

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Supersymmetrische Quantenmechanik in höheren Dimensionen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Bachelor of Science im Studiengang Physik

1. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf
2. Gutachter: Dr. Lukas Janssen

Vorgelegt von: Matthias Warschinke
Matrikelnr.: 120412
Geboren am: 28.05.1991, Weimar
Vorgelegt am: 30. September 2013

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **2**

1 Relativistische Quantenmechanik **3**

 1.1 Der relativistische Hamiltonian 3

 1.2 Übertragungsprinzipien 5

 1.2.1 Der Schrödinger-Ansatz 5

 1.2.2 Der Dirac'sche Ansatz 6

2 Grundkonzepte der Supersymmetrie **9**

 2.1 Fermionische Auf- und Absteigeoperatoren (Ψ_k^\dagger, Ψ_k) 9

 2.2 Der Dirac-Operator als Funktion der Ψ_k und Ψ_k^\dagger 10

 2.3 Die Superladung 11

 2.4 Eigenschaften der Superladung 12

3 Supersymmetrische Systeme in zwei Dimensionen **15**

4 Das Coulomb-Problem in zwei Dimensionen **17**

 4.1 „Klassisch“ quantenmechanischer Zugang 17

 4.2 Supersymmetrischer Zugang 18

 4.2.1 Gebundene Zustände in \mathcal{H}_0 19

 4.2.2 Gebundene Zustände in \mathcal{H}_1 20

 4.2.3 Streuzustände 21

5 Radialsymmetrische Potentiale in drei Dimensionen **22**

 5.1 Vorbetrachtungen 22

 5.2 Das Morse-Potential 24

 5.2.1 Gebundene Vibrations - Zustände in \mathcal{H}_3 25

 5.2.2 Gebundene Vibrations - Rotations - Zustände in \mathcal{H}_3 27

 5.2.3 Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0 29

 5.3 Das modifizierte Pöschl -Teller - Potential 30

 5.3.1 Gebundene Vibrations - Zustände in \mathcal{H}_3 31

 5.3.2 Gebundene Vibrations - Rotations - Zustände in \mathcal{H}_3 33

 5.3.3 Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0 36

6 Zusammenfassung **37**

7 Anhang **38**

0 Einleitung

Symmetrien spielen eine zentrale Rolle in der theoretischen Physik. Im Rahmen der Teilchenphysik vermutet man beispielsweise, dass sie eine vollständige Klassifikation aller existierenden Teilchen ermöglichen. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Poincaré - Gruppe, welche Rotationen und Translationen in der vierdimensionalen Raumzeit erzeugt. Daneben gibt es noch die sogenannten „inneren“ Symmetrien einer Theorie, wie zum Beispiel die Farbladung als Symmetrie in der Quantenchromodynamik. In der Vergangenheit wurde nun versucht, eine übergeordnete Symmetrie zu finden, bzw. beide Symmetriegruppen zu vereinheitlichen. Am Ende dieser Versuche stand das Coleman-Mandula-Theorem, welches besagte, dass in jeder Quantenfeldtheorie unter den üblichen physikalisch sinnvollen Annahmen wie Lokalität und Kausalität eine Kombination von Poincaré - Gruppe und innerer Symmetriegruppe nur trivial (das heißt das direkte Produkt beider Gruppen) sein kann. Das Problem wurde nun wie folgt gelöst: Bisher erfüllten die Generatoren der Poincaré - Gruppe bestimmte Kommutator-Relationen, welchen mit Hilfe des Noether-Theorems verschiedene physikalische Erhaltungsgrößen zugeordnet wurden. Lässt man jedoch auch Generatoren sogenannter supersymmetrischer Transformationen zu, welche Bosonen in Fermionen transformieren und umgekehrt und die bestimmten Antikommutator-Relationen gehorchen, so gelingt eine nichttriviale Vereinheitlichung von Poincaré - Gruppe und innerer Symmetriegruppe. Die so erhaltene Symmetrie ist die Supersymmetrie und die große Neuerung bestand eben in jenen Transformationen zwischen Fermionen (Materie) und Bosonen (Träger der Kräfte) [15].

Auch wenn bisher noch kein experimenteller Beweis für die Supersymmetrie gefunden werden konnte lohnt es sich durchaus, weitere Forschung auf diesem Gebiet zu betreiben. So könnten beispielsweise die neuen, theoretisch vorhergesagten Teilchen Kandidaten für die Bestandteile der dunklen Materie sein. Auch werden in supersymmetrischen Theorien die Ultraviolett-Divergenzen abgeschwächt, sodass auf das Konzept der Renormierung verzichtet werden kann. Sogar für die String-Theorie als möglichen Kandidaten zur Beschreibung der Quantengravitation scheint die Supersymmetrie notwendig zur Gewährleistung eines stabilen Vakuums. Dies sind nur einige Argumente die für eine Auseinandersetzung mit supersymmetrischen Theorien sprechen und nicht zuletzt sind supersymmetrische Systeme eben aufgrund ihrer hohen Symmetrie meist leichter analytisch zu lösen, als ihre nicht-symmetrischen Verwandten [12].

Im Rahmen dieser Bachelor-Arbeit soll der Supersymmetrie-Formalismus statt im Kontext der Quantenfeldtheorie vor dem Hintergrund der relativistischen Quantenmechanik betrachtet werden. Ausgangspunkt ist dabei die Dirac-Gleichung, wobei gezeigt wird, dass der Dirac-Operator als Summe eines Symmetrie-Operators, häufig als Superladung bezeichnet, und dessen adjungierten Operator geschrieben werden kann. Unter bestimmten Voraussetzungen verschwindet das Quadrat der Superladung und der Klein-Gordon-Operator (im Kontext der Supersymmetrie auch als Super-Hamiltonian bezeichnet) ist im Wesentlichen als Antikommutator der Superladung und ihrer Adjungierten gegeben. Der Klein-Gordon-Operator besitzt dann Blockgestalt, wobei die Superladung zwischen den Unterräumen vermittelt. Der Symmetrieoperator verbindet demnach in der Sprache der Quantenmechanik nicht mehr bosonische und fermionische Zustände, sondern vermittelt zwischen den Unterräumen des Super-Hamiltonians. Durch diesen Umstand ist es möglich, Beziehungen zwischen den Spektren der Operatoren in den einzelnen Unterräumen anzugeben.

Ziel des ersten Abschnittes dieser Arbeit ist es, die Dirac-Gleichung zu motivieren und anschließend das Konzept der Supersymmetrie inklusive der algebraischen Strukturen in beliebig hohen, geraden Dimensionen einzuführen und die Beziehungen zwischen den auftretenden Größen zu erläutern. Anschließend soll die Wirkungsweise des Formalismus anhand einiger radialsymmetrischer Probleme in zwei und drei Dimensionen genauer beleuchtet werden.

1 Relativistische Quantenmechanik

Im Rahmen dieses Abschnittes soll anhand der Ausführungen in [1] eine relativistische Form der Hamilton-Funktion sowie Ansätze für die Quantisierungsvorschriften erläutert werden. Wir beschränken uns dabei auf eine flache Raumzeit und das Einkörperproblem. Mit griechischen Indices werden im Folgenden die ersten drei (raumartigen) Raumzeit-Koordinaten bezeichnet, Summation über lateinische Buchstaben meint die Summation über alle vier Koordinaten.

1.1 Der relativistische Hamiltonian

Wir führen zunächst die Vierervektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ ict \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ i\frac{E}{c} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \vec{p} \\ i\frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

ein¹ und nehmen nach Vorbild der kanonischen Gleichungen ein Gleichungssystem der Form

$$\frac{\partial K}{\partial x^i} = -\frac{dp_i}{ds}, \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{dx^i}{ds} \quad (1.2)$$

mit $K = K(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ als Ausgangspunkt. Anhand dieser Forderungen folgt natürlich auch unmittelbar $\frac{dK}{ds} = 0$.

Für den Parameter s wählen wir nun zunächst die Eigenzeit τ , das heißt es gilt

$$-c^2 d\tau^2 = \sum_i (dx^i)^2 \text{ bzw.} \quad (1.3)$$

$$-c^2 = \sum_i \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)^2 \stackrel{\text{Gleichung 1.2}}{=} \sum_i \left(\frac{\partial K}{\partial p_i} \right)^2. \quad (1.4)$$

Die Gleichung 1.4 wird durch

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = c \sqrt{-\sum_i (p_i - f_i(\mathbf{x}))^2} \quad (1.5)$$

gelöst, wobei die f^i beliebige Funktionen in \mathbf{x} sein können, mit der einzigen Forderung, dass \mathbf{f} ein Vierervektor ist. Setzen wir nun Gleichung 1.5 in Gleichung 1.2 ein, so erhalten wir

$$\frac{dx^i}{d\tau} = -\frac{c^2}{K}(p_i - f_i), \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{c^2}{K} \sum_k (p_k - f_k) \frac{\partial f_k}{\partial x^i}. \quad (1.6)$$

Die Eliminierung der Impulse aus diesen beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\frac{K}{c^2} \frac{dx^i}{d\tau} + f_i \right) = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\tau}. \quad (1.7)$$

¹beachte: $p_\mu = \gamma m v^\mu$; $\mu = 1, 2, 3$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und v^μ Dreiergeschwindigkeit

Wir führen die Vierergeschwindigkeit $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ ein und benutzen $\frac{dK}{ds} = 0$:

$$\frac{K}{c^2} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{df_i}{d\tau} - \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x^i} u^k \quad (1.8)$$

$$\text{(wegen } \frac{df_i}{d\tau} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x^k} u^k) = \sum_k u^k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \right). \quad (1.9)$$

Die Definition von $\frac{K}{c^2} = m$ führt schließlich auf die Form

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \sum_k u^k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^i} \right). \quad (1.10)$$

Interpretiert man diese Gleichung als Bewegungsgleichung eines Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld, so identifizieren wir $f_i = \frac{e}{c} A_i$ und erhalten mit dem Energie-Impuls-Tensor $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ die bekannte Bewegungsgleichung

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} \sum_k u^k F_{ki}. \quad (1.11)$$

Interessanter ist es nun aber, das Problem nicht in der Eigenzeit τ des Teilchens zu formulieren, sondern in der Beobachterzeit t . Wir wählen daher $s = t = -\frac{i}{c} x^4$. Analog zu oben sei unsere Funktion K wieder konstant, wir nennen die Konstante mc^2 . Wir wollen nun die vierte Komponente des Viererimpulses auszeichnen und mit Hilfe von Gleichung 1.5 als Funktion der anderen Variablen auffassen:

$$p_4 = f_4 + \sqrt{\left(-\sum_{\mu} (p_{\mu} - f_{\mu})^2 - (mc)^2\right)}. \quad (1.12)$$

Da $K = \text{const}$ folgt nun

$$\frac{\partial K}{\partial p_{\mu}} dp_{\mu} + \frac{\partial K}{\partial p_4} dp_4 = 0 \quad (1.13)$$

und

$$\frac{\partial K}{\partial x_{\mu}} dx_{\mu} + \frac{\partial K}{\partial p_4} dp_4 = 0. \quad (1.14)$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\partial p_4}{\partial p_{\mu}} \stackrel{\text{Gleichung 1.13}}{=} -\frac{\frac{\partial K}{\partial p_{\mu}}}{\frac{\partial K}{\partial p_4}} \stackrel{\text{Gleichung 1.2}}{=} -\frac{dx^{\mu}}{dx^4} = \frac{i}{c} \frac{dx^{\mu}}{dt}. \quad (1.15)$$

Analog erhält man mit Hilfe von Gleichung 1.14 und Gleichung 1.2

$$\frac{\partial p_4}{\partial x^{\mu}} = -\frac{i}{c} \frac{dp_{\mu}}{dt}. \quad (1.16)$$

Wenn wir jetzt noch $H(x^{\mu}, p_{\mu}, t) = -icp_4$ definieren und Hamilton-Funktion nennen, dann haben wir wegen Gleichung 1.15 und Gleichung 1.16 wieder ein kanonisches System

$$\frac{dx^{\mu}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}, \quad \frac{dp_{\mu}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^{\mu}}. \quad (1.17)$$

Für die Hamilton-Funktion gilt damit

$$H = -icp_4 = -icf_4 + c \sqrt{\sum_{\mu} (p_{\mu} - f_{\mu})^2 + (mc)^2} \quad (1.18)$$

und indem wir ein Viererpotential definieren als $(\vec{A}, i\Phi)$ erhalten wir

$$H = e\Phi + c \sqrt{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + m^2c^2}. \quad (1.19)$$

Diese Gleichung wird nun im Folgenden Ausgangspunkt für die Übertragung in die Quantentheorie sein.

1.2 Übertragungsprinzipien

Wollte man analog zum nichtrelativistischen Fall die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (1.20)$$

durch die Ersetzung $p_{\mu} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ gewinnen, so stünde man gemäß der oben hergeleiteten Gleichung vor dem Problem, die Wurzel aus einem Differentialoperator ziehen zu müssen. Wie dennoch eine korrekte Quantisierung erfolgen kann, soll im folgenden Abschnitt erläutert werden.

1.2.1 Der Schrödinger-Ansatz

Wir definieren zunächst die Operatoren

$$T = c \sqrt{\sum_{\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right)^2 + m^2c^2}, \quad S = -e\Phi - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.21)$$

Dann können wir Gleichung 1.20 schreiben als $T\Psi = S\Psi$. Erneutes Anwenden von T und Addition einer aktiven Null auf der rechten Seite führt auf

$$\begin{aligned} T^2\Psi &= TS\Psi - ST\Psi + ST\Psi = (TS - ST)\Psi + S^2\Psi \quad \text{und damit} \\ (T^2 - S^2)\Psi &= (TS - ST)\Psi. \end{aligned}$$

Durch eine längere Rechnung kann man zeigen, dass der Kommutator $[T, S]$ außer im kräftefreien Fall im Allgemeinen nicht verschwindet. Schrödinger setzte ihn jedoch willkürlich Null und erhielt so eine Differentialgleichung, die nur noch von T^2 und S^2 abhing. Damit war die Wurzel eliminiert und mit der Ersetzung $p_{\mu} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ erhielt er

$$\begin{aligned} \Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \left(\vec{A} \text{grad} \Psi + \frac{1}{c} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \\ - \frac{ie}{\hbar c} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Psi - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\vec{A}^2 - \Phi^2) \Psi = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Die Gleichung 1.22 wird als Klein-Gordon-Gleichung bezeichnet und geht im kräftefreien Fall über in

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \kappa^2\Psi = 0, \quad \kappa = \frac{mc}{\hbar}, \quad (1.23)$$

deren Lösungen gegeben sind durch

$$\Psi_k(\mathbf{r}, t) = A_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir die Dispersionsbeziehung

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2 + \kappa^2.$$

Die Anwendung des Impulsoperators und des Energieoperators führt auf

$$\begin{aligned} \hat{p}\Psi_k &= \frac{\hbar}{i} \text{grad} \Psi = \hbar\vec{k}\Psi_k \\ E\Psi &= -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi_k}{\partial t} = \hbar\omega\Psi_k \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die bekannten quantenmechanischen Relationen $E = \hbar\omega$ und $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Zusammen mit der Dispersionsrelation führt dies auf den relativistischen Energiesatz

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = p^2 + (mc)^2. \quad (1.24)$$

1.2.2 Der Dirac'sche Ansatz

Ein Charakteristikum lorentzinvarianter Theorien ist die Symmetrie in den vier Raumzeitkoordinaten. In obiger Klein-Gordon-Gleichung stehen jeweils Ableitungen zweiter Ordnung in den vier Koordinaten, das Symmetrie-Kriterium ist demnach erfüllt. Der Gedanke Diracs war es nun, die Theorie auf Grundlage erster Ableitungen nach den Koordinaten zu entwickeln. Soll der Hamilton-Operator nur von den in Gleichung 1.19 auftauchenden, klassischen Größen \vec{A} , Φ und \vec{p} abhängen, so kann er unter Einführung der Größe $\vec{\pi} = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$ nur die Form

$$H = c \sum_{\mu=1}^3 \alpha_{\mu} \pi_{\mu} + \beta mc^2 + e\Phi, \quad (1.25)$$

mit den Konstanten β und α_{μ} haben. Wir wollen nun untersuchen, welchen Bedingungen die Koeffizienten genügen müssen, um obige Ergebnisse zurückzuerhalten.

