

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Diplomarbeit

Supersymmetrische Gitterfeldtheorien

eingereicht von Jan Steinhoff
geboren am 31.03.1981 in Buxtehude

30. November 2006

1. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf
2. Gutachter: Prof. Dr. Thomas Strobl

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Supersymmetrie	7
2.1. Graduierte LIE-Algebren	9
2.1.1. Parametrisierung von Supergruppen	10
2.2. Algebra der Supersymmetrie	10
2.3. Superraum	12
2.3.1. Superfelder	13
2.3.2. Kovariante Ableitung	14
2.4. WESS-ZUMINO-Modell	14
3. Quantenfelder auf einem Gitter	16
3.1. Pfadintegral	16
3.1.1. EUKLIDISCHES Pfadintegral	17
3.2. EUKLIDISCHES WESS-ZUMINO-Modell	18
3.2.1. WARD-Identitäten	18
3.3. Monte-Carlo-Simulationen	19
3.3.1. Einfache Gitterversion des WESS-ZUMINO-Modells	19
3.4. Gitterstörungstheorie	20
3.4.1. Propagatoren	21
3.4.2. FEYNMAN-Regeln	22
3.4.3. Kontinuumsliches	24
3.5. Symmetrieverletzung durch das Gitter	25
3.5.1. Chirale Symmetrie	26
3.5.2. Supersymmetrie	26
4. Feynman-Integrale	28
4.1. Rekursionsbeziehungen	28
4.1.1. GRÖBNER-Basen	29
4.1.2. GRÖBNER-Basen und Rekursionsrelationen	30
4.1.3. LAPORTAS Algorithmus	31
4.2. Asymptotische Entwicklung	32
4.2.1. Beispiel	32
4.2.2. Allgemeine Vorgehensweise	33
4.2.3. Konvergente Bosonenschleife	34
4.2.4. Entwicklung von Integralen mit einer Schleife	37

4.2.5. Vergleich mit numerischen Resultaten	39
5. Diskussion	43
A. Notation und Konventionen	45
B. Spinoren	46
B.1. DIRAC-Matrizen	46
B.1.1. Gerade Dimension $d = 2n$	46
B.1.2. Ungerade Dimension $d = 2n + 1$	47
B.1.3. Spezielle Darstellungen	48
B.2. Irreduzible Spinoren	49
B.2.1. Chirale Spinoren	49
B.2.2. Reelle Spinoren	50
B.2.3. Reelle chirale Spinoren	50
B.3. Gewichte	50
C. Grassmann-Variablen	52
C.1. BEREZIN-Integration	53
D. Fourier-Transformation	54
E. Alpha- und Feynman-Parameter	55
F. Formeln	56
F.1. Bosonenschleife	56
F.1.1. Ohne äußeren Impuls	56
F.1.2. Mit äußerem Impuls	57
F.2. Fermionenschleife	57
F.2.1. Nicht-renormiert	57
F.2.2. BPHZ-renormiert	57
G. MATHEMATICA-Pakete	58
G.1. Rekursionsbeziehungen	58
G.1.1. Befehle	58
G.1.2. Quelltext: <code>Recurrence.m</code>	59
G.2. Entwicklung von Ein-Schleifenintegralen	68
G.2.1. Befehle	68
G.2.2. Quelltext: <code>LoopExp.m</code>	69
Danksagung	77
Literaturverzeichnis	78
Erklärung	81

1. Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchen umfasst alle bisher bekannten Teilchen und beschreibt deren Wechselwirkung, bis auf die Gravitation, sehr erfolgreich im Rahmen einer Quantenfeldtheorie. In der Quantenfeldtheorie können die Prinzipien der Quantenphysik mit dem Raumzeitmodell der speziellen Relativitätstheorie vereint werden. Die Formulierung einer relativistischen Wellenmechanik, analog zur nichtrelativistischen Quantenmechanik, führt hingegen zu Problemen, wie z.B. dem KLEINSchen Paradoxon. Während im nichtrelativistischen Grenzfall die Ruhemasse bzw. die Anzahl der jeweiligen Teilchen erhalten bleibt, muss dies im relativistischen Fall nicht mehr zu gelten. In der Tat entstehen in Teilchenbeschleunigern durch Kollision sehr schneller Teilchen eine Vielzahl neuer Teilchen. Eine relativistische Formulierung der Quantenphysik muss daher auf dem FOCK-Raum, also der direkten Summe aller HILBERT-Räume mit konstanter Teilchenzahl, geschehen. Das wiederum führt fast zwangsläufig zu einer Quantenfeldtheorie [1].

Auch bei der Messung gibt es einen wesentlichen Unterschied zwischen relativistischer und nichtrelativistischer Quantenphysik. Will man den Ort eines Elektrons mit Hilfe eines Photons bestimmen, so kann man dies bekanntlich nur innerhalb einer gewissen Genauigkeit tun, die durch die Wellenlänge des Photons gegeben ist. Im nichtrelativistischen Grenzfall kann das Licht als unendlich schnell angesehen werden, so dass der Zeitpunkt der Messung exakt bekannt ist. Im relativistischen Fall besitzt das Licht jedoch eine endliche Geschwindigkeit, so dass neben dem Ort auch der Zeitpunkt einer Messung unscharf ist. Man kann also den zeitlichen Verlauf einer Wechselwirkung nicht beobachten, genauso wenig wie die Bahn eines Teilchens in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Es bietet sich daher die Streuung als eine Möglichkeit an, eine relativistische Quantenfeldtheorie experimentell zu überprüfen [2]. Hier sind die Teilchen anfangs weit voneinander entfernt, so dass keine Wechselwirkung stattfindet. Unter Aufwendung hoher Energien werden diese Teilchen nun sehr nahe zusammengebracht, d.h. aufeinander geschossen, so dass eine Wechselwirkung stattfinden kann. Man beobachtet die Produkte dieser Wechselwirkung erst wieder, wenn sie später weit voneinander entfernt sind und somit keine Wechselwirkung untereinander mehr stattfindet. In einem solchen Streuexperiment kann man insbesondere die Symmetrien einer Theorie überprüfen, sowie die damit nach dem NOETHERSchen Theorem [3] verbundenen Erhaltungssätze testen. Auf diese Weise ist es allerdings noch nicht gelungen, einen direkten Nachweis einer in der Natur realisierten Form der Supersymmetrie zu erhalten. Supersymmetrische Theorien besitzen jedoch interessante Eigenschaften, so dass viele Physiker auf einen Nachweis in naher Zukunft hoffen.

Die Berechnung von Streuamplituden geschieht mit Hilfe der Störungstheorie. Ihr

1. Einleitung

Anwendungsbereich ist jedoch auf kleine Kopplungskonstanten beschränkt, da in diesen entwickelt wird. Formuliert man die Quantenfeldtheorie auf einem endlichen Raumzeitgitter, so kann man numerische Simulationen durchführen, ohne diesen Einschränkungen unterworfen zu sein. Man kann so die Phasenstruktur oder das Auftreten von spontaner Symmetriebrechung numerisch untersuchen. In der Quantenchromodynamik ist insbesondere der Quarkeneinschluss ein Phänomen, das nicht störungstheoretisch behandelt werden kann. In numerischen Simulationen kann dieser jedoch untersucht werden.

