grundlagen: Eichprinzip

$O(N_c)$ -Modell mit komplexem Vektor-Feld ϕ , Lagrangedichte \mathcal{L}

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger \cdot (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \cdot \phi$$

- Globale Invarianz: $\phi \rightarrow \phi' = \Omega \phi$, $\Omega^\dagger \Omega = 1$
($N_c = 1$: $\Omega = e^{i\alpha}$, $U(1)$)
- Lokale Transformationen: $\Omega = \Omega(x)$ ($\alpha = \alpha(x)$)
 \Rightarrow Ableitungsterme nicht invariant:
 $\partial_\mu \Omega(x) \phi(x) = \Omega(\partial_\mu + i(\partial_\mu \alpha(x))) \phi(x)$
- Minimale Erweiterung zur kovarianten Ableitung:
 $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$; $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$
 $\Rightarrow (D_\mu \phi) \cdot (D^\mu \phi)$ invariant

Grundlagen: Eichprinzip

A_μ transformiert wie Maxwell-Feld unter Eichtransformationen in der Elektrodynamik, füge Maxwell-Term für die Dynamik des Feldes hinzu (Feldstärke-Tensor: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$)

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger \cdot (D^\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \cdot \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Verallgemeinerung: $SU(N_c)$: $\Omega^\dagger \Omega = 1$, $\det(\Omega) = 1$

- kovariante Ableitung: $D'_\mu \Omega \phi = (\partial_\mu + iA'_\mu) \Omega \phi = \Omega D_\mu \phi$
- Eichtransformation: $A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} + i(\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}$

⇒ Invarianz von $(D_\mu \phi)^\dagger \cdot (D^\mu \phi)$

Eichtheorie im Kontinuum

- Eichfeld A_μ , Verallgemeinerung des Maxwell-Felds, hermitesche Matrix mit $\text{tr} A_\mu = 0$
- Eichfeld Element der Algebra der Eichgruppe $SU(N_c)$

$$A_\mu = \sum_i A_\mu^i T_i; \quad [T_i, T_j] = if_{ijk} T_k; \quad \text{tr}[T_i T_j] = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

$$SU(2) : \quad T_i = \frac{1}{2} \sigma_i; \quad SU(3) : \quad T_i = \frac{1}{2} \lambda_i;$$

(T_k Generatoren von $SU(N_c)$, f_{ijk} Strukturkonstanten von $SU(N_c)$, σ_i Pauli-Matrizen, λ_i Gell-Mann-Matrizen)

Yang-Mills-Theorie

- Reiner Eichtheorie-Anteil der Wirkung

$$S_g = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \quad \text{tr}[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = \frac{1}{4g^2} \int d^4x \quad F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i$$

$$F_{\mu\nu} = -i[D_\mu(x), D_\nu(x)] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu, A_\nu]$$

$$F'_{\mu\nu} = \Omega^\dagger F_{\mu\nu} \Omega$$

- wichtiger Unterschied zur Elektrodynamik:
Selbst-Wechselwirkung des Eich-Feldes
- Elektrodynamik: Eich-Gruppe $U(1)$, $[A_\mu, A_\nu] = 0$
- Yang-Mills-Theorie (Eich-Gruppe $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(N_c)$):
 $[A_\mu, A_\nu] \neq 0$
- Konventionen in Störungstheorie: $A_\mu \rightarrow \frac{A_\mu}{g}$, $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$

Kopplung an Materie

- Kopplung an Skalarfeld:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger \cdot (D^\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \cdot \phi + \frac{1}{2g^2} \text{tr}[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}]$$

- Kopplung an Fermionen (Quarks)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi + \frac{1}{2g^2} \text{tr}[F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}]$$

- Transformation: $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}\Omega^\dagger$, $\psi \rightarrow \Omega\psi$

QFT Pfadintegral

Analog zur QM, Quantisierung der relativistischen Feldtheorie (siehe QFT-Literatur)

$$\langle 0 | \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x) \phi(y) \exp(iS[\phi]/\hbar)$$