Wir betrachten zunächst den kräftefreien Fall, das heißt die Differentialgleichung

$$\left(c \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \beta mc^2\right)\Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

beziehungsweise wenn man als Lösung wieder ebene Wellen der Form $\Psi_k(\mathbf{r}, t) = A_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ annimmt

$$(\hbar c \sum_{\mu} \alpha_{\mu} k_{\mu} + \beta mc^2 - \hbar\omega)\Psi_k = 0.$$

Würde man jetzt naiv versuchen, die Klammer Null zu setzen, so erhielte man eine lineare Beziehung zwischen $|\vec{k}|$ und ω und damit auch zwischen $|\vec{p}|$ und E . Das steht aber in offensichtlichem Widerspruch zur experimentellen Erfahrung. Aus diesem Grund interpretierte Dirac die Klammer nicht als Skalar, sondern als Operator, der angewendet auf Ψ_k Null ergeben muss. Da die Klammer keine Differentialoperatoren mehr enthält und die Exponentialfunktion in Ψ_k immer verschieden von Null ist nehmen wir an, der Operator wirke nur auf die Amplitude A_k . Dann erhalten wir mit den Abkürzungen $\Omega = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} k_{\mu} + \beta \kappa$, $\kappa = \frac{mc}{\hbar}$ die algebraische Eigenwertgleichung

$$\Omega A_k = \frac{\omega}{c} A_k.$$

Erneutes Anwenden von Ω führt dann auf

$$\Omega^2 A_k = \frac{\omega^2}{c^2} A_k.$$

Entsprechend der Dispersionsrelation (Gleichung 1.24) müssten wir also $\Omega^2 = \vec{k}^2 + \kappa^2$ fordern. Das Quadrat des Operators müsste demnach ein Skalar sein. Gemäß Definition gilt andererseits

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} k_{\mu} k_{\nu} (\alpha_{\mu} \alpha_{\nu} + \alpha_{\nu} \alpha_{\mu}) + \kappa \sum_{\mu} k_{\mu} (\beta \alpha_{\mu} + \alpha_{\mu} \beta) + \beta^2 \kappa^2 \stackrel{!}{=} \vec{k}^2 + \kappa^2$$

Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass

$$\alpha_{\mu} \alpha_{\nu} + \alpha_{\nu} \alpha_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \beta \alpha_{\mu} + \alpha_{\mu} \beta = 0, \quad \beta^2 = 1 \quad (1.26)$$

gilt. Die erste Bedingung impliziert insbesondere auch $\alpha_k^2 = 1$. Führen wir nun den Vierervektor $(\vec{\pi}, \pi_4)$ mit $\pi_4 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{e}{c} A_4 = \frac{i}{c} \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)$ ein, so können wir jetzt wieder unter Berücksichtigung äußerer Felder

$$H\Psi = \left(c \sum_{\mu=1}^3 \alpha_{\mu} \pi_{\mu} + \beta mc^2 + e\Phi \right) \Psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

schreiben als

$$\left(c \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \pi_{\mu} + \beta mc^2 + i\pi_4 c \right) \Psi = 0.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit $\frac{\beta}{\hbar c}$ und erhalten unter Ausnutzung von $\beta^2 = 1$

$$\left(\sum_{\mu} \beta \alpha_{\mu} \frac{\pi_{\mu}}{\hbar} + \frac{i}{\hbar} \beta \pi_4 + \kappa \right) \Psi = 0.$$

Führen wir die Größen $\gamma_4 = \beta$ und $\gamma_i = -i\beta\alpha_i$ ein, so lässt sich diese Gleichung geschlossen schreiben als

$$\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^4 \gamma_k \pi_k + \kappa \right) \Psi = 0 \quad (1.27)$$

oder

$$\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^4 \gamma_k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{ie}{\hbar c} A_k \right) + \kappa \right) \Psi = 0. \quad (1.28)$$

Die Bedingungen in Gleichung 1.26 übersetzen sich geschlossen zu

$$\gamma_i \gamma_l + \gamma_l \gamma_i = 2\delta_{il}; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.29)$$

Diese Beziehungen werden auch als Kanonische Antivertauschungsregeln bezeichnet. Die Algebra dieser Objekte heißt Clifford-Algebra, bzw. in unserem Fall aufgrund der komplexen Zeitkomponente $x_4 = ict$, Komplexifizierung der Clifford-Algebra über dem Quadratischen Raum (\mathbb{R}^4, q) , mit der quadratischen Form q , deren Signatur gegeben ist durch $(4, 0, 0)$. In Zeichen schreiben wir \mathcal{Cl}_4 .

Aus den kanonischen Antivertauschungsregeln folgt auch, dass falls γ_k die Algebra erfüllen, auch $\tilde{\gamma}_k = U^{-1}\gamma_k U$ mit unitärem U die Algebra erfüllen. Ein System, welches obiger Algebra genügt, ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung wird als Dirac- oder auch Standarddarstellung bezeichnet. Die Wellenfunktion Ψ ist demzufolge vier-komponentig, das Gleichungssystem welches sich aus der Dirac-Gleichung (Gleichung 1.28) und obiger Darstellung der Gamma-Matrizen ergibt, heißt Standarddarstellung der Dirac'schen Gleichung. Alle vier Gamma-Matrizen sind selbstadjungiert.

2 Grundkonzepte der Supersymmetrie

2.1 Fermionische Auf- und Absteigeoperatoren (Ψ_k^\dagger, Ψ_k)

Im Folgenden wollen wir den in Gleichung 1.28 auftretenden Dirac-Operator (wählen $\hbar = c = 1$ und bezeichnen die Elementarladung mit q)

$$i\mathcal{D} = i \sum_k \gamma_k (\partial_k - iqA_k) \quad (2.1)$$

für Systeme der Dimension d genauer untersuchen und ihn in Analogie zum harmonischen Oszillator mit Hilfe von „Auf- und Absteigeoperatoren“ darstellen. Dazu definieren wir $\frac{d}{2} = D \in \mathbb{N}$ sowie die Operatoren

$$\Psi_n := \frac{1}{2}(\gamma_n + i\gamma_{n+D}) \text{ für } n = 1, 2, \dots, D \quad (2.2)$$

Die Operatoren genügen der folgenden Antikommutator-Beziehung:

$$\begin{aligned} \{\Psi_n, \Psi_m\} &= \frac{1}{4}(\gamma_n + i\gamma_{n+D})(\gamma_m + i\gamma_{m+D}) + \frac{1}{4}(\gamma_m + i\gamma_{m+D})(\gamma_n + i\gamma_{n+D}) \\ &= \frac{1}{4}\{\gamma_n, \gamma_m\} + \frac{i}{4}\{\gamma_n, \gamma_{m+D}\} + \frac{i}{4}\{\gamma_{n+D}, \gamma_m\} - \frac{1}{4}\{\gamma_{n+D}, \gamma_{m+D}\}. \end{aligned}$$

Wegen der Gamma-Matrizen-Eigenschaft $\{\gamma_n, \gamma_m\} = 2\delta_{nm}$ verschwinden die beiden mittleren Terme, während sich der erste und der letzte Term wegheben. Es gilt also

$$\{\Psi_n, \Psi_m\} = 0 = \{\Psi_n^\dagger, \Psi_m^\dagger\}. \quad (2.3)$$

Unter Zuhilfenahme von $\gamma_k = \gamma_k^\dagger$ zeigt man durch analoge Rechnung

$$\{\Psi_n, \Psi_m^\dagger\} = \delta_{nm}. \quad (2.4)$$

Schließlich definieren wir noch den Operator

$$N := \sum_{n=1}^D \Psi_n^\dagger \Psi_n. \quad (2.5)$$

Unter Ausnutzung der Kommutator-Antikommutator-Beziehung $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} [N, \Psi_m] &= \sum_{n=1}^D [\Psi_n^\dagger \Psi_n, \Psi_m] \\ &= - \sum_{n=1}^D [\Psi_m, \Psi_n^\dagger \Psi_n] \\ &= - \sum_{n=1}^D \{\Psi_m, \Psi_n^\dagger\} \Psi_n + \sum_{n=1}^D \Psi_n^\dagger \{\Psi_m, \Psi_n\} \\ &= - \sum_{n=1}^D \delta^{nm} \Psi_n + 0 \\ &= -\Psi_m. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $[N, \Psi_m^\dagger] = \Psi_m^\dagger$ gilt.

Bei N handelt es sich also um das Analogon zum Besetzungszahloperator. Sein Spektrum ist gleich \mathbb{N}_0 und wir bezeichnen die Eigenfunktionen als $|n\rangle$, $N|n\rangle = n|n\rangle$. Dann erhöhen die Ψ_k^\dagger die Besetzungszahl n um eins, während die Ψ_k selbige um eins erniedrigen. Der Grundzustand $|0\rangle$ sei weiterhin dadurch gegeben, dass

$$\Psi_k|0\rangle = 0 \text{ für alle } k = 1, 2, \dots, D.$$

2.2 Der Dirac-Operator als Funktion der Ψ_k und Ψ_k^\dagger

Nach Konstruktion gilt zunächst $\Psi_k + \Psi_k^\dagger = \gamma_k$ beziehungsweise $-i\Psi_k + i\Psi_k^\dagger = \gamma_{k+D}$. Dann erhalten wir für den Dirac-Operator

$$\begin{aligned} i\mathcal{D} &= i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} (\partial_{\mu} - iqA_{\mu}) \\ &= i \sum_{n=1}^D (\Psi_n + \Psi_n^\dagger) (\partial_n - iqA_n) + \sum_{n=1}^D (\Psi_n - \Psi_n^\dagger) (\partial_{n+D} - iqA_{n+D}) \\ &= \sum_{n=1}^D \Psi_n (i\partial_n + qA_n + \partial_{n+D} - iqA_{n+D}) + \sum_{n=1}^D \Psi_n^\dagger (i\partial_n + qA_n - \partial_{n+D} + iqA_{n+D}). \end{aligned}$$

Wir stellen nun einige besondere Forderungen an das Vektorpotential \vec{A} , nämlich dass es nur von den ersten D raumartigen Koordinaten abhängen soll, sowie dass die ersten D Komponenten Null seien, das heißt $\partial_{n+D}A \equiv 0$ und $A_n \equiv 0$ für $n = 1, \dots, D$. Wegen der ersten Forderung kommutiert insbesondere \mathcal{D} mit ∂_{n+D} , $n = 1, \dots, D$ und wir können den Sektor mit Eigenwert Null für die Ableitungsoperatoren betrachten. Entsprechend gilt $\partial_{n+D} \equiv 0$, $n = 1, \dots, D$, wodurch wir folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned} i\mathcal{D} &= \sum_{n=1}^D \Psi_n (\hat{p}_n - iqA_{n+D}) + \sum_{n=1}^D \Psi_n^\dagger (\hat{p}_n^\dagger + iqA_{n+D}) \\ &=: \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^\dagger. \end{aligned}$$

Der Operator $\mathcal{Q} = \sum \Psi_n (\hat{p}_n - iqA_{n+D})$ wird als Superladung bezeichnet, wir definieren den Super-Hamiltonian via

$$H := -\frac{1}{2}\mathcal{D}^2 = \frac{1}{2}(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}^\dagger)^2 = \frac{1}{2} \left(\mathcal{Q}^2 + (\mathcal{Q}^\dagger)^2 + \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\} \right). \quad (2.6)$$

2.3 Die Superladung

Ein System heißt supersymmetrisch, falls $-\frac{1}{2}\mathcal{D}^2 = \frac{1}{2}\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}$. Wir fordern also $\mathcal{Q}^2 = 0$ (was insbesondere $(\mathcal{Q}^\dagger)^2 = 0$ impliziert) und wollen untersuchen, was diese Bedingung unter anderem für das Vektorpotential bedeutet.

Wir berechnen zunächst \mathcal{Q}^2 und fordern dessen Verschwinden:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^2 &= \sum_n \sum_m \Psi_n (i\partial_n - iqA_{n+D}) \Psi_m (i\partial_m - iqA_{m+D}) \\ &= \sum_n \sum_m \Psi_n \Psi_m (-\partial_n \partial_m + qA_{m+D} \partial_n + q\partial_n A_{m+D} + qA_{n+D} \partial_m - q^2 A_{m+D} A_{n+D}).\end{aligned}$$

Wegen $\{\Psi_n, \Psi_m\} = 0$ ist der Term $\Psi_n \Psi_m$ antisymmetrisch in n und m . In der Klammer sind bis auf den Term $q\partial_n A_{m+D}$ alle Terme symmetrisch, bei Summation über n und m fallen diese also weg. Demzufolge bleibt nur übrig

$$\mathcal{Q}^2 = \sum_n \sum_m \Psi_n \Psi_m q \partial_n A_{m+D} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.7)$$

Wir zerlegen den letzten Term noch in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$\partial_n A_{m+D} = \frac{1}{2}(\partial_n A_{m+D} + \partial_m A_{n+D}) + \frac{1}{2}(\partial_n A_{m+D} - \partial_m A_{n+D}).$$

Setzen wir dies in Gleichung 2.7 ein und beachten, dass der erste Summand wieder symmetrisch ist, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} \sum_n \sum_m \Psi_n \Psi_m q (\partial_n A_{m+D} - \partial_m A_{n+D}) = 0$$

beziehungsweise durch Permutation der Koordinaten

$$\partial_n A_m - \partial_m A_n = 0 \iff A_n = \partial_n \Lambda.$$

Das Vektorfeld A ist demnach ein Gradientenfeld und \mathcal{Q} kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \sum_n \Psi_n (i\partial_n - iq\partial_n \Lambda) = i\vec{\Psi}(\vec{\nabla} - q\nabla\Lambda) \\ &= e^{q\Lambda} \left(\sum_n i\Psi_n \partial_n \right) e^{-q\Lambda},\end{aligned}$$

bzw. nach Definition von $\mathcal{Q}_0 := \sum i\Psi_n \partial_n$

$$\mathcal{Q} = e^{q\Lambda} \mathcal{Q}_0 e^{-q\Lambda}. \quad (2.8)$$

2.4 Eigenschaften der Superladung

Wir untersuchen zunächst die Kommutatoren $[N, \mathcal{Q}]$ und $[N, \mathcal{Q}^\dagger]$:

$$\begin{aligned} [N, \mathcal{Q}] &= [N, e^{q\Lambda} \sum_n i\Psi_n \partial_n e^{-q\Lambda}] \\ &= e^{q\Lambda} i \sum_n [N, \Psi_n \partial_n] e^{-q\Lambda} \\ &= e^{q\Lambda} i \sum_n ([N, \Psi_n]((-q\partial_n \Lambda)e^{-q\Lambda} + e^{-q\Lambda} \partial_n) + \Psi_n [N, \partial_n] e^{-q\Lambda}). \end{aligned}$$

Der Kommutator $[N, \partial_n]$ verschwindet, während man mit Hilfe der Kommutator-Antikommutator-Beziehung leicht nachrechnet, dass $[N, \Psi_n] = \sum_m [\Psi_m^\dagger \Psi_m, \Psi_n] = -\Psi_n$ gilt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} [N, \mathcal{Q}] &= e^{q\Lambda} i \sum_n ((q\Psi_n \partial_n \Lambda)e^{-q\Lambda} - e^{-q\Lambda} \Psi_n \partial_n) \\ &= \sum_n (-i\Psi_n \partial_n + iq\Psi_n \partial_n \Lambda) \\ &= -\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $[N, \mathcal{Q}^\dagger] = \mathcal{Q}^\dagger$ gilt.