Die Formulierung einer Quantenfeldtheorie auf einem Gitter ist nicht unproblematisch. Es ist nicht sofort klar, ob im Grenzfall verschwindenden Gitterabstandes auch die gewünschte kontinuierliche Theorie reproduziert wird. Dieses Problem entsteht bereits, wenn man Fermionen naiv auf das Gitter setzt. Als Folge der Diskretisierung besitzt der Fermionenpropagator zusätzliche unphysikalische Pole, die im Kontinuumslimit als zusätzliche Fermionenspezies erhalten bleiben. Dieses Problem wird daher als Fermionenverdopplung bezeichnet [4]. Da die Symmetrien einer Theorie ganz wesentlich für deren Eigenschaften sind, muss man auch hier prüfen, ob sie im Kontinuumslimit korrekt wiedergegeben werden. Diesen untersucht man mit Hilfe der Gitterstörungstheorie. Im Fall der Supersymmetrie betrachtet man die supersymmetrischen WARD-Identitäten der Kontinuumstheorie. Diese müssen im Rahmen der Gitterstörungstheorie bis auf Terme von der Ordnung der Gitterkonstanten erfüllt sein.

Im folgenden Abschnitt 2 werden die Grundlagen der Supersymmetrie kurz zusammengefasst. Abschnitt 3 befasst sich mit Gittertheorien, insbesondere mit der Gitterstörungsrechnung. Die Berechnung der FEYNMAN-Integrale, die bei der Überprüfung der WARD-Identitäten mit Hilfe der Gitterstörungsrechnung auftreten, wird in Abschnitt 4 besprochen. In Kapitel 5 werden Verbesserungsmöglichkeiten zur hier gezeigten Vorgehensweise aufgeführt.

2. Supersymmetrie

Symmetrien sind in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Dies trifft insbesondere auf die Elementarteilchenphysik zu. Ein Teilchen bleibt das gleiche, unabhängig davon an welchem Ort oder in welchem Bewegungszustand es sich befindet. Die Klassifikation der Elementarteilchen muss also eng mit der Symmetriegruppe der Raumzeit, der POINCARÉ-Gruppe, verknüpft sein.

In der Quantenphysik gilt nun zwischen Ort und Impuls eine Unschärferelation, so dass man nicht von *dem* Ort und *dem* Bewegungszustand eines Teilchens sprechen kann. Statt dessen wird der Zustand eines Teilchens durch einen Strahl in einem HILBERT-Raum beschrieben, der wiederum durch einen normierten Zustandsvektor repräsentiert werden kann. Sollen die physikalischen Aussagen, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten, unter einer Transformation durch eine kontinuierliche Symmetriegruppe gleich bleiben, dann muss diese Transformation durch einen unitären Operator dargestellt werden, der auf die möglichen Zustandsvektoren wirkt. Im Allgemeinen bilden diese unitären Operatoren eine projektive Darstellung der Symmetriegruppe. Man kann aber zur universellen Überlagerungsgruppe übergehen, wodurch man nur noch nicht-projektive unitäre Darstellungen betrachten muss, ohne dass dabei die physikalischen Aussagen der Theorie geändert werden. Die universelle Überlagerungsgruppe der eigentlichen orthochronen LORENTZ-Transformationen ist die $Sl(2, \mathbb{C})$, die so zusammen mit den Translationen die Rolle der Symmetriegruppe der Raumzeit in der Quantenphysik übernimmt.

Es ist eine natürliche Forderung, dass sich ein Zustandsvektor eines elementaren Teilchens nach einer *irreduziblen* Darstellung dieser Symmetriegruppe transformiert, da man den Zustandsvektor sonst nach invarianten Unterräumen zerlegen kann. Durch eine Klassifizierung der irreduziblen unitären Darstellungen erhält man somit eine Klassifizierung der Elementarteilchen. Nicht alle diese Darstellungen sind physikalisch relevant. Die in der Natur vorkommenden Teilchen bzw. die dazugehörigen Darstellungen können durch die Masse und den Spin bzw. die Helizität charakterisiert werden. Massive Teilchen haben einen Spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ und masselose eine Helizität $\sigma = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$. Dass ein Teilchen die Eigenschaften Masse und Spin bzw. Helizität besitzt, sowie die möglichen Werte für s und σ , ergibt sich alleine aus der Symmetriegruppe der Raumzeit.

Die obigen Überlegungen gehen im wesentlichen auf WIGNER zurück, eine genaue Darstellung mit Referenzen zu den Originalarbeiten findet sich z.B. in [1].

Neben der POINCARÉ-Gruppe können noch weitere Symmetrien vorhanden sein. Unter der Wirkung dieser Symmetrien kann ein Teilchen, genauer sein Zustandsvektor, in andere Teilchen übergehen. Die Teilchen, die unter einer Darstellung dieser Symmetrien ineinander transformieren, werden als ein *Multiplett* von Teilchen be-

2. Supersymmetrie

zeichnet.

Sind die zusätzlichen Symmetrien kontinuierlich, so können sie normalerweise durch mehrere reelle Variablen parametrisiert werden. Die Generatoren dieser Symmetrien bilden in diesem Fall eine LIE-Algebra. Nach einem Theorem von COLEMAN und MANDULA [5] müssen dann die POINCARÉ-Gruppe und die Gruppe dieser Symmetrien ein direktes Produkt bilden. Das Theorem ist allerdings auf Theorien mit massiven Teilchen beschränkt. Die restlichen Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Theorems sind in der Regel erfüllt¹. Auf dem Niveau der LIE-Algebra besagt das Theorem, dass die Generatoren der POINCARÉ-Gruppe mit allen Generatoren der zusätzlichen Symmetrien kommutieren, weshalb diese auch innere Symmetrien genannt werden. Die Teilchen transformieren daher vor und nach einer Anwendung der inneren Symmetrien nach der gleichen irreduziblen Darstellung der POINCARÉ-Gruppe. Die Teilchen in einem Multiplett der inneren Symmetrien müssen also alle die gleiche Masse und den gleichen Spin bzw. die gleiche Helizität besitzen. Dass alle Teilchen in einem Multiplett die gleiche Masse haben müssen, wurde vorher bereits von O'RAIFEARTAIGH in einem nach ihm benannten Theorem bewiesen [6].

Das Theorem von COLEMAN und MANDULA wurde als ein „No-Go“ Theorem für die Konstruktion von Multipletts, bestehend aus Teilchen mit verschiedenen Spins, angesehen. Die *Supersymmetrie* stellt hier jedoch einen Ausweg dar. Während zwischen den Generatoren in einer LIE-Algebra Kommutatorrelationen gelten, erfüllen die Generatoren der Supersymmetrie Antikommutatorrelationen. Die Parametrisierung der entsprechenden Gruppe kann daher nicht, wie bei einer LIE-Gruppe, ausschließlich durch reelle Variable erfolgen. Man benötigt hierfür zusätzliche GRASSMANN-Variablen, also antikommutierende Variablen. Die Möglichkeit, dass eine Symmetriegruppe durch GRASSMANN-Variablen parametrisiert werden kann, wurde von COLEMAN und MANDULA jedoch nicht berücksichtigt. Die Aussage des Theorems von O'RAIFEARTAIGH bleibt trotzdem gültig: Ein Multiplett der Supersymmetrie besteht aus Teilchen gleicher Masse. Daher kann die Supersymmetrie in der Natur nur als spontan gebrochene Symmetrie realisiert sein.

