Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Wintersemester 2018/19

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 12

Aufgabe 36: Zustandssumme und Fluktuationen 2+1 = 3 Punkte

1) Beweisen Sie folgende Beziehungen ($\alpha = -\beta\mu$, $z = \exp(\beta\mu)$):

$$z\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial z}\log Z_{\beta,\mu} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\log Z_{\beta,\mu} = \langle\hat{N}^2\rangle - \langle\hat{N}\rangle^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\log Z_{\beta,\mu} = \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2$$

2) Berechne damit die Fluktuationen $\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2$ für identische Bosonen/Fermionen deren großkanonische Zustandssumme gegeben ist durch

$$\log Z_{\beta,\mu} = \mp\sum_i \log\left(1 \mp \mathrm{e}^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right)$$

Aufgabe 37: Phononen als Quantengas 2+1+3 = 6 Punkte

Wir betrachten Schwingungen der Frequenz ω in einem Gitter mit N Atomen. Diese Schwingungen sind bosonische Zustände, die Phononen genannt werden. Die Energie pro Schwingung ist $\epsilon_i = \hbar\omega\left(\mathcal{N}_i + \frac{1}{2}\right)$, wobei $\mathcal{N}_i$ der Anzahl der angeregten Phononen der Frequenz ω entspricht. Die Dispersionsrelation darf als $\omega = c\,|\mathbf{p}|$, angenommen werden. Ein wichtiges Model für dieses System ist das Debye-Modell. Es beschreibt, dass die Phononen alle Frequenzen bis zu einer maximalen Frequenz ω_D annehmen können. Berechnen Sie für dieses Model

a) die Zustandsdichte $D(\omega)$ für Phononen,

b) die allgemeine Form (Integraldarstellung) der inneren Energie,

c) die Wärmekapazität für kleine und große Temperaturen aus der inneren Energie.

Hinweise:

- Die Teilchenzahl der Phononen ist fest, somit benötigt man die kanonische Zustandssumme. Die mittlere Teilchenzahl pro Schwingung ist dann $\overline{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$
- Nutzen Sie die geometrische Reihe, sowie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Bitte wenden

Aufgabe 38: Dampfdruck von Metallen 4+2 = 6 Punkte

Wir betrachten ein Metall, das den Halbraum $z \leq 0$ erfüllt. Die darin enthaltenen Metallelektronen nehmen wir als nicht-wechselwirkend an. Sie befinden sich näherungsweise in einem Potentialtopf, der um ϕ_0 tiefer liegt als der Außenraum bei $z > 0$. Bei $T > 0$ werden die Elektronen thermisch angeregt, aus dem Metall in den Halbraum $z > 0$ austreten und dort eine Dampfphase bilden, die mit den Metallelektronen im Gleichgewicht ist. Im Gleichgewicht zwischen Metall und Dampf ist die Austrittsstromdichte gleich der Zahl der Elektronen, die pro Zeit- und Flächeneinheit aus der Dampfphase auf die Metalloberfläche auftreffen. Reflexion werde hierbei vernachlässigt.

a) Bestimmen Sie die Dampfdichte und den Dampfdruck der Elektronen (Ladung $-e$) für $kT \ll \mu$ und $kT \ll \phi$, wobei für das chemische Potential $\mu + \phi = \phi_0$ gelte. Stellen Sie dazu ausgehend vom Hamilton-Operator, $\hat{H} = \varepsilon + \phi_0$ für Elektronen in der Gasphase mit der üblichen kinetischen Energie ε, die Zustandssumme Z für diesen Grenzfall auf. Daraus können Sie anschließend das großkanonische Potential J, die Dampfdichte $\langle n \rangle = \frac{\langle N \rangle}{V}$ und den Dampfdruck p bestimmen.

b) Berechnen Sie in diesem Kontext die Elektronenstromdichte $j = -e\langle v_z \rangle \langle n \rangle$ aus dem Metall. Dafür wird die Anzahl der Elektronen mit positiver Impulskomponente p_z benötigt. Führen Sie dazu sphärische Impulskoordinaten ein, deren Polachse senkrecht von der Matalloberfläche zu positiven z zeigt.

Hinweis: Beachten Sie, dass Elektronen Fermionen sind und somit das Pauli-Prinzip erfüllen müssen.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Mittwoch, den 30.01.2019