Mit diesen beiden Kommutatorregeln kann nun leicht gezeigt werden, dass $[N, H]$ verschwindet:

$$\begin{aligned} 2[N, H] &= [N, \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}] = [N, \mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger + \mathcal{Q}^\dagger\mathcal{Q}] \\ &= \mathcal{Q}[N, \mathcal{Q}^\dagger] + [N, \mathcal{Q}]\mathcal{Q}^\dagger + \mathcal{Q}^\dagger[N, \mathcal{Q}] + [N, \mathcal{Q}^\dagger]\mathcal{Q} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir können demnach N und H gemeinsam diagonalisieren. Jede Besetzungszahl k besitzt genau $\binom{D}{k}$ Eigenzustände. Dies ist genau die Anzahl der Möglichkeiten k der D Aufsteigeoperatoren auszuwählen, um $|k\rangle$ aus $|0\rangle$ zu generieren. In dieser Basis hat N also Blockgestalt:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \cdot \mathbb{1}_{\binom{D}{0}} & & & \\ & 1 \cdot \mathbb{1}_{\binom{D}{1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \cdot \mathbb{1}_{\binom{D}{D}} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Entsprechend hat auch der Hamilton-Operator Blockgestalt:

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & & & \\ & H_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_D \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Der Hilbertraum zerfällt in $D + 1$ Teilräume,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \left(\bigoplus_{k=0}^D \mathcal{F}_k \right) \\ &= \bigoplus_{k=0}^D (L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_k) \\ &=: \bigoplus_{k=0}^D \mathcal{H}_k,\end{aligned}$$

wobei $\dim \mathcal{F}_k = \binom{D}{k}$ und $\mathcal{F} = \bigoplus_{k=0}^D \mathcal{F}_k$ der von den Erzeugung- und Vernichtungsoperatoren generierte Fock-Raum ist. Der Fock-Raum besitzt demnach insgesamt

$$\sum_{k=0}^D \binom{D}{k} = 2^D$$

Eigenzustände und jeder Vektor $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}$ lässt sich darstellen als

$$|\Phi\rangle = f_0 |0\rangle + \sum f_k |k\rangle + \sum f_{kl} |kl\rangle + \sum f_{klm} |klm\rangle + \dots, \quad (2.11)$$

wobei $|kl\rangle = \Psi_k^\dagger \Psi_l^\dagger |0\rangle$ usw. meint.

Aufgrund der Eigenschaft $\mathcal{Q}^2 = 0 = (\mathcal{Q}^\dagger)^2$ kommutieren H und \mathcal{Q} bzw. \mathcal{Q}^\dagger , sodass die Superladung entsprechend ihrer Struktur zwischen den Teil-Hilberträumen \mathcal{H}_k vermittelt:

$$\mathcal{H}_0 \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\mathcal{Q}^\dagger} \mathcal{H}_2 \dots$$

bzw.

$$\mathcal{H}_D \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{H}_{D-1} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \mathcal{H}_{D-2} \dots$$

Dieser Fakt wird später insbesondere bei der Suche nach Eigenwerten in den einzelnen Teilräumen interessant.

Wir wollen nun noch $H = \frac{1}{2}\{\mathcal{Q}^\dagger, \mathcal{Q}\}$ berechnen (setzen $q = 1$):

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}\varphi &= e^\Lambda i \left(\sum_n \Psi_n \partial_n \right) e^{-\Lambda} \varphi \\ &= e^\Lambda i \sum_n \Psi_n ((-\partial_n \Lambda) \varphi + \partial_n \varphi) e^{-\Lambda}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^\dagger(\mathcal{Q}\varphi) &= e^{-\Lambda} i \left(\sum_m \Psi_m^\dagger \partial_m \right) e^\Lambda (e^\Lambda i \sum_n \Psi_n ((-\partial_n \Lambda) \varphi + \partial_n \varphi) e^{-\Lambda}) \\ &= e^{-\Lambda} i \sum_m \Psi_m^\dagger (i \sum_n \Psi_n (\partial_n \varphi - \varphi \partial_n \Lambda) e^\Lambda \partial_m \Lambda + e^\Lambda i \sum_n \Psi_n (\partial_m \partial_n \varphi - \varphi \partial_m \partial_n \Lambda - \partial_m \varphi \partial_n \Lambda))\end{aligned}$$

beziehungsweise nach Vereinfachung

$$\mathcal{Q}^\dagger(\mathcal{Q}\varphi) = \sum_m \sum_n \Psi_m^\dagger \Psi_n (\varphi \partial_m \Lambda \partial_n \Lambda - \partial_n \varphi \partial_m \Lambda + \varphi \partial_m \partial_n \Lambda + \partial_m \varphi \partial_n \Lambda - \partial_n \partial_m \varphi). \quad (2.12)$$

Eine analoge Rechnung führt auf

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Q}^\dagger\varphi) = \sum_m \sum_n \Psi_n \Psi_m^\dagger (\partial_m \varphi \partial_n \Lambda + \varphi \partial_m \Lambda \partial_n \Lambda - \partial_n \partial_m \varphi - \partial_n \varphi \partial_m \Lambda - \varphi \partial_m \partial_n \Lambda). \quad (2.13)$$

Die Addition von Gleichung 2.12 und Gleichung 2.13 liefert schließlich

$$\begin{aligned} 2H\varphi = \sum_n \sum_m (\Psi_n \Psi_m^\dagger + \Psi_m^\dagger \Psi_n) (\varphi \partial_n \Lambda \partial_m \Lambda - \partial_m \partial_n \varphi + \partial_m \varphi \partial_n \Lambda - \partial_m \Lambda \partial_n \varphi) \\ + \sum_n \sum_m (\Psi_n \Psi_m^\dagger - \Psi_m^\dagger \Psi_n) (-\partial_n \partial_m \Lambda). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wir verwenden $\{\Psi_n, \Psi_m^\dagger\} = \delta_{nm}$ sowie $\Psi_n \Psi_m^\dagger - \Psi_m^\dagger \Psi_n = \{\Psi_n, \Psi_m^\dagger\} - 2\Psi_m^\dagger \Psi_n$ und erhalten schlussendlich

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 - \Delta\Lambda) + \sum_n \sum_m \Psi_m^\dagger \Psi_n \partial_n \partial_m \Lambda. \quad (2.15)$$

Setzen wir in Gleichung 2.14 statt $\Psi_n \Psi_m^\dagger - \Psi_m^\dagger \Psi_n = \{\Psi_n, \Psi_m^\dagger\} - 2\Psi_m^\dagger \Psi_n$ die äquivalente Beziehung $\Psi_n \Psi_m^\dagger - \Psi_m^\dagger \Psi_n = -\{\Psi_m^\dagger \Psi_n\} + 2\Psi_n \Psi_m^\dagger$ ein, so erhalten wir alternativ

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 + \Delta\Lambda) - \sum_n \sum_m \Psi_n \Psi_m^\dagger \partial_n \partial_m \Lambda. \quad (2.16)$$

Wir wollen nun noch untersuchen, wie der Hamiltonoperator in den eindimensionalen Unterräumen H_0 und H_D aussieht.

Da der Zustand $|0\rangle$ von allen Ψ_k annihiliert wird, verschwindet die Doppelsumme in Gleichung 2.15. H_0 hat dann also die Form

$$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 - \Delta\Lambda). \quad (2.17)$$

Mit analoger Argumentation verschwindet für $\Psi \in H_D$ die Doppelsumme in Gleichung 2.16 und wir erhalten

$$H_D = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 + \Delta\Lambda). \quad (2.18)$$

In diesen beiden Unterräumen vereinfacht sich die Dirac-Gleichung zur Standard-Schrödingergleichung. Identifizieren wir in den beiden obigen Gleichungen die Terme $(\nabla\Lambda)^2 + \Delta\Lambda$ bzw. $(\nabla\Lambda)^2 - \Delta\Lambda$ mit dem Potential V , so lässt sich ein Kriterium für die Symmetrisierbarkeit physikalischer Systeme formulieren:

Ein System heißt supersymmetrisch, falls sich das Potential V im Hamiltonian mit Hilfe einer skalaren Funktion Λ schreiben lässt als $V = (\nabla\Lambda)^2 \pm \Delta\Lambda$.

Nachfolgend werden wir nun einige physikalische Systeme im Rahmen dieses Formalismus untersuchen.

3 Supersymmetrische Systeme in zwei Dimensionen

Um einen prinzipiellen Eindruck von der Vorgehensweise bei der Untersuchung supersymmetrischer Systeme zu erhalten, soll in diesem Kapitel die Arbeit [2] zusammengefasst werden. Hauptinhalt ist die Untersuchung des Coulomb-Problems in zwei Dimensionen. In diesem Kapitel wird insbesondere auch die Notation der Autoren von [2] verwendet.

Wie in Unterabschnitt 2.2 erläutert, geht zunächst die Hälfte der Koordinaten verloren (es wird angenommen, dass das Vektorpotential nur von der ersten Hälfte der Koordinaten abhängt), sodass wir bei der Dirac-Gleichung in vier Dimensionen starten, um die Systeme letztendlich in zwei Dimensionen beschreiben zu können. Es existieren daher je zwei Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren mit den fermionischen Antikommutator-Regeln

$$\{\Psi_k, \Psi_l\} = 0 = \{\Psi_k^\dagger, \Psi_l^\dagger\}, \quad \{\Psi_k, \Psi_l^\dagger\} = \frac{1}{m} \delta_{kl}; \quad k, l = 1, 2.$$

Der Vakuum-Zustand $|0\rangle$ wird definiert durch $\Psi_k |0\rangle = 0$, der fermionische Fock-Raum wird erzeugt durch $\Psi_k^\dagger |0\rangle = |1_k\rangle$, insbesondere gilt $\Psi_2^\dagger |1_1\rangle = |1_1 1_2\rangle = -\Psi_1^\dagger |1_2\rangle = -|1_2 1_1\rangle$. Zwischen diesen Basisfunktionen gelten die üblichen Orthogonalitätsbeziehungen, der Gesamt-Hilbertraum zerfällt in die drei Teilräume $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Der Teilchenzahloperator $N = \sum_k \Psi_k^\dagger \Psi_k$ besitzt auf \mathcal{H}_k den Eigenwert k .

Mit dem Superpotential $W = W(x_1, x_2)$ definieren wir weiterhin die Superladung

$$\mathcal{Q} = \sum_{k=1}^2 i\Psi_k (\hbar\partial_k + \partial_k W) = e^{-\frac{W}{\hbar}} \mathcal{Q}_0 e^{\frac{W}{\hbar}}, \quad \text{mit } \mathcal{Q}_0 = \sum_{k=1}^2 i\hbar\Psi_k \partial_k$$

$$\mathcal{Q}^\dagger = \sum_{k=1}^2 i\Psi_k^\dagger (\hbar\partial_k - \partial_k W)$$

Der Super-Hamiltonian wird definiert als $H := \frac{1}{2}\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}$.

Konkret folgt nun mit

$$\Psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\gamma_1 + i\gamma_3), \quad \Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{m}}(\gamma_2 + i\gamma_4)$$

beziehungsweise durch Wahl konkreter Repräsentanten

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Basis

$$|0\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1_1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1_1 1_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgende Darstellung der Superladung:

$$\mathcal{Q} = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{D}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{D}_2 & \bar{D}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $D_k = \hbar\partial_k + \partial_k W$ und $\bar{D}_k = \hbar\partial_k - \partial_k W$.

Der Hamiltonian nimmt dann die Form

$$H = H_0 \mathbb{1}_4 - \hbar \sum_k \sum_l \partial_k \partial_l W \Psi_k^\dagger \Psi_l = \begin{pmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1^{11} & H_1^{12} & 0 \\ 0 & H_1^{21} & H_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

an, mit den skalaren Hamilton-Operatoren

$$H_0 \equiv H|_{\mathcal{H}_0} = \frac{1}{2m}(-\hbar^2 \Delta + (\partial_1 W)^2 + (\partial_2 W)^2 + \hbar \Delta W) \quad (3.2)$$

$$H_2 \equiv H|_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2m}(-\hbar^2 \Delta + (\partial_1 W)^2 + (\partial_2 W)^2 - \hbar \Delta W) \quad (3.3)$$

und dem Matrixoperator

$$H_1 \equiv H|_{\mathcal{H}_1} = \begin{pmatrix} H_1^{11} & H_1^{12} \\ H_1^{21} & H_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 - \frac{\hbar}{m} \partial_1^2 W & -\frac{\hbar}{m} \partial_1 \partial_2 W \\ -\frac{\hbar}{m} \partial_2 \partial_1 W & H_0 - \frac{\hbar}{m} \partial_2^2 W \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Wir wollen uns an dieser Stelle noch einer Besonderheit bei der Beschreibung zweidimensionaler Systeme beschäftigen: Da der Hilbertraum in nur drei Teilräume zerfällt, ist es möglich den „mittleren Sektor“ vollständig mit Hilfe der skalaren Hamiltonians (bzw. deren Eigenfunktionen und Eigenwerten) zu beschreiben. Denn angenommen $\Phi_E \in \mathcal{H}_0$ ist Eigenzustand zur Energie E eines gebundenen Zustandes oder eben eines Streuzustandes, dann ist wegen $[H, Q^\dagger] = 0$ auch $Q^\dagger \Psi_E \in \mathcal{H}_1$ Eigenfunktion zum Eigenwert E .

Analog verhält es sich für $\Phi_E \in \mathcal{H}_2$, hier ist $Q \Psi_E \in \mathcal{H}_1$ der zugehörige Partnerzustand. Die Frage ist nun, ob auf diese Art und Weise alle Eigenzustände in \mathcal{H}_1 beschrieben werden können.