Bisher wurden keine Teilchen entdeckt, die über eine Supersymmetrietransformation miteinander zusammenhängen. Supersymmetrische Theorien besitzen aber einzigartige Eigenschaften. Man hat somit gute Gründe, anzunehmen, dass die Supersymmetrie in der Natur eine Rolle spielt. Diese Theorien bieten eine Möglichkeit das sogenannte Hierarchie-Problem zu lösen, also die riesige Lücke zwischen der PLANCK-Masse und der Energieskala der elektroschwachen Symmetriebrechung. Eine weitere Eigenschaft supersymmetrischer Theorien ist, dass sich bei einer störungstheoretischen Behandlung viele Divergenzen gegenseitig wegheben. Es kommt sogar vor, dass dies mit allen Divergenzen geschieht und die Theorie somit *endlich* ist. Als letzte Eigenschaft soll nochmal betont werden, dass supersymmetrische Theorien Multipletts aus Teilchen mit unterschiedlichen Spins erlauben. Die elektroschwache und die starke Wechselwirkung werden durch Teilchen mit Spin eins beschrieben.

¹Die wichtigsten Voraussetzungen sind, dass die Streumatrix nicht-trivial ist und die Streuamplituden fast überall analytisch vom Winkel abhängen.

Eine Zusammenfassung dieser Teilchen zu einem Multiplett im Sinne einer *Grand Unified Theory*, kurz GUT, ist daher ohne Supersymmetrie möglich. Man kommt aber im Rahmen einer Quantenfeldtheorie nicht mehr ohne Supersymmetrie aus, wenn man die Gravitation in dieses Multiplett einbeziehen will, denn die Gravitonen haben einen Spin von zwei.

2.1. Graduierte Lie-Algebren

Eine kontinuierliche Symmetrie, deren Generatoren Antikommutatorrelationen erfüllen, sieht im ersten Moment sehr ungewöhnlich aus, wenn man im Hinterkopf eine Parametrisierung der Gruppe durch reelle Variablen hat und somit die Generatoren eine LIE-Algebra bilden müssen.

Als Motivation für eine solche Symmetrie betrachten wir einen allgemeinen Generator G einer Symmetrie, der Einteilchenzustände in Einteilchenzustände überführt und der additiv auf direkte Produkte solcher Zustände wirkt:

$$G = \sum_{i,j} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} a_i^\dagger(\mathbf{p}) K_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_j(\mathbf{q}) \quad (2.1)$$

Hier sind die a_i^\dagger Erzeugungsoperatoren und die a_i Vernichtungsoperatoren der entsprechenden Teilchen. Diese erfüllen nun die bekannten Kommutator- oder Antikommutatorrelationen, je nachdem, ob die dazugehörigen Teilchen Bosonen oder Fermionen sind. Man kann also die Zerlegung $G = B + F$ durchführen, wobei B der Anteil ist, der Bosonen in Bosonen oder Fermionen in Fermionen transformiert, F hingegen überführt Fermionen in Bosonen oder Bosonen in Fermionen. Unter Anwendung der Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen der Erzeuger und Vernichter kann man zeigen, dass eine Symmetrie von der Form (2.1) die folgende Algebra erfüllt [7]:

$$[B_i, B_j] = c_{ij}^k B_k \quad (2.2)$$

$$[F_i, B_j] = s_{ij}^k F_k \quad (2.3)$$

$$\{F_i, F_j\} = \gamma_{ij}^k B_k \quad (2.4)$$

Es handelt sich hier um eine *graduierte* LIE-Algebra. Die B_i werden als *bosonische* Elemente bezeichnet, die F_i als *fermionische*. In den graduierten JACOBI-Identitäten ändert sich das Vorzeichen des jeweiligen Summanden, wenn zwei fermionische Generatoren ihre Reihenfolge tauschen. Die Relationen zwischen Erzeugern und Vernichtern sind ebenfalls von der Struktur (2.2–2.4), deren Graduierung überträgt sich quasi auf die Algebra der Symmetriegeneneratoren. Eine \mathbb{Z}_2 -graduierte LIE-Algebra (2.2–2.4) wird als LIE-Superalgebra bezeichnet. Eine Zusammenstellung ihrer Eigenschaften findet man z.B. in [8].

2.1.1. Parametrisierung von Supergruppen

Man möchte nun ein zur Algebra (2.4) gehörendes Gruppenelement, wie bei einer LIE-Algebra, als $\exp(i\theta^i F_i)$ schreiben. Die Gruppenmultiplikation kann dann durch eine Funktion $\gamma^i(\theta, \xi)$ beschrieben werden:

$$\exp(i\theta^i F_i) \exp(i\xi^i F_i) = \exp(i\gamma^i(\theta, \xi) F_i) \quad (2.5)$$

Entwickelt man diese Gleichung bis zur zweiten Ordnung in θ und ξ , dann erhält man mit $\gamma^i(\theta, \xi) = \theta^i + \xi^i + \frac{1}{2}\theta^j \xi^k \gamma_{jk}^i + \dots$ die Bedingung:

$$\xi^k F_k \theta^j F_j - \theta^j F_j \xi^k F_k = \theta^j \xi^k \gamma_{jk}^i F_i \quad (2.6)$$

Wenn θ und ξ reelle Variablen wären, dann würden zwischen den F_i also Kommutatoren gelten und die F_i würden eine LIE-Algebra bilden. Den Antikommutator (2.4) erhält man jedoch, wenn man fordert, dass θ und ξ untereinander und mit den F_i antikommutieren. Damit sind θ und ξ Variablen, die im fermionischen Sektor liegen, also GRASSMANN-Variablen (vgl. Abschnitt C). Das Produkt $\theta^i F_i$ liegt aber im bosonischen Sektor, so dass die Gruppenmultiplikation in der Nähe der Einheit über die BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel (A.4), in der nur *Kommutatoren* auftreten, durch die Algebra (2.2–2.4) festgelegt ist, wie man das von einer LIE-Gruppe her kennt.

2.2. Algebra der Supersymmetrie

Es stellt sich nun die Frage, wie stark die graduierte LIE-Algebra (2.2–2.4) zusätzlich eingeschränkt wird, wenn die POINCARÉ-Algebra (A.1–A.3) Bestandteil des bosonischen Sektors ist. Eine Antwort liefert das Theorem von HAAG, ŁOPUSZAŃSKI und SOHNIUS für die vierdimensionale MINKOWSKI-Raumzeit [7, 9]. Eine Verallgemeinerung dieses Theorems auf höhere Dimensionen kann man in [10] finden. Die zu dieser Algebra gehörende Gruppe wird als POINCARÉ-Supergruppe bezeichnet. Falls nur masselose Teilchen vorhanden sind, kann man die konformen Transformationen zum bosonischen Sektor hinzufügen. Das Ergebnis ist die Algebra der konformen Supersymmetrie.

Die Kommutatoren zwischen den bosonischen Generatoren sind durch das Theorem von COLEMAN und MANDULA bereits festgelegt, d.h. neben der POINCARÉ-Algebra gibt es im bosonischen Sektor nur mit deren Elementen kommutierende Generatoren der inneren Symmetrien.

Eine wesentliche Aussage des Theorems von HAAG, ŁOPUSZAŃSKI und SOHNIUS ist, dass die fermionischen Generatoren nach einer Spinordarstellung der LORENTZ-Algebra transformieren müssen, wodurch die Kommutatoren zwischen fermionischen und LORENTZ-Generatoren festgelegt sind. Zu diesem Ergebnis kommt man, indem man die Gewichte bezüglich der LORENTZ-Algebra im Sinne von Abschnitt B.3 betrachtet. Der Betrag des Gewichts eines bosonischen Generators ist kleiner oder gleich eins, denn die Generatoren der POINCARÉ-Algebra haben die Gewichte ± 1

oder 0 und die inneren Symmetrien sind LORENTZ-Skalare mit allen Gewichten gleich Null. Da die fermionischen Generatoren Fermionen in Bosonen oder Bosonen in Fermionen transformieren, können sie nach dem Spin-Statistik-Theorem keine LORENTZ-Skalare mit Gewichten gleich Null sein. Der Antikommutator zwischen zwei fermionischen Generatoren muss aber ein bosonischer Generator sein, dessen Gewicht gleich der Summe der Gewichte der beiden fermionischen Generatoren ist. Die Gewichte der fermionischen Generatoren müssen also alle gleich $\pm 1/2$ sein, was nach Abschnitt B.3 der Spinordarstellung entspricht.