4dim Raum (x, y) , Zeitordnung \mathcal{T} , $\hbar = 1$

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi]/\hbar)$$

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\phi^\dagger(x) \cdot (-\partial^2 - m^2)\phi(x) + V(\phi(x)) \right]$$

Formuliert als Ergebnisse von Grenzwertprozessen:

- $\lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)}$ für $S = \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}$
- Analog QM, Trotter: $\lim_{N \rightarrow \infty}$ für $\int \prod_k^N \phi_k$, N Zeit-Intervalle T/N

QFT Pfadintegral auf dem Gitter

Idee: Pfad-Integral-Maß approximieren durch große Zahl von Integrationen

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{x \in \Lambda} d\phi(x)$$

vierdimensionales Gitter Λ mit Gitterabstand a ,

$$\{x = an^\mu e_\mu | n_\mu \in \mathbb{Z}\}$$

Weitere Schritte:

- Wick-Rotation ($t = x^{(0)}$):
 $e^{iS} \rightarrow e^{-S_E}$ vergleichbar $e^{-\beta H}$
- Ableitungs-Operatoren werden diskrete Differenzen ($\hat{\mu} = ae_\mu$):

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \nabla_\mu \phi = \frac{\phi(x+\hat{\mu}) - \phi(x)}{a}$$

Diskretisierte Wirkung:

$$S = \sum_{x \in \Lambda} a^4 \left((\nabla_\mu \phi)^\dagger \cdot \nabla^\mu \phi + m^2 \phi^\dagger \cdot \phi \right)$$

Eichinvarianz auf dem Gitter

- Diskrete Ableitungen verbinden lokale Transformationen an unterschiedlichen Punkten ($\phi'(x + \hat{\mu}) = \Omega(x + \hat{\mu})\phi(x + \hat{\mu})$), dies ergibt keine Invarianz ($\Omega^{-1}(x)\Omega(x + \hat{\mu})$).
- Eichtransport entlang Pfad C zwischen x und y

$$U(x, y, C) = \mathcal{P} \exp \left(i \int_{C_{xy}} A \cdot ds \right) \in \text{SU}(N_c)$$

Pfad-Ordnung \mathcal{P}

- Zusammenfügung der Pfade C_1 und C_2 bei z zu C :
 $U(x, y, C) = U(x, z, C_1)U(z, y, C_2)$
- Transformation: $U'(x, y, C) = \Omega(x)U(x, y, C)\Omega^{-1}(y)$
- Invariante Produkte: $\phi^\dagger(x)U(x, y, C)\phi(y)$

Eichfelder auf dem Gitter

Gitter-Diskretisierung: elementare Eichtransporter auf den "Links" des Gitters

- Link-Variablen: $U_\mu(x) = U(x, x + \hat{\mu})$ auf Verbindungslinie der Gitterpunkte
- Rückwärts-Transporter: $U(y, x) = U(x, y)^{-1}$,
 $U_{-\mu}(x) = U^\dagger(x - \hat{\mu})$
- allgemeine Pfade können durch Produkte von Link-Variablen approximiert werden $U(x, y, C) = \prod_{(x,y) \in C} U_\mu(x)$
- Verbindung zu A_μ :
 $U_\mu(x) = \exp(iaA_\mu(x)) = 1 + iaA_\mu(x) + O(a^2)$

Eichinvariante Terme auf dem Gitter

Kovariante Ableitungen:

$$D_\mu \phi(x) = \frac{1}{a} (U_\mu(x) \phi(x + \hat{\mu}) - \phi(x))$$

Eichinvariante Wirkung:

$$S = \sum_{x \in \Lambda} a^4 \left((D_\mu \phi)^\dagger \cdot D^\mu \phi + \dots \right)$$