Angenommen nein, dann gibt es also einen Eigenzustand $\chi_E \in \mathcal{H}_1$, der keinen Partnerzustand in \mathcal{H}_0 oder \mathcal{H}_2 hat, dann würde dieser Zustand automatisch durch Q und Q^\dagger annihiliert werden, d.h.

$$0 = (Q + Q^\dagger)\chi_E = i\mathcal{D}\chi_E$$

und damit gilt automatisch $E = 0$.

Wir betrachten nun andererseits folgende Zerlegung des Hilbertraums: Da Kern H ein abgeschlossener Untervektorraum ist, können wir \mathcal{H} als $\mathcal{H} = \text{Kern } H \oplus (\text{Kern } H)^\perp$ schreiben.

Sei nun $\Psi \in (\text{Kern } H)^\perp$, dann lässt sich H invertieren, d.h.

$$\begin{aligned} \Psi &= H H^{-1} \Psi \\ &= \frac{1}{2}(Q Q^\dagger + Q^\dagger Q) H^{-1} \Psi \\ &= Q \left(\frac{1}{2} Q^\dagger H^{-1} \Psi \right) + Q^\dagger \left(\frac{1}{2} Q H^{-1} \Psi \right) \\ &= Q \Phi_1 + Q^\dagger \Phi_2 \end{aligned}$$

Demzufolge gilt $(\text{Kern } H)^\perp = Q\mathcal{H} \oplus Q^\dagger\mathcal{H}$ [13].

Wegen $\chi_E \in \mathcal{H}_1 \subset Q^\dagger\mathcal{H}$ folgt $\chi_E \in Q^\dagger\mathcal{H} \cap \text{Kern } H = \{0\}$.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun ein konkretes physikalisches System betrachten.

4 Das Coulomb-Problem in zwei Dimensionen

Es geht um die Beschreibung eines Ein-Elektronen-Atoms, das heißt der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{\lambda}{r}, \quad \lambda > 0.$$

Durch eine geeignete Reskalierung ($x_k \rightarrow \frac{1}{\lambda m}x_k$; $p_k \rightarrow \lambda m p_k$) erhalten wir

$$H = \lambda^2 m \left(-\frac{\hbar^2}{2}\Delta - \frac{1}{r} \right) =: \lambda^2 m K, \quad (4.1)$$

sodass wir nur die Eigenwerte von K untersuchen müssen. Von Interesse sind dabei zunächst nur die gebundenen Zustände $K\varphi_E = E\varphi_E$ mit $E < 0$.

4.1 „Klassisch“ quantenmechanischer Zugang

Wir betrachten zunächst den Drehimpulsoperator (ein skalarer Operator in zwei Dimensionen)

$$L = -i\hbar(x_1\partial_2 - x_2\partial_1),$$

sowie den Runge-Lenz-Vektor (zweikomponentig in zwei Dimensionen)

$$A_1 = \frac{1}{2}(p_2L + Lp_2) - \frac{x_1}{r}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}(p_1L + Lp_1) - \frac{x_2}{r}$$

Durch längere Rechnungen lassen sich folgende Kommutatoren herleiten:

$$\begin{aligned} [L, A_1] &= i\hbar A_2, \\ [L, A_2] &= -i\hbar A_1 \\ [K, L] &= [K, A_1] = [K, A_2] = 0 \\ [A_1, A_2] &= -2i\hbar KL \end{aligned} \quad (4.2)$$

Durch eine geeignete Reskalierung, $M_k := \frac{1}{\sqrt{-2E}} A_k$; $k = 1, 2$ ($E < 0!$), bilden also nach den obigen Relationen die drei Größen $M_1, M_2, L = M_3$ eine Drehimpuls-Algebra

$$[M_i, M_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k. \quad (4.3)$$

Mit

$$C^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = -\frac{1}{2K}(A_1^2 + A_2^2) + L^2 \quad (4.4)$$

und

$$A_1^2 + A_2^2 = 2K \left(L^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) + 1 \quad (4.5)$$

folgt unmittelbar

$$K = -\frac{1}{2} \frac{1}{C^2 + \frac{\hbar^2}{4}} \quad (4.6)$$

Da die Eigenwerte des (Pseudo-)Drehimpulsoperators bekanntlich gegeben sind durch $\hbar^2 j(j+1)$; $j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$, folgt für die Eigenwerte E_j von K

$$E_j = -\frac{2}{\hbar^2} \frac{1}{4j(j+1) + 1}, \quad j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2} \quad (4.7)$$

bzw. äquivalent dazu

$$E_n = -\frac{2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

4.2 Supersymmetrischer Zugang

Wir wählen

$$W(x_1, x_2) = -\frac{2}{\hbar} r = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

und werden sehen, dass dieses Potential die gewünschten skalaren Hamilton-Operatoren reproduziert.

Wir reskalieren zunächst noch die Fermi-Operatoren $\Psi_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} \Psi_k$, dann gilt für die Superladung

$$\mathcal{Q} = \sum_k i(\hbar \Psi_k \partial_k - \frac{2}{\hbar} g),$$

wobei $g := -\frac{\hbar}{2} \sum \Psi_k \partial_k W = \sum \frac{x_k}{r} \Psi_k$.

Konkret hat g die Form

$$g = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erfüllt die Relationen

$$g^2 = 0; \quad \{g^\dagger, g\} = 1; \quad (g^\dagger)^2 = 0.$$

Mit Hilfe von

$$g^\dagger g = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & x_1 x_2 & 0 \\ 0 & x_1 x_2 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

lässt sich nun der Super-Hamiltonian $H := \frac{1}{2} \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\}$ berechnen. Wir erhalten:

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} \right) \mathbb{1}_4 - \frac{1}{r} X; \quad X = [g, g^\dagger] = \mathbb{1}_4 - 2N + 2g^\dagger g \quad (4.9)$$

Entsprechend liest man die skalaren Schrödinger-Operatoren ab:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} - \frac{1}{r} = K + \frac{2}{\hbar^2} \quad (4.10)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} + \frac{1}{r} \quad (4.11)$$

Tatsächlich entspricht also der Operator H_0 bis auf eine additive Konstante gerade dem Coulomb-Problem, der Operator H_2 beschreibt dasselbe System, nur mit einem positiv geladenen Teilchen. Die Kraft ist daher abstoßend, es gibt keine gebundenen Zustände.

Der Matrix-Operator besitzt die Form

$$H_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^3} & -\frac{2x_1 x_2}{r^3} \\ -\frac{2x_1 x_2}{r^3} & -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Wir wollen nun in den verschiedenen Sektoren die gebundenen Zustände und die Eigenfunktionen finden.

4.2.1 Gebundene Zustände in \mathcal{H}_0

Entsprechend der Ergebnisse aus Unterabschnitt 4.1 ergeben sich die Eigenwerte von H_0 zu

$$E_j^{(0)} = \left(\frac{2}{\hbar^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar^2(j(j+1) + \frac{1}{4})} \right) = \left(\frac{2}{\hbar^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\hbar^2(j + \frac{1}{2})^2} \right); \quad j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2} \quad (4.13)$$

Mit den bekannten Drehimpuls-Algebra-Relationen

$$C^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle; \quad M_3 |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle, \quad m = -j, \dots, j$$

können wir nun auf die übliche Art und Weise die Eigenfunktionen bestimmen.

Dazu wird zunächst die additive Konstante in E_j auf Null gesetzt und wir führen Polarkoordinaten ein:

$$\Phi_{jm}^{(0)} = \langle r \varphi | j m \rangle.$$

Mit Hilfe des Leiteroperators $M_+ := M_1 + iM_2 = \hbar(j + \frac{1}{2}) A_+$, welcher den Zustand $|j j\rangle$ annihiliert, lässt sich also $\Phi_{jj}^{(0)}$ bestimmen. Zusammen mit der Ortsdarstellung

$$M_+ = \hbar^3 \left(j + \frac{1}{2} \right) e^{i\varphi} \left(i\partial_r \partial_\varphi - \frac{1}{r} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{2} \partial_r - \frac{i}{2r} \partial_\varphi - \frac{1}{\hbar^2} \right) \quad (4.14)$$

und dem Ansatz

$$\Phi_{jj}^{(0)} = f_j(r) e^{ij\varphi}$$

ergibt sich die normierte Eigenfunktion zu

$$\Phi_{jj}^{(0)}(r, \varphi) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u^j}{\hbar^2 \sqrt{(2j+1)^3 (2j)!}} e^{ij\varphi} e^{-\frac{u}{2}}; \quad u = \frac{4r}{\hbar^2(2j+1)}. \quad (4.15)$$

Unter Zuhilfenahme von $M_- = M_1 - iM_2$ sind dann alle anderen Zustände gegeben durch

$$\Phi_{jm}^{(0)} \propto (M_-)^{j-m} \Phi_{jj}^{(0)}; \quad (M_-)^{2j+2} \Phi_{jm}^{(0)} = 0. \quad (4.16)$$

In Ortsdarstellung lautet M_-

$$M_- = \hbar^3 \left(j + \frac{1}{2} \right) e^{-i\varphi} \left(-i\partial_r \partial_\varphi - \frac{1}{r} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{2} \partial_r + \frac{i}{2r} \partial_\varphi - \frac{1}{\hbar^2} \right) \quad (4.17)$$

und die allgemeinen Eigenfunktionen ergeben sich zu

$$\Phi_{jm}^{(0)}(r, \varphi) = \frac{2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{2(j+|m|)!}{\pi(2j+1)^3(j-|m|)! (2|m|)!}} \frac{u^{|m|}}{1} {}_1F_1(|m| - j, 2|m| + 1, u) e^{im\varphi} e^{-\frac{u}{2}}, \quad (4.18)$$

wobei ${}_1F_1$ die konfluente hypergeometrische Funktion ist. Genauer gilt

$${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (4.19)$$

mit den Parametern

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-k+1)}; \quad (b)_k = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-k+1)}, \quad (4.20)$$

wobei $(a)_0 = (b)_0 := 1^2$.

Damit ist das Spektrum der gebundenen Zustände von H_0 vollständig bestimmt.

² $(\gamma)_k$ heißt auch Pochhammer - Symbol

4.2.2 Gebundene Zustände in \mathcal{H}_1

Entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3 ist (in Bezug auf gebundene Zustände) das Spektrum von \mathcal{H}_1 gleich dem Spektrum von \mathcal{H}_0 :

$$E_j^{(1)} = \frac{2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{1}{(2j+1)^2} \right) \in \left(0, \frac{2}{\hbar^2} \right); \quad j \in \frac{\mathbb{N}}{2} \quad (4.21)$$

Für die Eigenfunktionen gilt

$$\Phi_{jm}^{(1)} = \hbar \mathcal{Q}^\dagger \Phi_{jm}^{(0)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{jm}^{(1)(1)}(r, \varphi) \\ \Phi_{jm}^{(1)(2)}(r, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Wir betrachten nun noch die Normierung:

$$(\Phi_{j_1 m_1}^{(1)})^* \Phi_{j_2 m_2}^{(1)} = \hbar^2 (\Phi_{j_1 m_1}^{(0)})^* \mathcal{Q} \mathcal{Q}^\dagger \Phi_{j_2 m_2}^{(0)}$$

Da $\mathcal{Q}\mathcal{H}_0=0$ gilt, können wir in obiger Gleichung den Term mit $\mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q}$ hinzuaddieren, wodurch der Hamiltonoperator entsteht:

$$\begin{aligned} (\Phi_{jm}^{(1)})^* \Phi_{jm}^{(1)} &= \hbar^2 (\Phi_{jm}^{(0)})^* \mathcal{Q} \mathcal{Q}^\dagger \Phi_{jm}^{(0)} + \hbar^2 (\Phi_{jm}^{(0)})^* \mathcal{Q}^\dagger \mathcal{Q} \Phi_{jm}^{(0)} \\ &= \hbar^2 (\Phi_{jm}^{(0)})^* 2H \Phi_{jm}^{(0)} \\ &= 2\hbar^2 E_j (\Phi_{jm}^{(0)})^* \Phi_{jm}^{(0)}. \end{aligned}$$

Die Integration über \mathbb{R}^2 liefert schließlich

$$\|\Phi_{jm}^{(1)}\|^2 = 2\hbar^2 E_j^{(1)} \underbrace{\|\Phi_{jm}^{(0)}\|^2}_1$$

Daher muss nur noch mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\hbar^2 E_j^{(1)}}}$ normiert werden.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Phi_{jm}^{(1)(1)}(r, \varphi) &= i \frac{2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{8(j+|m|)!}{\pi(2j+1)^3((2j+1)^2-1)(j-|m|)! (2|m|)!}} \frac{u^{|m|}}{(2|m|)!} e^{im\varphi} e^{-\frac{u}{2}} \\ &\left(\cos(\varphi) \left\{ \frac{|m|-j}{2|m|+1} {}_1F_1(|m|-j+1, 2|m|+2, u) + j {}_1F_1(|m|-j, 2|m|+1, u) \right\} + \frac{m}{u} e^{-i\varphi} {}_1F_1(|m|-j, 2|m|+1, u) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_{jm}^{(1)(2)}(r, \varphi) &= i \frac{2}{\hbar^2} \sqrt{\frac{8(j+|m|)!}{\pi(2j+1)^3((2j+1)^2-1)(j-|m|)! (2|m|)!}} \frac{u^{|m|}}{(2|m|)!} e^{im\varphi} e^{-\frac{u}{2}} \\ &\left(\sin(\varphi) \left\{ \frac{|m|-j}{2|m|+1} {}_1F_1(|m|-j+1, 2|m|+2, u) + j {}_1F_1(|m|-j, 2|m|+1, u) \right\} + i \frac{m}{u} e^{-i\varphi} {}_1F_1(|m|-j, 2|m|+1, u) \right) \end{aligned}$$

Entsprechend haben wir auch in \mathcal{H}_1 die gebundenen Zustände und ihre Eigenfunktionen gefunden.

4.2.3 Streuzustände

In diesem Abschnitt sollen die Streuzustände des Super-Hamiltonians untersucht werden, wobei wir zunächst mit \mathcal{H}_0 beginnen wollen.

Zu lösen ist die Eigenwertgleichung

$$H_0 \Phi_{E^{(0)}}^{(0)}(x_1, x_2) = E^{(0)} \Phi_{E^{(0)}}^{(0)}(x_1, x_2), \quad E^{(0)} > \frac{2}{\hbar^2}, \quad (4.23)$$

mit

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{2}{\hbar^2} - \frac{1}{r}.$$

Das Problem ist in Polarkoordinaten separierbar, sodass wir zusammen mit dem Ansatz $\Phi_{E^{(0)}}^{(0)}(r, \varphi) = f_{E^{(0)}}^{(0)}(r) e^{im\varphi}$ folgende Differentialgleichung für den Radialanteil erhalten:

$$\frac{d^2 f_{E^{(0)}}^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_{E^{(0)}}^{(0)}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} f_{E^{(0)}}^{(0)} + \frac{2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{r} + E^{(0)} - \frac{2}{\hbar^2} \right) f_{E^{(0)}}^{(0)} = 0 \quad (4.24)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$f_{E^{(0)}}^{(0)}(r) = N(E^{(0)}) e^{-i\frac{u}{2}|m|} {}_1F_1 \left(|m| - \frac{1}{2} - \frac{i}{\hbar \sqrt{2|\frac{2}{\hbar^2} - E^{(0)}|}}, 2|m| + 1, iu \right), \quad (4.25)$$

wobei $u = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2|\frac{2}{\hbar^2} - E^{(0)}|} r$.