Die fermionischen Generatoren kommutieren des Weiteren mit den Generatoren der Translationen P_μ . Unter einer internen Symmetrie transformieren die fermionischen Generatoren gemäß (2.3) wieder in fermionische Generatoren. Daher transformieren sie im Allgemeinen zusätzlich nach einer Darstellung der inneren Symmetrie.

Der Antikommutator zwischen zwei fermionischen Generatoren ist nach (2.4) ein bosonischer Generator. Dieser muss eine Linearkombination der P_μ und der sogenannten zentralen Ladungen sein. Die zentralen Ladungen sind wiederum Linearkombinationen der Generatoren der inneren Symmetrien, die mit *allen* anderen Generatoren kommutieren. Die genaue Form der Antikommutatoren im fermionischen Sektor hängt von den Eigenschaften der Spinoren in der entsprechenden Dimension d ab. Für $d = 2 \pmod{8}$ und MINKOWSKI-Metrik sind die irreduziblen Spinoren nach Abschnitt B.2.3 und Tabelle B.1.3 reell und chiral. Man kann die fermionischen Generatoren also wählen als Q_r^\pm mit $Q_r^\pm = \mathcal{P}_\pm Q_r^\pm$ und $Q_r^{\pm c} \equiv B_- Q_r^{\pm*} = Q_r^\pm$, wobei $B_- = \mathcal{C}\mathcal{A}^\top$ gewählt wird. Die Antikommutatoren lauten dann [10–12]:

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\pm\top}\} = -2\delta_{rs}\mathcal{P}_\pm\cancel{\mathcal{P}}\mathcal{C} \quad (2.7)$$

$$\{Q_r^\pm, Q_s^{\mp\top}\} = -z_{rs}^\pm\mathcal{P}_\pm\mathcal{C} \quad (2.8)$$

Dies ist nach (B.14) unabhängig von der Darstellung der DIRAC-Matrizen. Die z_{rs}^\pm sind die bereits erwähnten zentralen Ladungen. Durch komplexe Konjugation bzw. Transposition von (2.8) erhält man die Beziehungen $z_{rs}^\pm = -z_{rs}^{\pm*} = -z_{sr}^\mp$. Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Zahl der Ladungen Q_r^+ und Q_r^- gleich ist. Man kann dann die Relationen (2.7) und (2.8) mit Hilfe von $Q_r \equiv Q_r^+ + Q_r^-$ und $\bar{Q}_r \equiv Q_r^\dagger\mathcal{A} = Q_r^\top\mathcal{C}^{-1\top}$ zusammenfassen (nach Tabelle B.1.3 ist $c_- \equiv \mathcal{C}\mathcal{C}^{-1\top} = -1$):

$$\{Q_r, \bar{Q}_s\} = 2\delta_{rs}\cancel{\mathcal{P}} + iZ_{[rs]} + i\gamma_*Z_{(rs)} \quad (2.9)$$

Hier wurde $Z_{rs} = -iz_{rs}^+ = Z_{rs}^*$ gesetzt. Die Q_r heißen Superladungen. Die Zahl der Superladungen wird im folgenden mit N bezeichnet. Beträgt $N = 1$ so spricht man von *einfacher Supersymmetrie*, ist $N > 1$ erhält man *erweiterte Supersymmetrie*.

Zum Beweis des Theorems von HAAG, ŁOPUSZAŃSKI und SOHNIUS wird insbesondere das Spin-Statistik-Theorem genutzt und es werden nur Zustände mit positiver Norm betrachtet. Es werden daher keine Aussagen über die BRST-Transformationen einer Eichtheorie getroffen. Die Verallgemeinerung dieses Theorems wird in [10] für Dimensionen $d \geq 4$ gezeigt, insbesondere kann das Theorem von COLEMAN und MANDULA nur auf $d > 2$ verallgemeinert werden. Das Ergebnis (2.9) soll hier trotzdem auch für $d = 2$ verwendet werden, denn daraus abgeleitete Theorien sollen nur

2. Supersymmetrie

als Modell für Theorien in höheren Dimensionen dienen. Eine allgemeinere Möglichkeit für $d = 2$ ist hier nicht von Interesse.

Die Algebra der Supersymmetrie wird auch unter allgemeineren Bedingungen als im Theorem von HAAG, ŁOPUSZAŃSKI und SOHNIUS betrachtet, insbesondere tauchen dann noch andere zentrale Ladungen auf, die nicht mehr mit allen anderen Generatoren vertauschen müssen [13–15]. Ein anderer allgemeiner Zugang besteht darin, die Klassifikation der einfachen LIE-Superalgebren nach KAC zu nutzen [16, 17]. Die in Frage kommenden LIE-Superalgebren müssen die Raumzeitsymmetrien im bosonischen Sektor enthalten.

2.3. Superraum

Ein Feld $\psi(x)$ ist eine Linearkombination von Erzeugern und Vernichtern, die unter einer unitären Darstellung der POINCARÉ-Gruppe $U(\omega, a) = \exp(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + ia^\mu P_\mu)$ wie folgt transformiert:

$$U(\omega, a)\psi(x)U^{-1}(\omega, a) = D^{-1}(\omega)\psi(\exp(\omega)x + a) \quad (2.10)$$

Hier ist $D(\omega)$ eine endlichdimensionale Darstellung der LORENTZ-Gruppe, die auf die Komponenten des Feldes wirkt. Damit dies konsistent mit der Forderung ist, dass $U(\omega, a)$ eine Darstellung der POINCARÉ-Gruppe ist, muss ψ mit dem inversen Element von $D(\omega)$ transformieren. Um eine POINCARÉ-invariante Wirkung zu erhalten, kann man die LAGRANGE-Dichte, also einen aus Feldern zusammengesetzten LORENTZ-Skalar, über die gesamte Raumzeit integrieren, denn das dazugehörige Maß bleibt invariant unter einer POINCARÉ-Transformation $x \rightarrow \exp(\omega)x + a$. In diesem Abschnitt wird skizziert, wie man eine ähnliche Strategie nutzen kann, um Wirkungen zu konstruieren, die zusätzlich invariant unter der Supersymmetrie sind. Dazu wird die Raumzeit formal durch GRASSMANN-Variablen zum sogenannten *Superraum* erweitert, auf dem dann eine unter Supersymmetrie invariante Integration definiert werden kann. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf $d = 2$, $N = 1$ und verschwindende zentrale Ladungen. Es gilt also:

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2\mathcal{P} \quad (2.11)$$

$$[J_{\mu\nu}, Q] = -\Sigma_{\mu\nu}Q \quad (2.12)$$

$$[P_\mu, Q] = 0 \quad (2.13)$$

Die beiden letzten Gleichungen besagen lediglich, dass Q ein translationsinvarianter Spinor ist.