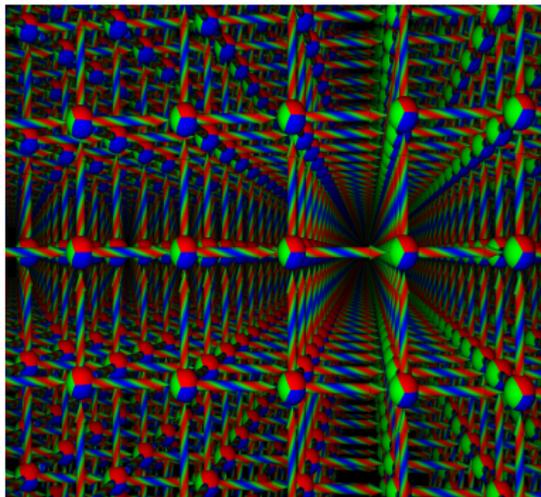
Allgemein (C verbindet x, y):

$$\phi^\dagger(x) \prod_{(z, \mu) \in C} U_\mu(z) \phi(y)$$

Reine Eichfeld-Objekte (C geschlossen, x nach x):

$$L[U] = \text{tr} \left[\prod_{(z, \mu) \in C} U_\mu(z) \right]; \quad L[U'] = \text{tr} \left[\Omega(x) \prod_{(z, \mu) \in C} U_\mu(z) \Omega^{-1}(x) \right] = L[U]$$

QCD auf dem Gitter



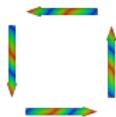
Eichfelder

$$A_\mu \rightarrow e^{igaA_\mu} = U_\mu: \text{--->}$$

Materiefelder ψ, ϕ : 

Wilson-Eichwirkung

Einfachster geschlossener Pfad: elementare Plaquette



$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_{-\mu}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(x + \hat{\nu})$$

Invariante Eichwirkung:

$$S_G[U] = \frac{2}{g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr} (1 - U_{\mu\nu}(x))$$

Entwicklung von Plaquette

$$U_{\mu\nu}(x) = e^{iaA_\mu(x)} e^{iaA_\nu(x+\hat{\mu})} e^{-iaA_\mu(x+\hat{\nu})} e^{-iaA_\nu(x)}$$

mit Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots\right)$$

Entwicklung der Plaquette

$$\begin{aligned}U_{\mu\nu}(x) &= \exp \left(iaA_\mu + iaA_\nu(x + \hat{\mu}) - iaA_\mu(x + \hat{\nu}) - iaA_\nu(x) \right. \\ &\quad - \frac{a^2}{2} [A_\mu(x), A_\nu(x + \hat{\mu})] + \frac{a^2}{2} [A_\mu(x), A_\mu(x + \hat{\nu})] \\ &\quad + \frac{a^2}{2} [A_\mu(x), A_\nu(x)] + \frac{a^2}{2} [A_\nu(x + \hat{\mu}), A_\mu(x + \hat{\nu})] \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2} [A_\nu(x + \hat{\mu}), A_\nu(x)] - \frac{a^2}{2} [A_\mu(x + \hat{\nu}), A_\nu(x)] + O(a^3) \right)\end{aligned}$$

Ableitungen: $A_\nu(x + \hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\partial_\mu A_\nu(x) + O(a^2)$

$$\begin{aligned}U_{\mu\nu}(x) &= \exp \left(ia^2(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)]) + O(a^3) \right) \\ &= \exp \left(ia^2 F_{\mu\nu} + O(a^3) \right)\end{aligned}$$

Entwicklung der Wilson-Wirkung

$$S_G[U] = \frac{a^4}{2g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + O(a^2)$$

Weitere Eigenschaften

$$\text{tr}[U_{\mu\nu}]^\dagger = \text{tr}[U_{\mu\nu}^\dagger] = \text{tr}[U_{\nu\mu}]$$

Allgemeine Form ($SU(N_c)$)

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N_c} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr} (1 - U_{\mu\nu}(x)); \quad \beta = \frac{2N_c}{g^2}$$

Das Pfadintegral der Gitter-Eichtheorie

Eichinvariante Erwartungswerte:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \mathcal{O}[U] e^{-S_G[U]}$$

Es ist keine Eichfixierung nötig wie in der Störungstheorie!
Integrationsmaß dU , Haar-Maß:

- Invarianz: $dU = d(UV) = d(VU)$ für alle $V \in$ Gruppe
- Normierung: $\int dU 1 = 1$

Bsp.:

- U(1): $U_\mu(x) = e^{i\alpha_\mu(x)}$ Integration über Kreis
- SU(2): Integration über 3-Sphäre (Übungen)