Analog erhält man die Lösung für die Streuzustände in \mathcal{H}_2 (mit Eigenwert $E^{(2)} > \frac{2}{\hbar^2}$), die Lösung des Radialanteils ist hier gegeben durch

$$f_{E^{(2)}}^{(2)}(r) = N(E^{(2)}) e^{-i\frac{u}{2}|m|} {}_1F_1 \left(|m| - \frac{1}{2} + \frac{i}{\hbar \sqrt{2|\frac{2}{\hbar^2} - E^{(2)}|}}, 2|m| + 1, iu \right), \quad (4.26)$$

wobei $u = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2|\frac{2}{\hbar^2} - E^{(2)}|} r$.

Aufgrund der Super-Algebra ist damit das Spektrum von H entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3 vollständig bestimmt.

5 Radialsymmetrische Potentiale in drei Dimensionen

Im Rahmen dieses Abschnitts wollen wir uns unter Verwendung der Notation aus den Kapiteln Eins und Zwei (das heißt insbesondere ein Einheitensystem mit $\hbar = c = m = q = 1$) mit radialsymmetrischen Potentialen in drei Dimensionen beschäftigen.

5.1 Vorbetrachtungen

Um die physikalischen Systeme in drei Dimensionen beschreiben zu können, müssen wir entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 2 bei der Dirac-Gleichung in sechs Dimensionen starten. Die komplexifizierte Clifford-Algebra über \mathbb{R}^6 mit der Signatur $(6, 0, 0)$, bezeichnet als $\mathbb{C}l_6$, ist isomorph zu $\mathbb{C}l_2 \otimes \mathbb{C}l_2 \otimes \mathbb{C}l_2$. Eine mögliche Basis von $\mathbb{C}l_2$ stellen die zweidimensionalen Pauli-Matrizen dar, weswegen $\mathbb{C}l_6$ und damit die Ψ_n -Operatoren, \mathcal{Q} und auch H achtdimensional sind. Der Hamiltonian zerfällt in vier Sektoren, den skalaren Null- bzw. Dreiteilchen-Sektor \mathcal{H}_0 und \mathcal{H}_3 , sowie zwei 3×3 -Matrixoperatoren \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . Wir erinnern daran, dass für die skalaren Sektoren

$$H_{0,3} = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 \mp \Delta\Lambda) \quad (5.1)$$

galt, wobei das Ziel darin bestand, Λ so zu wählen, dass in \mathcal{H}_0 oder \mathcal{H}_3 das gewünschte Potential entsteht. Da wir hier radialsymmetrische Potentiale untersuchen wollen ist es zweckmäßig, $\Lambda = \Lambda(r)$ anzusetzen. Wollen wir das Potential $V(r)$ in \mathcal{H}_3 erzeugen, so vereinfacht sich die Differentialgleichung $V(r) = \Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2$ zu

$$\partial_r^2\Lambda + \frac{2}{r}\partial_r\Lambda + (\partial_r\Lambda)^2 = V(r),$$

bzw. durch quadratische Ergänzung und die Substitution $y = \partial_r\Lambda + \frac{1}{r}$:

$$y^2 + \partial_r y = V(r). \quad (5.2)$$

Die Gleichung 5.2 besitzt dieselbe Form wie die sich in der eindimensionalen Quantenmechanik ergebende Differentialgleichung, welche beispielsweise in [3] diskutiert und entsprechende Lösungsfunktionen für einige Potentiale gefunden wurden.

Zum Schluss wollen wir uns noch der konkreten Form von H widmen. Dazu wählen wir die Basis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |12\rangle, |13\rangle, |23\rangle, |123\rangle\}$ und betrachten beispielhaft den Ein-Teilchen-Sektor \mathcal{H}_1 .

Zu berechnen ist der Term $\sum \Psi_m^\dagger \Psi_n \partial_n \partial_m \Lambda$ in Gleichung 2.15. Es sei dazu $\Phi \in \mathcal{H}_1$, d.h. nach Wahl der Basis $\Phi = \sum f_n |n\rangle$, $|n\rangle = \Psi_n^\dagger |0\rangle$. Dann gilt unter Ausnutzung der Antikommutator-Beziehung zwischen den Ψ_i und Ψ_i^\dagger sowie der Identität $\Psi_n |0\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^3 \Psi_m^\dagger \Psi_n \partial_n \partial_m \Lambda \sum_{l=1}^3 f_l |l\rangle &= \sum_{n,m,l} \partial_n \partial_m \Lambda (\Psi_m^\dagger (-\Psi_l^\dagger \Psi_n + \delta_{nl})) f_l |0\rangle \\ &= \sum_{n,m} \partial_n \partial_m \Lambda \Psi_m^\dagger f_n |0\rangle \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$= \begin{pmatrix} \partial_1^2 \Lambda & \partial_2 \partial_1 \Lambda & \partial_3 \partial_1 \Lambda \\ \partial_1 \partial_2 \Lambda & \partial_2^2 \Lambda & \partial_3 \partial_2 \Lambda \\ \partial_1 \partial_3 \Lambda & \partial_2 \partial_3 \Lambda & \partial_3^2 \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir so für den ersten Matrixoperator

$$H_1 = \left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 - \Delta\Lambda)\right) \mathbb{1}_3 + \begin{pmatrix} \partial_1^2\Lambda & \partial_2\partial_1\Lambda & \partial_3\partial_1\Lambda \\ \partial_1\partial_2\Lambda & \partial_2^2\Lambda & \partial_3\partial_2\Lambda \\ \partial_1\partial_3\Lambda & \partial_2\partial_3\Lambda & \partial_3^2\Lambda \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Analog berechnet man

$$H_2 = \left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}((\nabla\Lambda)^2 - \Delta\Lambda)\right) \mathbb{1}_3 + \begin{pmatrix} (\partial_1^2 + \partial_2^2)\Lambda & \partial_3\partial_2\Lambda & -\partial_3\partial_1\Lambda \\ \partial_2\partial_3\Lambda & \partial_3^2\Lambda & \partial_2\partial_1\Lambda \\ -\partial_1\partial_3\Lambda & \partial_1\partial_2\Lambda & (\partial_2^2 + \partial_3^2)\Lambda \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Von Interesse ist außerdem noch die Superladung $\mathcal{Q} = \sum \Psi_n(i\partial_n - i\partial_n\Lambda)$, welche sich in der gewählten Basis zu

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_2 & -D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & -D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

ergibt, wobei $D_k = i(\partial_k - \partial_k\Lambda)$.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass im Gegensatz zum vorigen Kapitel das Spektrum der Matrixoperatoren nicht mehr (vollständig) durch die Spektren der skalaren Operatoren beschrieben werden kann. Ursache ist das Vorhandensein zweier Matrixsektoren und die Tatsache, dass \mathcal{Q} stets zu Null quadriert. Dadurch können Eigenzustände eines Sektors mit Hilfe von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}^\dagger nur in „direkte“ Nachbarsektoren übertragen werden.

Im Folgenden Abschnitt wollen wir uns nun mit konkreten Potentialen beschäftigen.

5.2 Das Morse-Potential

Das Morse-Potential,

$$V(r) = V_0(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)}), \quad (5.6)$$

ist ein gängiges Potential zur Beschreibung der Vibrations-Energiezustände eines zweiatomigen Moleküls. Dabei beschreibt $V_0 > 0$ die Potentialtiefe des Minimums, $r_0 > 0$ den Gleichgewichtsabstand der Atome (das heißt Ort des Minimums) und $\alpha > 0$ die „Breite“ des Minimums.

Um dieses Potential nun in \mathcal{H}_3 zu reproduzieren, muss die Differentialgleichung $y^2 + \partial_r y = V(r)$ gelöst werden. Die Autoren in [3] fanden nun $y(r) = A + Be^{-\alpha(r-r_0)}$, sodass wir mit $y = \partial_r \Lambda + 1/r$ folgendes Superpotential erhalten:

$$\Lambda(r) = \frac{B}{\alpha} e^{-\alpha(r-r_0)} + Ar - \ln r \quad (5.7)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2) &= \frac{1}{2} \left(A^2 + B^2 e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2B \left(A - \frac{\alpha}{2} \right) e^{-\alpha(r-r_0)} \right) \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} \left(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2 \frac{2A - \alpha}{2B} e^{-\alpha(r-r_0)} \right). \end{aligned}$$

Wählen wir nun

$$A = B + \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{B^2}{2} =: V_0 > 0 \quad (5.8)$$

so erhalten wir in der Tat

$$H_3 = -\frac{1}{2}\Delta + V_0 \left(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)} \right) + \frac{1}{2} \left(B + \frac{\alpha}{2} \right)^2. \quad (5.9)$$

Die Konstanten A, B und α sind demzufolge in Einheiten $[m^{-1}]$ gegeben. Für das Partnerpotential in H_0 ergibt sich

$$\frac{1}{2} (-\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2) = \frac{1}{2} \left(A^2 - \frac{4A}{r} + \frac{2}{r^2} + B^2 e^{-2\alpha(r-r_0)} + B \left(\frac{4}{r} - 2(\alpha + B) \right) e^{-\alpha(r-r_0)} \right). \quad (5.10)$$

Für den Matrixoperator benötigen wir schließlich noch die Ableitungen von $\Lambda(r)$ nach den kartesischen Koordinaten, es gilt

$$\begin{aligned} \partial_n^2 \Lambda &= \frac{A(r^2 - x_n^2)}{r^3} + B e^{-\alpha(r-r_0)} \left(\alpha \frac{x_n^2}{r^2} + \frac{x_n^2 - r^2}{r^3} \right) - \frac{r^2 - 2x_n^2}{r^4} \\ \partial_m \partial_n \Lambda &= x_m x_n \left(-\frac{A}{r^3} + \frac{2}{r^4} + \left(\frac{B}{r^3} + \alpha \frac{B}{r^2} \right) e^{-\alpha(r-r_0)} \right); \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Im nächsten Abschnitt sollen nun zumindest für H_3 die gebundenen Zustände ermittelt werden, wobei wir im Wesentlichen den Ausführungen von [4] folgen werden.

5.2.1 Gebundene Vibrations - Zustände in \mathcal{H}_3

Die additive Konstante in Gleichung 5.9 kann für die Suche nach Eigenfunktionen vernachlässigt werden und sorgt nur für eine Verschiebung auf der Energieskala. Daher gilt es die Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V_0 \left(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)}\right)\right) \Psi = E\Psi$$

zu lösen.

Der übliche Separationsansatz $\Psi = \frac{1}{r}\rho(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ liefert schließlich

$$-\frac{1}{2}\partial_r^2\rho + \frac{l(l+1)}{2r^2}\rho + V_0 \left(e^{-2\alpha(r-r_0)} - 2e^{-\alpha(r-r_0)}\right) \rho = E \rho.$$

Da es uns nur um die Vibrationsübergänge geht, setzen wir also l gleich Null. Zusammen mit der Koordinatentransformation

$$u = \alpha(r - r_0); \quad u \in [-\alpha r_0, \infty] \quad (5.12)$$

transformiert sich die Schrödingergleichung zu

$$-\frac{1}{2}\partial_u^2\rho + \frac{V_0}{\alpha^2} (e^{-2u} - 2e^{-u}) \rho = \frac{E}{\alpha^2}\rho.$$

Wir führen jetzt die Größe $\omega_0 := \alpha\sqrt{2V_0}$ ein³ und drücken E und V_0 selbst in Einheiten dieser Größe aus, konkret

$$V_0 = \kappa\omega_0; \quad E = \varepsilon\omega_0.$$

Dann lässt sich die Schrödingergleichung wie folgt:

$$-\frac{1}{2}\partial_u^2\rho + 2\kappa^2 (e^{-2u} - 2e^{-u}) \rho = 2\kappa\varepsilon\rho.$$

Um die Exponentialfunktion zu eliminieren, führen wir eine weitere Koordinatentransformation

$$y = e^{-u}; \quad y \in [e^{\alpha r_0}, 0) \quad (5.13)$$

durch, wodurch sich der Differentialoperator zu

$$\begin{aligned} \partial_u^2\rho &= \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial\rho}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right) \\ &= y^2\partial_y^2\rho + y\partial_y\rho \end{aligned}$$

transformiert.

Insgesamt erhalten wir

$$y^2\partial_y^2\rho + y\partial_y\rho - (-4\kappa\varepsilon - 8\kappa^2y + 4\kappa^2y^2)\rho = 0.$$

Eine letzte, einfache Koordinatentransformation

$$\xi = 4\kappa y; \quad \xi \in [4\kappa e^{\alpha r_0}, 0) \quad (5.14)$$

führt auf

$$\xi^2\partial_\xi^2\rho + \xi\partial_\xi\rho - (-4\kappa\varepsilon - 2\kappa\xi + \frac{\xi^2}{4})\rho = 0.$$

³Die Größe entspricht der Schwingungsfrequenz für kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewichtszustand

Wir setzen nun an:

$$\rho(\xi) = \xi^\nu e^{-\frac{1}{2}\xi} g(\xi),$$

wobei $\nu^2 := -4\kappa\varepsilon$ und g eine beliebige Funktion in ξ sei. Für den Differentialoperator gilt dann

$$\xi^2 \partial_\xi^2 \rho + \xi \partial_\xi \rho = \xi^\nu e^{-\frac{1}{2}\xi} [(\nu(\nu+1) - \nu\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \nu - \frac{1}{2}\xi)g + (\xi + 2\nu\xi - \xi^2)\partial_\xi g + \partial_\xi^2 g \xi^2],$$

sodass sich letztendlich für g folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\xi \partial_\xi^2 g + (2\nu + 1 - \xi)\partial_\xi g - (\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa)g = 0. \quad (5.15)$$

Die Gleichung 5.15 ist die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung, deren Lösungen gegeben sind durch

$$g(\xi) = N {}_1F_1(a, b, \xi) = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \xi^k}{(b)_k k!}, \quad (5.16)$$

wobei ${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}$ die auch schon in Unterunterabschnitt 4.2.1 aufgetauchte, konfluente hypergeometrische Funktion darstellt und N eine Normierungskonstante ist.

Im aktuellen Fall ist $a = \nu + \frac{1}{2} - 2\kappa$ und $b = 2\nu + 1$.

Um nun die Normierbarkeit der Wellenfunktion zu gewährleisten, soll die Funktion

$$\rho = N \xi^\nu e^{-\frac{1}{2}\xi} {}_1F_1(\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa, 2\nu + 1, \xi) \quad (5.17)$$

im Intervall $[4\kappa e^{\alpha r_0}, 0)$ normierbar sein.