Ein Element der POINCARÉ-Supergruppe ohne LORENTZ-Gruppe kann nach Abschnitt 2.1.1 folgendermaßen geschrieben werden:

$$L(x, \theta) = \exp(ix^\mu P_\mu + i\bar{\theta}Q) \quad (2.14)$$

Hier ist θ ein MAJORANA-Spinor, dessen Komponenten GRASSMANN-Variablen sind. Der Superraum ist die Menge der linken Nebenklassen der POINCARÉ-Supergruppe

bezüglich der LORENTZ-Gruppe. Da die $L(x, \theta)$ Repräsentanten dieser Nebenklassen sind, kann der Superraum durch x und θ parametrisiert werden. Die LORENTZ-Gruppe soll durch $h(\lambda) = \exp(\frac{i}{2}\lambda^{\mu\nu} J_{\mu\nu})$ parametrisiert werden. Ein Element der POINCARÉ-Supergruppe kann dann immer geschrieben werden als $L(x, \theta)h(\lambda)$. Das Produkt zweier solcher Elemente sei nun

$$L(a, \xi)h(\omega)L(x, \theta)h(\lambda) = L(x', \theta')h(\lambda'). \quad (2.15)$$

Dann beschreiben x' und θ' die Wirkung der POINCARÉ-Supergruppe auf den Superraum. Ohne LORENTZ-Transformationen, d.h. für $\omega = 0$, erhält man mit Hilfe von (A.4, 2.11, 2.13, A.3) und $\bar{\theta}Q = \bar{Q}\theta$ ²:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} + i\bar{\xi}\gamma^{\mu}\theta, \quad \theta' = \theta + \xi \quad (2.16)$$

Aus (A.5) und der Transformationseigenschaft (2.12) von Q unter der LORENTZ-Gruppe folgt:

$$h(\omega)(\bar{\theta}Q)h(-\omega) = \bar{\theta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu})^n \right] Q \quad (2.17)$$

Eine analoge Gleichung gilt auch für P statt Q , wenn man $\Sigma_{\mu\nu}$ durch $M_{\mu\nu}$ ersetzt, vgl. (A.2). Das Ergebnis für $a = 0$ und $\xi = 0$ ist damit:

$$x' = e^{\omega}x, \quad \theta' = \exp(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu})\theta \quad (2.18)$$

Es gilt außerdem $h(\lambda') = h(\omega)h(\lambda)$. Die JACOBI-Superdeterminante der Transformationen (2.16, 2.18) ist aber gleich eins, so dass die Integration über $dx d\theta$ invariant bleibt, vgl. Abschnitt C.1.

2.3.1. Superfelder

Ein Superfeld $\phi(x, \theta)$ auf dem Superraum ist analog zu (2.10) durch folgendes Transformationsverhalten definiert:

$$L(a, \xi)\phi(x, \theta)L^{-1}(a, \xi) = \phi(x + a + i\bar{\xi}\gamma^{\mu}\theta, \theta + \xi) \quad (2.19)$$

$$h(\omega)\phi(x, \theta)h^{-1}(\omega) = D^{-1}(\omega)\phi(\exp(\omega)x, \exp(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu})\theta) \quad (2.20)$$

Eine Darstellung Q_d von Q als Differentialoperator bekommt man, indem man die rechte Seite von (2.19) als $L_d^{-1}(0, \xi)\phi(x, \theta) = \exp(-i\bar{\xi}Q_d)\phi(x, \theta) = \phi(x + i\bar{\xi}\gamma^{\mu}\theta, \theta + \xi)$ ansetzt und in $\bar{\xi}$ entwickelt. Das Ergebnis lautet:

$$Q_d = -\not{\partial}\theta + i\partial_{\bar{\theta}}, \quad \bar{Q}_d = +\bar{\theta}\not{\partial} - i\partial_{\theta} \quad (2.21)$$

Auf die gleiche Weise kann man auch Darstellungen $(P_d)_{\mu}$ und $(J_d)_{\mu\nu}$ von P_{μ} und $J_{\mu\nu}$ bekommen, die dann per Konstruktion die Algebra (2.11–2.13) erfüllen. Damit

²Diese Beziehung gilt für beliebige antikommutierende MAJORANA-Spinoren, denn mit $c_{-} \equiv CC^{-1T} = -1$ hat man $\bar{\theta}Q = -Q^T\bar{\theta}^T = -Q^{\dagger}C^TC^{-1}\theta = \bar{Q}\theta$. Diese Beziehung kann man auch aus den FIERZ-Identitäten folgern [7].

2. Supersymmetrie

\bar{Q}_d eine Darstellung von \bar{Q} ist, muss $Q_d = \mathcal{C}\bar{Q}_d^\top$ gelten. Es gilt auch $\bar{Q}_d = Q_d^\dagger \mathcal{A}$, falls $\partial_\mu^\dagger = -\partial_\mu$ und $\partial_{\bar{\theta}}^\dagger = +\partial_{\bar{\theta}}$ ist³, was im Sinne eines inneren Produktes durch Integration über den Superraum zu interpretieren ist.

2.3.2. Kovariante Ableitung

Man kann einen spinoriellen Ableitungsoperator D konstruieren, der unter der Transformation (2.16) invariant bleibt. D muss also mit $\bar{\xi}Q_d$ kommutieren bzw. mit Q_d antikommutieren. Die Q_d erzeugen eine Linkswirkung durch $L(0, \xi)L(x, \theta) = \exp(-i\bar{\xi}Q_d)L(x, \theta)$. Man konstruiert die $-iD$ als Generatoren einer Rechtswirkung:

$$L(x, \theta)L(0, \xi) = \exp(+\bar{\xi}D)L(x, \theta) \quad (2.22)$$

Die Assoziativität der Gruppenmultiplikation äußert sich darin, dass die Reihenfolge, in der die Links- und Rechtswirkung ausgeführt werden, keine Rolle spielt. Es gilt dann also per Konstruktion $\{D, Q_d^\top\} = 0$. Aus (2.22), (2.15) und (2.16) kann D bestimmt werden:

$$D = -i\bar{\theta}\partial_\theta + \partial_{\bar{\theta}}, \quad \bar{D} = +i\bar{\theta}\partial_\theta - \partial_{\bar{\theta}} \quad (2.23)$$

Die Phasen von D und \bar{D} wurden so gewählt, dass $(D\phi)^\dagger \mathcal{A} = \bar{D}\phi^*$ für jede bosonische Superraumfunktion $\phi(x, \theta)$ ist. Es gilt wieder $D = \mathcal{C}\bar{D}^\top$, \bar{D} antikommutiert also auch mit allen Q_d bzw. \bar{Q}_d . Damit $\bar{D} = D^\dagger \mathcal{A}$ gilt, muss D^\dagger durch $(D\phi)^\dagger = D^\dagger \phi^*$ für bosonisches ϕ definiert werden. Dies unterscheidet sich von der Definition von Q_d^\dagger über ein inneres Produkt genau um ein Vorzeichen, d.h. $(Q_d\phi)^\dagger \mathcal{A} = -\bar{Q}_d\phi^*$ für bosonisches ϕ .

2.4. Wess-Zumino-Modell

In zwei Dimensionen besitzt θ zwei Komponenten. Daher ist eine beliebige Funktion auf dem Superraum höchstens quadratisch in den Komponenten von θ . Ein Superfeld kann dann immer geschrieben werden als:

$$\phi(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \quad (2.24)$$

Damit dieses Superfeld einem irreduziblen Multipllett an Teilchen entspricht, müssen noch unter Supersymmetrie invariante Bedingungen an ϕ gestellt werden. ϕ kann reell gewählt werden, denn mit ϕ ist auch $\delta_\xi \phi = -i\bar{\xi}Q_d\phi$ reell. Hier soll $\phi(x, \theta)$ außerdem ein skalares Superfeld sein, also nach (2.19, 2.20) mit $D(\omega) = 1$ transformieren. $A(x)$ und $F(x)$ müssen dann reelle Skalarfelder und $\psi(x)$ ein reelles Spinorfeld sein. Da $A(x)$, $F(x)$ und $\psi(x)$ unter einer POINCARÉ-Transformation nach (2.10) transformieren, besitzt auch $\phi(x, \theta)$ unter einer POINCARÉ-Transformation das richtige

³Mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger$ gilt dann $\partial_{\bar{\theta}}^\dagger \mathcal{A} = \partial_{\mathcal{A}\theta} \mathcal{A} = \partial_\theta$.

Transformationsverhalten. Soll $\phi(x, \theta)$ auch unter einer Supersymmetrietransformation $L(0, \xi)$ nach (2.19) transformieren, dann muss $\delta_\xi \phi = -i\bar{\xi}Q_d\phi$ gelten, bzw.⁴

$$\delta_\xi A = \bar{\xi}\psi, \quad \delta_\xi \psi = (F - i\not{\partial}A)\xi \quad \text{und} \quad \delta_\xi F = -i\bar{\xi}\not{\partial}\psi. \quad (2.25)$$

Man sieht, dass die Bosonenfelder A und F unter Supersymmetrie in das Fermionenfeld ψ transformieren und umgekehrt.

Eine reelle supersymmetrische Wirkung S ist:

$$S = \int d^2x d^2\theta \left(\frac{1}{4}\bar{D}\phi D\phi + V(\phi) \right) \quad (2.26)$$

Hier wird $d^2\theta$ durch $\int d^2\theta \bar{\theta}\theta = 2$ bzw. $\int d^2\theta \dots = \frac{1}{2}\partial_\theta\partial_{\bar{\theta}}\dots$ definiert. Die reelle Funktion V wird Superpotential genannt. Ausführen der Integration über $d^2\theta$ ergibt:

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A \partial^\mu A + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + F^2 + 2FV'(A) - \bar{\psi}\psi V''(A) \right) \quad (2.27)$$

Eine Wirkung dieser Art wird „off-shell“ genannt, denn die Bewegungsgleichung für F ist algebraisch, d.h. F ist kein dynamisches Feld und kann aus der Wirkung eliminiert werden. Die Bewegungsgleichung für F lautet $F = -V'(A)$. Man gelangt so zur „on-shell“-Version der Wirkung:

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A \partial^\mu A + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - V'^2(A) - \bar{\psi}\psi V''(A) \right) \quad (2.28)$$

Die einfachste noch wechselwirkende Theorie erhält man mit dem Superpotential $V(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{1}{3}\lambda\phi^3$:

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x \frac{1}{2} \left(-A \partial_\mu \partial^\mu A - m^2 A^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - 2m\lambda A^3 - \lambda^2 A^4 - 2\lambda A \bar{\psi}\psi \right) \\ \delta_\xi A &= \bar{\xi}\psi, \quad \delta_\xi \psi = -(i\not{\partial}A + mA + \lambda A^2)\xi \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die nackten Massen von Bosonen und Fermionen sind gleich und die Kopplungskonstanten sind voneinander abhängig, was typisch für supersymmetrische Theorien ist.

Die „off-shell“-Wirkung (2.27) hat den Vorteil, dass die Transformationen der Felder (2.25) linear sind. Dies ist für einige Rechnungen praktischer.

⁴Hier wurde $\theta\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta$ benutzt, d.h. die Matrix $\theta\bar{\theta}$ ist proportional zur Einheitsmatrix. Jede auf Spinoren wirkende Matrix ist eine Linearkombination der Einheitsmatrix und antisymmetrisierten Produkten der DIRAC-Matrizen. Daraus folgende Identitäten werden FIERZ-Identitäten genannt.

3. Quantenfelder auf einem Gitter

Das Pfadintegral stellt eine Möglichkeit dar, Erwartungswerte der Observablen einer Quantenfeldtheorie zu berechnen, ohne dabei auf die Störungstheorie und die damit verbundene Einschränkung kleiner Kopplungskonstanten angewiesen zu sein. Zur Auswertung des Pfadintegrals wird die Raumzeit diskretisiert. Das verbleibende Integral kann sehr effektiv mit Hilfe statistischer Methoden ausgewertet werden.

3.1. Pfadintegral

Die Formulierung der Quantenmechanik über das Pfadintegral stellt eine anschauliche Verbindung zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten der Quantenmechanik und dem HAMILTONSchen Prinzip der stationären Wirkung her. Hat man beispielsweise ein Teilchen an einem bestimmten Ort gemessen und will nun berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit es zu einem späteren Zeitpunkt an einem anderen Ort gemessen werden kann, dann kann dies mit Hilfe eines Pfadintegrals durchgeführt werden. Dazu wird über alle Teilchenbahnen integriert, die diese beiden Orte in dem gewünschten Zeitintervall verbinden, wobei die Bahnen mit stationärer Wirkung am stärksten beitragen. Es wird so ein Zusammenhang zwischen dem klassischen Konzept der Bahn eines Teilchens und dem quantenmechanischen Konzept der Übergangswahrscheinlichkeiten hergestellt. Die klassische Mechanik ist somit eine Näherung, in der nur die wahrscheinlichste Bahn eines Teilchens berücksichtigt wird, so dass man von *der* Bahn eines Teilchens sprechen kann.

In der Quantenfeldtheorie wird entsprechend über alle möglichen Feldkonfigurationen integriert. Bei Fermionen dürfen nur Feldkonfigurationen berücksichtigt werden, die, grob gesagt, dem PAULI-Prinzip genügen. Dies wird erreicht, indem man die Feldkonfigurationen durch GRASSMANN-Variablen beschreibt. Im klassischen Limes verhalten sich fermionische Felder auf Grund des PAULI-Prinzips nicht wie klassische Felder, sondern eher wie Teilchen. Zwei identische Teilchen können sich beispielsweise nicht am selben Ort aufhalten, was der Tatsache entspricht, dass sich identische Fermionen nicht im gleichen Zustand befinden können. Es ist also nicht verwunderlich, dass fermionische Quantenfelder im Pfadintegral nicht durch klassisch interpretierbare Feldkonfigurationen beschrieben werden können.

Im Folgenden werden die Quantenfelder mit $Q_i(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet. Die $q_i(\mathbf{x}, t)$ sind ihre Eigenwerte, d.h. $Q_i(\mathbf{x}, t) |q\rangle = q_i(\mathbf{x}, t) |q\rangle$. Für fermionische Felder sind die q_i GRASSMANN-Variablen, siehe Abschnitt C. Die Operatoren $Q_i(\mathbf{x}, t)$ erfüllen Bewegungsgleichungen, die sich aus der Bedingung ergeben, dass das Wirkungsfunktional $S[Q]$ extremal sein soll. Vakuumerwartungswerte zeitgeordneter Produkte der

$Q_i(\mathbf{x}, t)$ werden wie folgt mit dem Pfadintegral bestimmt:

$$i^n \langle T \{ Q_{i_1}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots Q_{i_n}(\mathbf{x}_n, t_n) \} \rangle = \left(\frac{1}{Z[J]} \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J_{i_1}(x_1) \dots \partial J_{i_n}(x_n)} \right)_{J=0} \quad (3.1)$$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q e^{iS[q] + i \int dx J_i q_i} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}q = \prod_{i, \mathbf{x}, t} dq_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

Aus diesen Vakuumerwartungswerten können nun beispielsweise Streumatrixelemente berechnet werden. Dies ist nicht die allgemeinste Form des Pfadintegrals, denn die zu $Q_i(\mathbf{x}, t)$ konjugierten Impulse $P_i(\mathbf{x}, t)$ wurden bereits ausintegriert, was nicht immer ohne Weiteres möglich ist. Hier wurden außerdem zusätzliche infinitesimale Terme proportional zu $i\epsilon$ unterdrückt, die in die Wirkung eingefügt werden müssen und die durch Entwicklung des Vakuumzustandes nach den $|q\rangle$ entstehen. Diese Terme sind wichtig für die Berechnung von Propagatoren. Besonderer Sorgfalt bedarf der -nicht immer eindeutige- Übergang von $S[Q]$ nach $S[q]$, denn hier müssen gegebenenfalls gewisse mit der Definition des Maßes des Pfadintegrals verknüpfte Konventionen eingehalten werden. Derartige Details zum Pfadintegral sind zum Beispiel in [1] dargestellt.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Felder in den Erwartungswerten bereits zeitgeordnet sind, so dass der Zeitordnungsoperator T weggelassen werden kann.