Beginnen wir daher mit der Forderung des Verschwindens bei $\xi = 0$. Da die konfluente hypergeometrische Funktion im Ursprung beschränkt ist, müssen wir zunächst aufgrund des Terms ξ^ν in $\rho(\xi)$ $\nu > 0$ fordern. Dadurch ist aber insbesondere $b = 2\nu + 1 > 0$, weshalb sich keinerlei Singularitäten im endlichen Intervall $[4\kappa e^{\alpha r_0}, 0)$ ergeben [5]. Entsprechend ist die Funktion beschränkt und die Wellenfunktion tatsächlich normierbar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\kappa\alpha} \int_0^{4\kappa e^{\alpha r_0}} \xi^{2\nu-1} e^{-\xi} {}_1F_1^2(\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa, 2\nu + 1, \xi) d\xi &\leq C \int_0^{4\kappa e^{\alpha r_0}} \xi^{2\nu-1} d\xi \\ &\leq \frac{C}{2\nu-1} \xi^{2\nu} \Big|_0^{4\kappa e^{\alpha r_0}} < \infty \end{aligned}$$

Der zweite Randwert liefert insbesondere die Energieeigenwerte: Die Forderung $\rho(\xi = 4\kappa e^{\alpha r_0}) = 0$ ist nämlich äquivalent zu

$${}_1F_1(\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa, 2\nu + 1, \xi = 4\kappa e^{\alpha r_0}) = 0.$$

Diese Gleichung liefert ein kompliziertes Polynom in ν , dessen Lösungen ν_n im Allgemeinen nur numerisch bestimmbar sein werden. Aufgrund der Definition von ν , nämlich $\nu^2 = -4\kappa\varepsilon$ erhalten wir so jedoch mit Hilfe der Lösungen die Energieeigenwerte

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{4\kappa} \nu_n^2. \quad (5.18)$$

Insbesondere folgt aus Gleichung 5.18, dass $\varepsilon_n < 0$ gilt. Dies führt zusammen mit der Forderung $E > -D \iff \varepsilon > -\kappa$ dazu, dass nur eine endliche Anzahl der ν_n zulässig sind und damit auch nur endlich viele gebundene Energieeigenzustände existieren.

5.2.2 Gebundene Vibrations - Rotations - Zustände in \mathcal{H}_3

Wir wollen nun den Drehimpuls-Term

$$\frac{l(l+1)}{2r^2} = \frac{\alpha^2 l(l+1)}{2(u + \alpha r_0)^2}$$

mit berücksichtigen. Um das Problem noch analytisch lösen zu können, betrachten wir das Potential in einer Umgebung um den Gleichgewichtsabstand r_0 . Eine Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{(u + \alpha r_0)^2}$ um $u = 0$ liefert

$$\frac{1}{(u + \alpha r_0)^2} = \frac{1}{(\alpha r_0)^2} - \frac{2u}{(\alpha r_0)^3} + \frac{3u^2}{(\alpha r_0)^4} + \mathcal{O}(u^3).$$

Durch [7] motiviert ist nun der Ansatz

$$V'(u) = C_0 + C_1 e^{-u} + C_2 e^{-2u},$$

dessen Taylor-Entwicklung um $u = 0$

$$V'(u) = C_0 + C_1 - C_1 u + \frac{C_1}{2} u^2 + C_2 - 2C_2 u + 2C_2 u^2 + \mathcal{O}(u^3)$$

lautet.

Ein Koeffizientenvergleich zwischen beiden Entwicklungen liefert

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{(\alpha r_0)^2} - \frac{3}{(\alpha r_0)^3} + \frac{3}{(\alpha r_0)^4} \\ C_1 &= \frac{4}{(\alpha r_0)^3} - \frac{6}{(\alpha r_0)^4} \\ C_2 &= -\frac{1}{(\alpha r_0)^3} + \frac{3}{(\alpha r_0)^4}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Durch die Wahl dieser Koeffizienten stimmen $V'(u)$ und der Drehimpuls-Term für nicht zu große Auslenkungen aus dem Gleichgewichtsabstand bzw. nicht zu große Drehimpuls-Quantenzahlen l gut überein.

Für das Potential ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V(u) &= \alpha^2 l(l+1) \frac{C_0}{2} + \frac{\alpha^2 l(l+1)}{2} (C_1 e^{-u} + C_2 e^{-2u}) + V_0 (e^{-2u} - 2e^{-u}) \\ &= +\alpha^2 l(l+1) \frac{C_0}{2} + \left(V_0 + \frac{C_2}{2} \alpha^2 l(l+1) \right) \left(e^{-2u} - 2 \frac{V_0 - \frac{C_1}{4} \alpha^2 l(l+1)}{V_0 + \frac{C_2}{2} \alpha^2 l(l+1)} e^{-u} \right). \end{aligned}$$

Durch Einführung der Größen

$$C_l = \alpha^2 l(l+1) \frac{C_0}{2}; \quad V_l = (V_0 + \frac{C_2}{2} \alpha^2 l(l+1)); \quad \mu_l = \frac{V_0 - \frac{C_1}{4} \alpha^2 l(l+1)}{V_0 + \frac{C_2}{2} \alpha^2 l(l+1)}$$

erhalten wir die einfache Form

$$V(u) = C_l + V_l(e^{-2u} - 2\mu_l e^{-u}), \quad (5.20)$$

sodass wir das Problem völlig analog zu Unterunterabschnitt 5.2.1 behandeln können.

Die additive Konstante C_l kann bei der Suche nach den Eigenzuständen zunächst vernachlässigt werden.

Wir führen wieder die Größen

$$\omega_l = \alpha \sqrt{2V_l}; \quad V_l = \kappa \omega_l; \quad E = \varepsilon \omega_l \quad (5.21)$$

ein. Die Durchführung exakt derselben Koordinatentransformationen und Ansätze wie im vorigen Abschnitt führt schließlich auf folgende konfluente hypergeometrische Differentialgleichung für $g(\xi)$:

$$\xi \partial_\xi^2 g + (2\nu + 1 - \xi) \partial_\xi g - (\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa \mu_l) g = 0.$$

Wir sehen also, dass lediglich der Parameter $a = \nu + \frac{1}{2} - 2\kappa$ ersetzt werden muss durch $a = \nu + \frac{1}{2} - 2\kappa \mu_l$.

Die Begründung der Normierbarkeit der Wellenfunktion erfolgt analog zum vorigen Abschnitt, die (endlich vielen) Energieeigenwerte sind durch Lösungen $\nu_{n,l}$ des Polynoms

$${}_1F_1(\nu + \frac{1}{2} - 2\kappa \mu_l, 2\nu + 1, \xi = 4\kappa e^{\alpha r_0}) = 0$$

gegeben. Durch den Parameter μ_l ergibt sich insbesondere die l -Abhängigkeit, insgesamt

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{1}{4\kappa} \nu_{n,l}^2. \quad (5.22)$$

5.2.3 Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0

Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0 war gegeben durch

$$V = \frac{1}{2} \left(A^2 - \frac{4A}{r} + \frac{2}{r^2} + B^2 e^{-2\alpha(r-r_0)} + B \left(\frac{4}{r} - 2(\alpha + B) \right) e^{-\alpha(r-r_0)} \right),$$

wobei $A = B + \frac{\alpha}{2}$ galt. Das Potential enthält also einen Drehimpuls-Term ($\sim \frac{1}{r^2}$), einen Coulomb-Term ($\sim \frac{1}{r}$), einen Yukawa-Term ($\sim \frac{1}{r} e^{-\alpha r}$) sowie einen modifizierten Morse-Term ($\sim \beta e^{-2\alpha r} - \zeta e^{-\alpha r}$). Es ist daher nicht gelungen, eine analytische Lösung des Eigenwert-Problems zu finden. Um trotzdem einen prinzipiellen Eindruck vom Verhalten des Potentials zu erhalten, wurde das Potential für verschiedene Parameter und zusätzlich unter Berücksichtigung des vom Drehimpulsoperator herrührenden Terms geplottet. Die additive Konstante wurde dabei vernachlässigt. Da sich auch beim Partner-Potential zumindest für niedrige l -Zustände ähnlich wie beim ursprünglichen Morse-Potential ein Potentialminimum ergab, wurde zumindest die Lage des Minimums sowie die zweite Ableitung des Potentials an dieser Stelle bestimmt. Somit lassen sich in niedrigen l -Zuständen mit Hilfe der harmonischen Oszillator-Näherung via $E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ erste Energieabschätzungen treffen, die als Ausgangspunkt für weitere numerische Betrachtungen dienen können. Die Plots befinden sich im Anhang (Abbildung 1 und Abbildung 2). Dabei sind stets Ort des Minimums, „ $Rmin$ “, Potentialstärke am Ort des Minimums, „ $V(Rmin)$ “, sowie die Krümmung „ ω^2 “ am Ort des Minimums angegeben. Damit lassen sich dann die Energien in harmonischer Oszillator-Näherung berechnen. Die Energien dürfen zwischen dem Potential-Minimum und $V(r \rightarrow \infty) = 0$ liegen.

5.3 Das modifizierte Pöschl -Teller - Potential

Das Potential

$$V(r) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha r)} \quad (5.23)$$

gehört ebenfalls zu den „Mulden“ - Potentialen und findet daher Anwendung bei der Beschreibung zweiatomiger Moleküle. Die Bedeutung der Parameter ist dieselbe wie beim Morse-Potential.

Durch [3] ist nun die Wahl von

$$\Lambda(r) = \frac{A}{\alpha} \ln \cosh(\alpha r) - \ln r \quad (5.24)$$

motiviert, sodass sich

$$H_3 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}A(\alpha - A)\frac{1}{\cosh^2(\alpha r)} + \frac{A^2}{2}$$

ergibt. Die Konstanten α und A besitzen die Einheit $[m^{-1}]$.

Wir setzen $V_0 = -\frac{1}{2}A(\alpha - A) \stackrel{!}{>} 0$ und erhalten so die gewünschte Form

$$H_3 = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha r)} + \frac{A^2}{2}. \quad (5.25)$$

Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0 berechnet sich zu

$$\frac{1}{2}(-\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r^2} + A^2 \tanh^2(\alpha r) - \frac{4A}{r} \tanh(\alpha r) - \frac{\alpha A}{\cosh^2(\alpha r)}\right) \quad (5.26)$$

und für die Ableitungen von $\Lambda(r)$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \partial_n^2 \Lambda &= \frac{1}{r} \left(A \tanh(\alpha r) - \frac{1}{r} \right) + x_n^2 \left(\frac{\alpha A}{r^2} \frac{1}{\cosh^2(\alpha r)} - \frac{A}{r^3} \tanh(\alpha r) + \frac{2}{r^4} \right) \\ \partial_m \partial_n \Lambda &= x_n x_m \left(\frac{\alpha A}{r^2} \frac{1}{\cosh^2(\alpha r)} - \frac{A}{r^3} \tanh(\alpha r) + \frac{2}{r^4} \right); \quad n \neq m. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nun sollen wieder gebundene Zustände im skalaren Sektor \mathcal{H}_3 betrachtet werden.

5.3.1 Gebundene Vibrations - Zustände in \mathcal{H}_3

Es sei also wieder $l = 0$ und die radiale Schrödingergleichung in der Variable $u = \alpha r$, $u \in [0, \infty)$, dargestellt:

$$-\frac{1}{2}\partial_u^2\rho - \frac{V_0}{\alpha^2} \frac{1}{\cosh^2(u)} = \frac{E}{\alpha^2}\rho$$

Wir führen die Größen

$$D = \frac{2V_0}{\alpha^2}; \quad \varepsilon^2 = -\frac{2E}{\alpha^2} > 0$$

ein und erhalten so

$$\partial_u^2\rho + \frac{D}{\cosh^2(u)}\rho - \varepsilon^2\rho = 0.$$

Die folgenden Koordinatentransformation werden gemäß [14] durchgeführt. Beginnen wir mit $y = \tanh u$, $y \in [0, 1)$. Damit transformiert sich der Differentialoperator unter Ausnutzung der Beziehung $\frac{1}{\cosh^2(u)} = (1 - y^2)$ zu

$$\begin{aligned} \partial_u^2\rho &= \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ &= (1 - y^2)^2 \partial_y^2\rho - 2y(1 - y^2)\partial_y\rho, \end{aligned}$$

sodass die Differentialgleichung folgende Form annimmt:

$$(1 - y^2)^2 \partial_y^2\rho - 2y(1 - y^2)\partial_y\rho + (1 - y^2)D\rho - \varepsilon^2\rho = 0,$$

bzw. äquivalent dazu

$$\frac{d}{dy} \left((1 - y^2) \frac{d\rho}{dy} \right) + \left(D - \frac{\varepsilon^2}{1 - y^2} \right) \rho = 0. \quad (5.28)$$

Setzen wir $D = \lambda(\lambda + 1)$ ⁴ so stellt Gleichung 5.28 die assoziierte Legendre-Differentialgleichung dar. Trotzdem setzen wir nun zunächst $\rho = (1 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}g(y)$ an und erhalten nach Auswertung des Differentialoperators

$$(1 - y^2)^2 \partial_y^2\rho - 2y(1 - y^2)\partial_y\rho = (1 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} [(1 - y^2)\partial_y^2g + (-2y(\varepsilon + 1))\partial_yg + (\varepsilon^2 \frac{y^2}{1 - y^2} - \varepsilon)g].$$

⁴man beachte dass dann zwei Lösungen für λ existieren, eine positive Lösung λ_+ und eine negative Lösung λ_- .

Insgesamt erhalten wir dann nach Kürzen von $(1 - y^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ für unsere Differentialgleichung

$$(1 - y^2)\partial_y^2 g - 2y(\varepsilon + 1)\partial_y g - (\varepsilon(\varepsilon + 1) - \lambda(\lambda + 1))g = 0.$$

Eine letzte Koordinatentransformation $\xi = \frac{1-y}{2}$, $\xi \in [\frac{1}{2}, 0)$, liefert schließlich

$$\xi(1 - \xi)\partial_\xi^2 g + [(\varepsilon + 1) - 2(\varepsilon + 1)\xi]\partial_\xi g - [\varepsilon(\varepsilon + 1) - \lambda(\lambda + 1)]g = 0,$$

und nach Einführung der Parameter

$$a = \varepsilon - \lambda; \quad b = \varepsilon + \lambda + 1; \quad c = \varepsilon + 1$$

erhalten wir die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\xi(1 - \xi)\partial_\xi^2 g + [c - (a + b + 1)\xi]\partial_\xi g - ab g = 0, \quad (5.29)$$

deren Lösungen gegeben sind durch $g(\xi) = N {}_2F_1(a, b, c, \xi)$, wobei

$${}_2F_1(a, b, c, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{\xi^k}{k!}$$

die hypergeometrische Funktion zweiter Art darstellt. Wir betrachten nun wieder die Normierbarkeit der Wellenfunktion.