3.1.1. Euklidisches Pfadintegral

Das Pfadintegral (3.2) ist schwierig zu handhaben, da der Integrand $\exp(iS[q])$ zwischen benachbarten Pfaden stark oszillieren kann. Für mathematische Beweise oder numerische Rechnungen geht man besser zum EUKLIDISCHEN Pfadintegral über.

Zur EUKLIDISCHEN Wirkung S_E gelangt man durch die Substitutionen $t \rightarrow -it$ und $iS \rightarrow -S_E$. Der Integrand im Pfadintegral ist dann durch $\exp(-S_E)$ gegeben. Wege mit annähernd stationärer Wirkung liefern daher den Hauptbeitrag zum Pfadintegral. Stark davon abweichende Wege sind exponentiell unterdrückt, was insbesondere für numerische Rechnungen vorteilhaft ist.

In der Wirkung sollen außerdem nur EUKLIDISCHE DIRAC-Matrizen vorkommen, was durch weitere Substitutionen $\gamma_j \rightarrow -i\gamma_j$ für $j \geq 1$ geschieht, d.h. $i\cancel{\partial} \rightarrow -\delta^{jk}\gamma_j\partial_k$.

Aus der EUKLIDISCHEN Formulierung kann man die Ergebnisse für die MINKOWSKI-Metrik rekonstruieren, sofern die OSTERWALDER-SCHRADER-Axiome erfüllt sind [18, 19]. Um viele physikalisch interessante Fragen zu beantworten, ist es aber nicht notwendig, zurück zur MINKOWSKI-Metrik zu gehen.

3.2. Euklidisches Wess-Zumino-Modell

Die EUKLIDISCHE Version von (2.29) wird nun nach Abschnitt 3.1.1 bestimmt. Insbesondere wird *überall* t durch $-it$ ersetzt. Das Ergebnis ist:

$$S_E = \int d^2x \frac{1}{2} (-A \square A + m^2 A^2 + \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi + 2m\lambda A^3 + \lambda^2 A^4 + 2\lambda A \bar{\psi} \psi) \\ \delta_\xi A = \bar{\xi} \psi, \quad \delta_\xi \psi = (\not{\partial} A - mA - \lambda A^2) \xi \quad (3.3)$$

Skalarprodukte, wie $\square \equiv \partial_i \partial^i$ und $\not{\partial}$, sind jetzt in EUKLIDISCHER Metrik zu verstehen. An (B.13) erkennt man, dass \mathcal{C} nach den Substitutionen $\gamma_j \rightarrow -i\gamma_j$ für $j \geq 1$ nicht geändert werden muss. Es kann also in EUKLIDISCHER Metrik das gleiche \mathcal{C} wie in der MINKOWSKI-Metrik gewählt werden. Die Gleichung $\psi = \mathcal{C} \bar{\psi}^\top$ bleibt somit beim Übergang zur EUKLIDISCHEN Metrik erhalten. \mathcal{A} in $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \mathcal{A}$ ändert sich jedoch. In der Darstellung (B.6, B.7) und allen unitär äquivalenten Darstellungen gilt insbesondere $\mathcal{A} = \gamma_*$. Die Ladungskonjugation ist gegeben durch $\psi^c \equiv B_+ \psi^*$ mit $B_+ = \mathcal{C} \mathcal{A}^\top$.

Analog kann man auch für die „off-shell“-Wirkung, die noch vom Hilfsfeld F abhängt, eine EUKLIDISCHE Version erhalten.

3.2.1. Ward-Identitäten

Zur Herleitung von WARD-Identitäten für das zweidimensionale EUKLIDISCHE WESS-ZUMINO-Modell betrachtet man nun eine Supersymmetrietransformation des Ausdrucks

$$Z[J, \bar{\theta}] = \int \mathcal{D}F \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi e^{-S_E[F, A, \psi] + \int dx (JA + \bar{\theta} \psi)}. \quad (3.4)$$

Das Maß bleibt hierbei invariant, was man an der EUKLIDISCHEN Version von (2.25) erkennt. Deshalb wurde das Hilfsfeld F vorübergehend wieder eingeführt. Gleiches gilt auch für die Wirkung, es müssen nur die Stromterme $JA + \theta\psi$ variiert werden. Da die Erwartungswerte invariant unter der Supersymmetrie sein sollen, ist auch Z selbst invariant, d.h. $\delta_\xi Z[J, \theta] = 0$. Es gilt also:

$$0 = \int \mathcal{D}F \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi e^{-S_E[F, A, \psi] + \int dx (JA + \theta\psi)} \int dx (J \delta_\xi A + \bar{\theta} \delta_\xi \psi) \quad (3.5)$$

WARD-Identitäten erhält man, indem man hiervon Funktionalableitungen nach J und $\bar{\theta}$ berechnet und anschließend $J = 0 = \bar{\theta}$ setzt. Die einfachsten Identitäten sind:

$$\langle \delta_\xi A(x) \rangle = 0, \quad \langle \delta_\xi \psi(x) \rangle = 0 \quad (3.6)$$

Ausführlich lauten diese mit $\langle \not{\partial} A \rangle = 0$ ¹:

$$\langle \psi \rangle = 0, \quad m \langle A \rangle + \lambda \langle A^2 \rangle = 0 \quad (3.7)$$

¹Dies folgt aus der Translationsinvarianz des Vakuums und der Tatsache, dass $i\partial_\mu$ eine Darstellung von P_μ auf den Feldern ist.

3.3. Monte-Carlo-Simulationen

Betrachtet man ein endliches Raumzeitgitter, dann reduziert sich das Pfadintegral auf ein Integral über endlich viele Variablen. Dieses Integral ist aber sehr hochdimensional, denn z.B. bei einem vierdimensionalen Gitter mit jeweils 10 Gitterpunkten in jeder Richtung und Integration über ein reelles skalares Feld, ist das resultierende Integral 10^4 -dimensional.

Das EUKLIDISCHE Pfadintegral für ein solches Gitter kann aber gut mit Hilfe von statistischen Methoden approximiert werden. Dazu wird das Pfadintegral für zufällige Feldkonfigurationen ausgewertet. Der Mittelwert dieser Ergebnisse dient als Abschätzung des Pfadintegrals. In der Praxis generiert man sich bevorzugt Feldkonfigurationen, die einen großen Beitrag zum Pfadintegral leisten, also Feldkonfigurationen mit möglichst kleiner Wirkung. Optimal geeignet sind Ensembles von Konfigurationen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $e^{-S_E[q]}$ verteilt sind. Einige Algorithmen hierfür sind in [4] dargestellt.