Zunächst soll $\rho(\xi) = N(\xi(1 - \xi))^{\frac{\varepsilon}{2}} {}_2F_1(a, b, c, \xi)$ an der Stelle $\xi = 0$ verschwinden. Da ${}_2F_1(a, b, c, \xi)$ im Ursprung beschränkt ist, muss $\varepsilon > 0$ gelten. Damit ist insbesondere $c = \varepsilon + 1 > 0$ und es ergeben sich im betrachteten Intervall keinerlei Singularitäten für ${}_2F_1(a, b, c, \xi)$ und die Reihe konvergiert für alle $\xi < 1$. Damit ist ρ in der Tat normierbar:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^2(r) dr &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1 - y^2)^{\varepsilon-1} ({}_2F_1(a, b, c, y))^2 dy \\ &= C \int_0^{\frac{1}{2}} (\xi(1 - \xi))^{\varepsilon-1} ({}_2F_1(a, b, c, \xi))^2 d\xi \\ &\leq \tilde{C} \int_0^{\frac{1}{2}} (\xi(1 - \xi))^{\varepsilon-1} d\xi \\ &= \tilde{C} \frac{(1 - \xi)^{-\varepsilon} (\xi(1 - \xi))^\varepsilon (\varepsilon \xi {}_2F_1(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 2 + \varepsilon, \xi) + (\varepsilon + 1) {}_2F_1(-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon + 1, \xi))}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \Big|_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da nun aber $\varepsilon > 0$ gilt, ist obiger Term wie gewünscht beschränkt.

Die Energieeigenwerte erhalten wir schließlich wieder durch Lösung des Polynoms

$${}_2F_1\left(\varepsilon - \lambda, \varepsilon + \lambda + 1, \varepsilon + 1, \xi = \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Aufgrund der Forderung $E > -V_0$ ergibt sich wieder nur eine endliche Anzahl zulässiger Lösungen ε_n ,

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2}\varepsilon_n^2. \quad (5.30)$$

Betrachten wir jetzt noch die beiden Fälle $\lambda = \lambda_+$, $\lambda = \lambda_-$.

Sei zunächst $a = \varepsilon - \lambda_+$, $b = \varepsilon + \lambda_+ + 1$. Wegen $-\lambda_+ = \lambda_- + 1$ können wir dann aber auch $a = \varepsilon + \lambda_- + 1$ und $b = \varepsilon - \lambda_-$ schreiben. Mit anderen Worten: Der Übergang $\lambda_+ \mapsto \lambda_-$ vertauscht lediglich die Rollen von a und b . Da aber Gleichung 5.29 „symmetrisch“ unter der Vertauschung der beiden Parameter ist, erhalten wir keine zusätzlichen Eigenwerte oder Eigenfunktionen.

5.3.2 Gebundene Vibrations - Rotations - Zustände in \mathcal{H}_3

Wieder wollen wir den Zentrifugalterm durch eine andere Funktion nähern, um das Eigenwert-Problem analytisch lösen zu können. In [8] wurde dies bereits diskutiert. Für uns soll der Ansatz

$$\frac{1}{r^2} \approx \alpha^2 \left(\frac{1}{\sinh^2(\alpha r)} \right)$$

genügen.

Entsprechend der Erkenntnisse aus dem vorigen Abschnitt setzen wir wieder $D = \lambda(\lambda + 1)$ und müssen folgende Differentialgleichung lösen:

$$\partial_u^2 \rho + \left(\frac{\lambda(\lambda + 1)}{\cosh^2 u} - \frac{l(l + 1)}{\sinh^2 u} \right) \rho = \varepsilon^2 \rho; \quad \varepsilon^2 = -\frac{2E}{\alpha^2}.$$

Durch Definition von

$$\kappa = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4l(l + 1) + 1})$$

können wir obige Gleichung auch schreiben als

$$\partial_u^2 \rho + \left(\frac{\lambda(\lambda + 1)}{\cosh^2 u} - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{\sinh^2 u} \right) \rho = \varepsilon^2 \rho.$$

Wir führen nun eine Koordinatentransformation $y = \tanh^2 u$, $y \in [0, 1)$, durch.

Der Potentialterm lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$\left(\lambda(\lambda + 1)(1 - y) - \kappa(\kappa - 1) \frac{1 - y}{y} \right) \rho.$$

Der Differentialoperator transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned} \partial_u^2 \rho &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ &= 4y(1 - y)^2 \partial_y^2 \rho + (6(1 - y)^2 - 4(1 - y)) \partial_y \rho, \end{aligned}$$

sodass sich nach Division durch $4y(1 - y)^2$ insgesamt Folgendes für die Differentialgleichung ergibt:

$$\partial_y^2 \rho + \frac{1 - 3y}{2y(1 - y)} \partial_y \rho + \frac{1}{4y^2(1 - y)} (\lambda(\lambda + 1)y(1 - y) - \kappa(\kappa - 1)(1 - y)) \rho = \frac{y\varepsilon^2}{4y^2(1 - y)^2} \rho.$$

Der Ansatz $\rho = y^{\frac{\kappa}{2}}(1 - y)^{\frac{\varepsilon}{2}}g(y)$ führt schließlich nach einigen mühseligen Umformungen auf

$$y(1 - y)\partial_y^2 g(y) + \left[\kappa + \frac{1}{2} - (\varepsilon + \kappa + \frac{3}{2})y \right] \partial_y g + \frac{1}{4} [\lambda(\lambda + 1) - \kappa(\kappa - 1) - \varepsilon(\varepsilon + 1) - 2\varepsilon\kappa] g = 0$$

und nach Einführung der Parameter

$$a = \frac{1}{2}(\varepsilon + \kappa - \lambda); \quad b = \frac{1}{2}(\varepsilon + \kappa + \lambda + 1); \quad c = \kappa + \frac{1}{2}$$

erkennen wir schließlich wieder die hypergeometrische Differentialgleichung,

$$y(1 - y)\partial_y^2 g + [c - (a + b + 1)y]\partial_y g - ab g = 0, \quad (5.31)$$

deren Lösungen wie gehabt durch $g(y) = N {}_2F_1(a, b, c, y)$ gegeben sind.

Diskutieren wir nun wieder das Randwertproblem und beginnen mit dem Fall $y \rightarrow 0$.

Entsprechend der Form

$$\rho(y) = Ny^{\frac{\kappa}{2}}(1 - y)^{\frac{\varepsilon}{2}} {}_2F_1(a, b, c, y)$$

fällt ρ genau dann auf Null ab, falls $\kappa > 0$ gilt. Diese Forderung ist aber gemäß der Definition von κ offensichtlich immer erfüllt. Betrachten wir nun $y \rightarrow 1$. In diesem Fall muss $\varepsilon > 0$ gelten und ${}_2F_1(a, b, c, y)$ beschränkt bleiben. Da die hypergeometrische Reihe aber wegen $c \leq a + b$ für $y \rightarrow 1$ divergiert [11], muss die Reihe wieder abbrechen. Dies kann wie gehabt erreicht werden, indem entweder $a = -n$ oder $b = -n$ gilt. Der erste Fall führt wegen $\varepsilon > 0$ zur Bedingung $\lambda > 0$, der zweite Fall impliziert $\lambda < 0$. Analog zum Fall reiner Vibrationszustände lässt sich jedoch zeigen, dass beide Fälle auf dieselben Eigenwerte und Eigenfunktionen führen.

Sei daher o.B.d.A. $a = -n$ und $\lambda = \lambda_+$.

Demnach gilt

$$2a = \kappa + \varepsilon - \lambda_+ = -2n$$

bzw.

$$E_{n,l} = -\frac{\alpha^2}{2}(\lambda_+ - 2n - \kappa(l))^2; \quad n = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(\lambda_+ - \kappa(l)) \rfloor. \quad (5.32)$$

Man beachte also, dass nur für hinreichend große Potentialtiefen (hinreichend großes λ_+) gebundene Zustände existieren.

Wenden wir uns nun den Eigenfunktionen zu. Es gilt das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^2(r) dr &= \int_0^1 \rho^2(y) \frac{dr}{dy} dy \\ &= \frac{N^2}{\alpha} \int_0^1 y^{\kappa-\frac{1}{2}} (1-y)^{\varepsilon-1} {}_2F_1(-n, -n + \lambda_+ + \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}, y) dy \end{aligned}$$

zu lösen.

In [10] ist folgende Beziehung zwischen der hypergeometrischen Funktion und den Jacobi-Polynomen gegeben:

$$\begin{aligned} P_n^{(\gamma, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(1 + \beta)} {}_2F_1(n + \gamma + \beta + 1, -n, \beta + 1, \frac{1+x}{2}) \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(1 + \beta)} {}_2F_1(-n, n + \gamma + \beta + 1, \beta + 1, \frac{1+x}{2}) \end{aligned}$$

Ziehen wir also den konstanten Vorfaktor mit in die Normierungskonstante, setzen $y = \frac{1+x}{2}$, $x \in [-1, 1)$ und identifizieren $\gamma = \varepsilon$ sowie $\beta = \kappa - \frac{1}{2}$, können wir das Integral wie folgt schreiben⁵:

$$\frac{N^2}{\alpha} \int_{-1}^1 (1+x)^{\kappa-\frac{1}{2}} (1-x)^{\varepsilon-1} \left(P_n^{\varepsilon, \kappa-\frac{1}{2}}(x) \right)^2 dx \stackrel{[10]}{=} \frac{N^2}{\alpha} \frac{2^{\varepsilon+\kappa-\frac{1}{2}} \Gamma(\varepsilon + n + 1) \Gamma(\kappa + n + \frac{1}{2})}{n! \varepsilon \Gamma(\lambda + \frac{1}{2} - n)}.$$

Somit ergibt sich schlussendlich für die normierten Eigenfunktionen

$$\Psi_{n,l}(y, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\alpha n! \varepsilon_n \Gamma(\lambda_+ + \frac{1}{2} - n)}{2^{\varepsilon_n + \kappa(l) - \frac{1}{2}} \Gamma(\varepsilon_n + n + 1) \Gamma(\kappa(l) + n + \frac{1}{2})}} y^{\frac{\kappa(l)}{2}} (1-y)^{\frac{\varepsilon_n}{2}} P_n^{\varepsilon_n, \kappa(l) - \frac{1}{2}}(2y-1) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (5.33)$$

⁵Alle zwangsläufig auftauchenden Potenzen von $\frac{1}{2}$ wurden ebenfalls in die Normierungskonstante gezogen.

5.3.3 Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0

Das Partnerpotential in \mathcal{H}_0 war gegeben durch

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^2} + A^2 \tanh^2(\alpha r) - \frac{4A}{r} \tanh(\alpha r) - \frac{\alpha A}{\cosh^2(\alpha r)} \right).$$

Auch hier ist wie im Falle des Morse-Partnerpotentials aufgrund der Komplexität des Potentials keine analytische Lösung gefunden worden. Für nicht zu große l - Zustände ergibt sich jedoch auch im Falle des Pöschl - Teller -Partnerpotentials ein Minimum, sodass zumindest in erster grober Näherung wieder der harmonische Oszillator angesetzt werden kann. Die notwendigen Größen sind wieder in den Plots (Abbildung 3 und Abbildung 4) angegeben. Geplottet wurde das effektive Potential, das heißt unter Berücksichtigung des vom Drehimpuls herrührenden Terms. Die zulässigen Energien liegen zwischen dem Potentialminimum und $V(r \rightarrow \infty) = \frac{A^2}{2}$.

6 Zusammenfassung

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde die relativistische Form der Hamilton-Funktion hergeleitet und ausgehend von dieser zwei historische Quantisierungsversuche nach Schrödinger und Dirac vorgestellt. Die Ergebnisse waren die Klein-Gordon-Gleichung sowie die Dirac-Gleichung. Letztere diente als Ausgangspunkt für den in Kapitel 2 vorgestellten Supersymmetrie-Formalismus. Es wurde gezeigt, dass der Dirac-Operator mit Hilfe fermionischer Auf- und Absteigeoperatoren als Summe eines Operators und dessen adjungierten Operators geschrieben werden kann. Der entsprechende Operator wurde als Superladung bezeichnet. Unter der Annahme, dass das Vektorpotential als Gradientenfeld einer skalaren Funktion, dem Superpotential, geschrieben werden kann und nur von der Hälfte der Raumzeit-Koordinaten abhängt, war es möglich, den Super-Hamiltonian als Antikommutator der Superladung und der adjungierten Superladung zu schreiben. Damit ergab sich eine Block-Gestalt für den Super-Hamiltonian, in dessen ersten und letzten Sektor skalare Schrödinger-Operatoren auftauchten. Die zugehörigen Potentiale wurden als Partnerpotentiale bezeichnet. Die Stärke des Formalismus bestand nun darin, dass die Superladung bzw. die adjungierte Superladung Eigenzustände eines Sektors in die Nachbarsektoren überträgt, sodass die Spektren der Operatoren in den einzelnen Sektoren miteinander in Beziehung stehen. Ziel war es nun, das Superpotential so zu wählen, dass in einem der skalaren Sektoren ein bekanntes Potential entsteht und so dessen Partnerpotential zu ermitteln. Diese Forderung führte auf eine Differentialgleichung für das Superpotential.

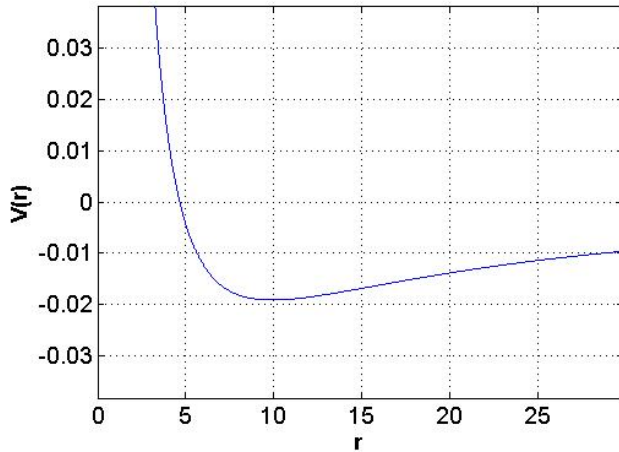
In [2] wurde so das Coulomb-Potential in zwei Dimensionen reproduziert und das Operator-Spektrum analysiert. Die Ergebnisse wurden in Kapitel 4 dieser Arbeit zusammengefasst.

Im letzten Kapitel wurden schließlich radialsymmetrische Potentiale in drei Dimensionen betrachtet. Die Differentialgleichung für das Superpotential konnte auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden, welcher bereits in [3] diskutiert worden ist. Dabei wurden unter anderem analytische Lösungen für das Morse-Potential und das modifizierte Pöschl-Teller-Potential gefunden. Daher wurden diese beiden Potentiale im Kontext der Supersymmetrie untersucht und die konkrete Form des Super-Hamiltonians ermittelt. Anschließend wurden unter Verwendung von [4],[7], [8], [9] und [14] die analytischen Lösungen für die gebundenen Vibrationszustände ($l = 0$) der beiden Potentiale rekapituliert und Näherungslösungen für gebundene Vibrations-Rotations-Zustände ($l \neq 0$) vorgestellt. Für die Partnerpotentiale konnte keine analytische Lösung gefunden werden, für eine grobe Energieabschätzung wurden für einige Parameter die für eine harmonische Oszillator-Näherung relevanten Größen bestimmt. Für wirklich brauchbare Aussagen wäre jedoch eine intensivere numerische Behandlung des Eigenwert-Problems notwendig.

7 Anhang

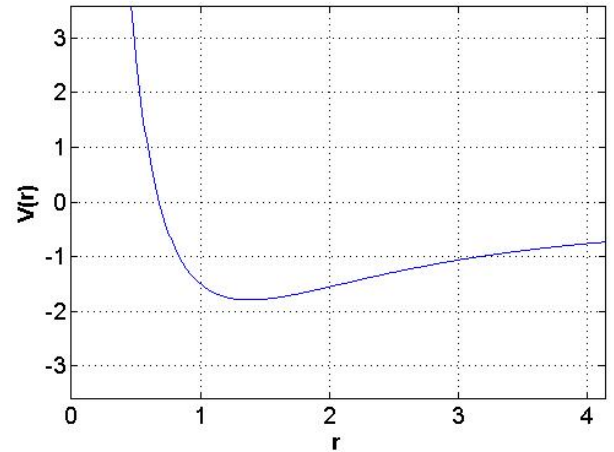
Plots für das Morse-Partnerpotential

Rmin = 9.9408, V(Rmin) = -0.019174 und $\omega^2 = 0.00036967$.



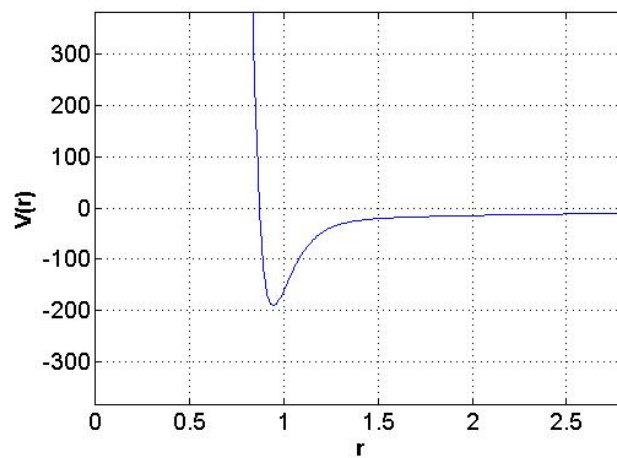
(a) $\alpha = 0.1, B = 0.1$

Rmin = 1.3779, V(Rmin) = -1.7916 und $\omega^2 = 2.4256$.



(b) $\alpha = 1, B = 1$

Rmin = 0.94219, V(Rmin) = -190.5116 und $\omega^2 = 32514.5746$



(c) $\alpha = 10, B = 10$

Abbildung 1: Morse-Partnerpotential für $l = 0$ und $r_0 = 1$

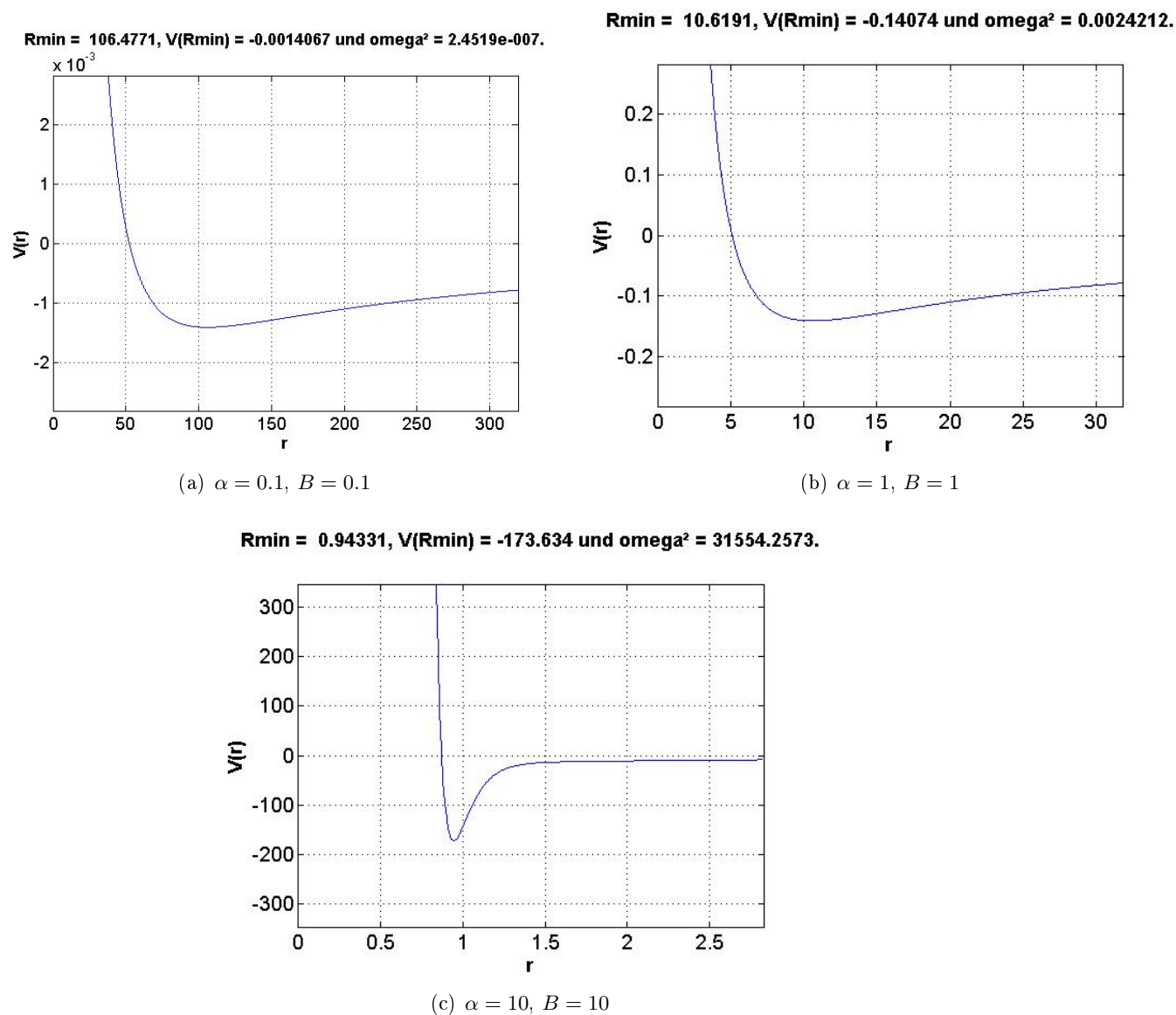
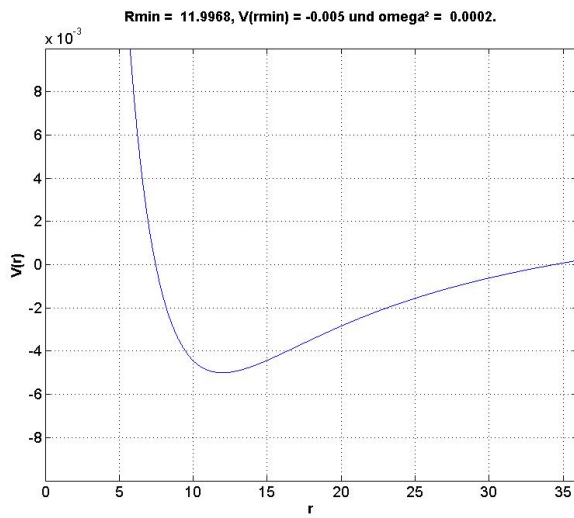
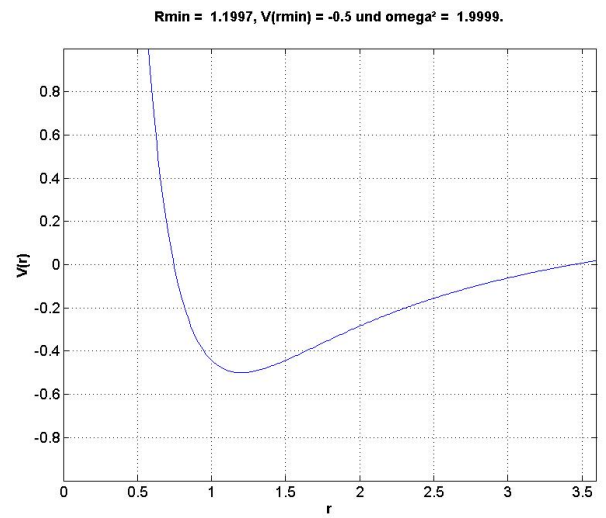
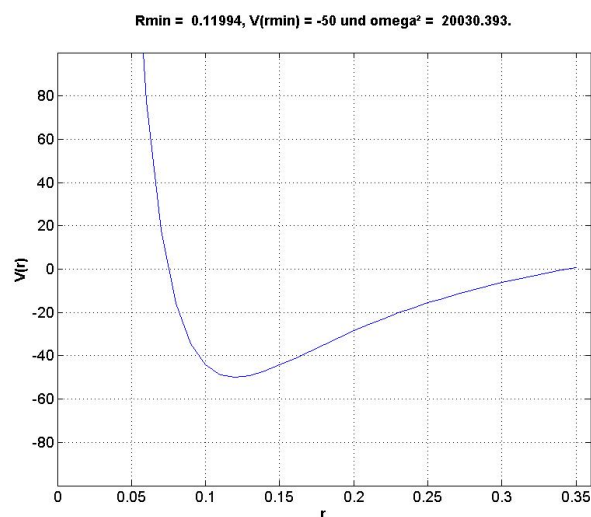
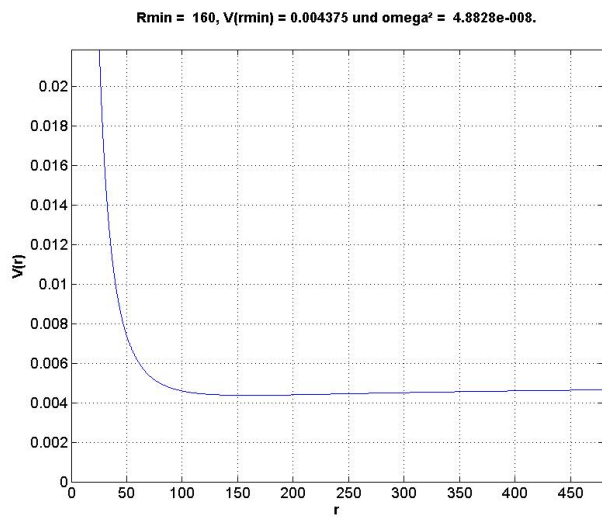


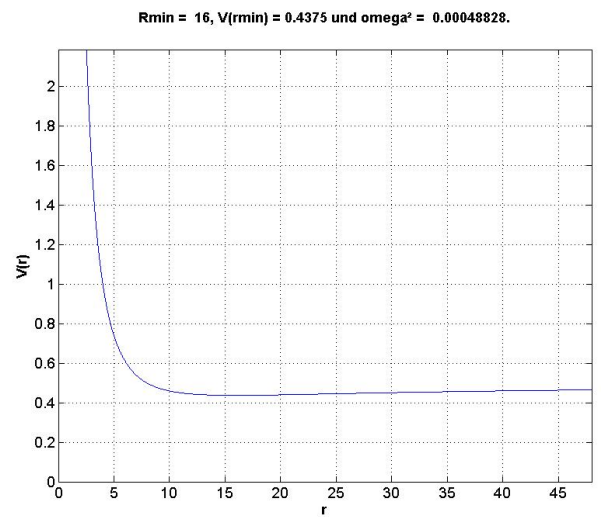
Abbildung 2: Morse-Partnerpotential für $l = 5$ und $r_0 = 1$

Plots für das Pöschl - Teller - Partnerpotential

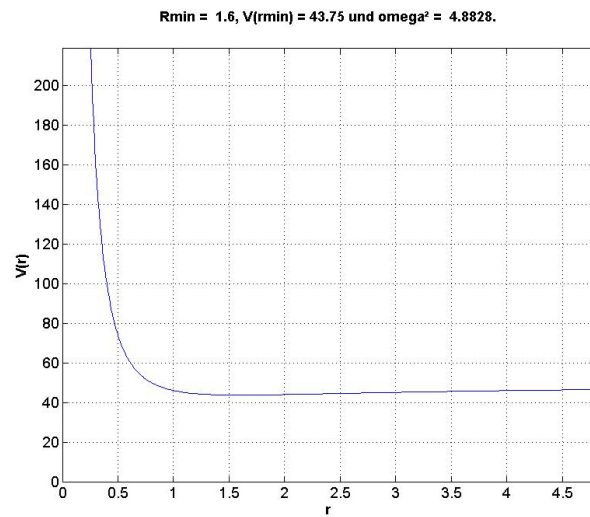
(a) $\alpha = 0.1, A = 0.1$ (b) $\alpha = 1, A = 1$ (c) $\alpha = 10, A = 10$ Abbildung 3: Pöschl-Teller-Partnerpotential für $l = 0$



(a) $\alpha = 0.1, A = 0.1$



(b) $\alpha = 1, A = 1$



(c) $\alpha = 10, A = 10$

Abbildung 4: Pöschl-Teller-Partnerpotential für $l = 5$

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] S. Flügge : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band IV: Quantentheorie I.
Springer Verlag OHG/Berlin · Göttingen · Heidelberg (1964)
- [2] M.A. Gonzalez Leon, M. de la Torre Mayado, J. Mateos Guilarte, M.J. Senosiain :
On the Supersymmetric Spectra of two Planar Integrable Quantum Systems
arXiv:1107.4886v1 [hep-th]
- [3] Ranabir Dutt, Avinash Khare and Uday P. Sukathme:
Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials.
Am.J.Phys. 56 (1988) 163-168
- [4] H. Taseli: Exact solutions for vibrational levels of the Morse potential.
J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) 779 - 788
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions.
Dover Publications New York 1972
- [6] A. Wipf: Non-perturbative methods in supersymmetric theories.
arXiv:hep-th/0504180
- [7] S. Flügge: Practical Quantum Mechanics I.
Springer Verlag New York · Berlin · Heidelberg 1974
- [8] Yuan You, Fa-Lin Lu, Dong-Sheng Sun, Chang-Yuan Chen, Shi-Hai Dong:
Solutions of the Second Pöschl - Teller Potential Solved by an Improved Scheme to the Centrifugal Term.
Few-Body Systems, Volume 54, Issue 11, p. 2125-2132, November 2013
- [9] A. Wipf: Introduction to Supersymmetry.
Vorlesungsskript, April 2000 - März 2001
- [10] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. : Tables of Integrals, Series, and Products.
Academic Press, New York 2007
- [11] N. Bronstein und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik.
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig und Verlag Nauka, Moskau 1979
- [12] F. Brümme: Lecture on supersymmetry and supergravity.
Vorlesungsskript, Wintersemester 2012/2013
- [13] A. Kirchberg, J.D. Laenge, P.A.G. Pisani, A. Wipf:
Algebraic Solution of the Supersymmetric Hydrogen Atom in d Dimensions
Annals Phys. 303 (2003) 359-388
- [14] Prof. Dr. Harald Engel, Technische Universität Berlin - Institut für Theoretische Physik:
4. Übungsblatt Theoretische Physik.
http://www.itp.tu-berlin.de/fileadmin/a3233/upload/SS11/TP_II__QM/Uebung4_01.pdf
Stand:12.09.2013
- [15] H. J. W. Müller-Kirsten, A. Wiedemann: Introduction to Supersymmetry.
World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 80, World Scientific Pub Co, Auflage: 0002
(13. Januar 2010)

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum

Name

Bibliothekserklärung

Der Verfasser bewilligt / bewilligt nicht die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Ort, Datum

Name