Während bosonische Feldkonfigurationen durch reelle Zahlen beschrieben werden, sind die der Fermionen durch GRASSMANN-Variablen gegeben. Bevor man eine Simulation am Computer durchführen kann, müssen diese ausintegriert werden, was in der Regel ohne Probleme möglich ist, da die Wirkung für alle realistischen Theorien quadratisch in den Fermionefeldern ist. Durch die Integration kommt aber eine Determinante² ins Pfadintegral, die wegen der Wechselwirkungsterme zwischen Fermionen und Bosonen von den bosonischen Feldern abhängt und so zu einem stark erhöhten Rechenaufwand führt.

3.3.1. Einfache Gitterversion des Wess-Zumino-Modells

Um zu einer Gitterformulierung des Pfadintegrals zu gelangen, muss man sich zunächst für eine diskretisierte Form der Wirkung entscheiden. Insbesondere hat man viele Freiheiten bei der Diskretisierung der Ableitungsoperatoren. Der Einfachheit halber betrachten wir hier die Folgenden:

$$\square A(x) \rightarrow a^2 \sum_y \square_{xy} A_y \equiv a^2 \sum_y \sum_{i=1}^2 \frac{1}{a^4} (\delta_{x+ae_i y} + \delta_{x-ae_i y} - 2\delta_{xy}) A_y \quad (3.8)$$

$$\partial_i \psi(x) \rightarrow a^2 \sum_y (\partial_i)_{xy} \psi_y \equiv a^2 \sum_y \frac{1}{2a^3} (\delta_{x+ae_i y} - \delta_{x-ae_i y}) \psi_y \quad (3.9)$$

Hier ist e_i ein Einheitsbasisvektor des kubischen Gitters und a der Gitterabstand. Die Indizes, wie z.B. i , sollen nun die Werte 1 und 2 annehmen können, wie es bei EUKLIDISCHER Metrik üblich ist. Nach (D.2) gilt $\frac{\delta_{xy}}{a^2} \rightarrow \delta(x-y)$ im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$. Es gilt also für $a \rightarrow 0$:

$$\square_{xy} \rightarrow \square \delta(x-y), \quad (\partial_i)_{xy} \rightarrow \partial_i \delta(x-y) \quad (3.10)$$

²Für MAJORANA-Spinoren ergibt sich statt der Determinanten die sogenannte PFAFFSche Determinante.

3. Quantenfelder auf einem Gitter

Die Ableitungen im Kontinuum sind hier immer nach x zu bilden.

Die Wirkung (3.3) wird nun mit Hilfe dieser Ableitungen diskretisiert und in freie Theorie S_0 und Wechselwirkung S_I zerlegt:

$$S_0(A, \psi) = \frac{a^4}{2} \sum_{x,y} (A_x D_{xy}^B A_y + \bar{\psi}_x D_{xy}^F \psi_y) \quad (3.11)$$

$$S_I(A, \psi) = \frac{a^2}{2} \sum_x (2m\lambda A_x^3 + \lambda^2 A_x^4 + 2\lambda A_x \bar{\psi}_x \psi_x) \quad (3.12)$$

Hier sind D_{xy}^B und D_{xy}^F gegeben durch:

$$D_{xy}^B = -\square_{xy} + m^2 \frac{\delta_{xy}}{a^2}, \quad D_{xy}^F = \not{\partial}_{xy} + m \frac{\delta_{xy}}{a^2} - \frac{ar}{2} \square_{xy} \quad (3.13)$$

Der Term proportional zu r verschwindet im Kontinuumsimes. Seine Bedeutung wird in Abschnitt 3.4.3 erklärt. r heißt WILSON-Parameter, man spricht bei diesem D_{xy}^F auch von WILSON-Fermionen.

3.4. Gitterstörungstheorie

Es genügt nicht, eine Wirkung auf dem Gitter zu konstruieren, die im Limes $a \rightarrow 0$ die Form der gewünschten Kontinuumswirkung annimmt. Der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ ist subtiler. Für die Kontinuumsstörungstheorie können im Allgemeinen nur analytische Aussagen innerhalb der Störungstheorie getroffen werden. Man kann nun, analog zum Kontinuum, Störungstheorie auf dem Gitter betreiben. Dadurch ist man in der Lage, Erwartungswerte im Rahmen der Gitterstörungstheorie zu berechnen, und diese im Grenzfall $a \rightarrow 0$ zu betrachten. Man fordert, dass diese mit entsprechenden Erwartungswerten aus der Störungstheorie im Kontinuum übereinstimmen. Dies ist nicht immer der Fall, auch nicht, wenn die Wirkungen im Grenzfall $a \rightarrow 0$ naiv übereinstimmen. Einen Überblick über die Gitterstörungstheorie bietet [20].

Zur Herleitung der Gitterstörungstheorie betrachtet man:

$$Z(J, \bar{\theta}) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi e^{-S_0(A, \psi) - S_I(A, \psi) + \sum_x (J_x A_x + \bar{\theta}_x \psi_x)} \quad (3.14)$$

$$Z_0(J, \bar{\theta}) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi e^{-S_0(A, \psi) + \sum_x (J_x A_x + \bar{\theta}_x \psi_x)} \quad (3.15)$$

Den Term $e^{-S_I(A, \psi)}$ kann man als Potenzreihe auffassen. Jedes Monom dieser Potenzreihe kann in Form von Ableitungen nach den äußeren Strömen umgeschrieben werden. Zieht man diese aus dem Integral heraus, erhält man schließlich:

$$Z(J, \bar{\theta}) = e^{S_I(\partial_J, \partial_{\bar{\theta}})} Z_0(J, \bar{\theta}) \quad (3.16)$$

$Z_0(J, \bar{\theta})$ ist ein GAUSSSches Integral und kann berechnet werden. Die Gitterstörungstheorie beruht darauf, dass die Kopplungskonstanten klein sind. Damit ist auch die

Wechselwirkung S_I klein, so dass der Term $e^{-S_I(\partial_J, \partial_{\bar{\theta}})}$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann. Das Aufstellen dieser Störungsreihe geschieht mit Hilfe einer Gitterversion der FEYNMAN-Regeln und der dazugehörigen FEYNMAN-Diagramme, siehe Abschnitt 3.4.2. Erwartungswerte können dann mit Hilfe von (3.1) berechnet werden, es entfällt lediglich der Faktor i^n . Die Gitterstörungstheorie wird für unendlich große Gitter formuliert, damit man die Formeln aus Abschnitt D verwenden kann.

3.4.1. Propagatoren

Es wird nun $Z_0(J, \bar{\theta})$ bestimmt. Offenbar gilt $Z_0(J, \bar{\theta}) = Z_0^B(J)Z_0^F(\bar{\theta})$ mit

$$Z_0^B(J) = \int \mathcal{D}A \exp \left(-\frac{a^4}{2} \sum_{x,y} A_x D_{xy}^B A_y + \sum_x J_x A_x \right) \quad (3.17)$$

$$Z_0^F(\bar{\theta}) = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(-\frac{a^4}{2} \sum_{x,y} \psi_x^\top \mathcal{C}^{-1\top} D_{xy}^F \psi_y + \sum_x \bar{\theta}_x \psi_x \right). \quad (3.18)$$

Diese GAUSSSchen Integrale können leicht berechnet werden. Man beachte, dass D_{xy}^B und D_{xy}^F translationsinvariant sind, so dass man $D^B(p)$ und $D^F(p)$ nach (D.5) bestimmen kann. Man definiert Δ_{xy}^B durch $\Delta^B(p) = (D^B(p))^{-1}$. Mit (D.2) gilt dann:

$$a^2 \sum_y D_{xy}^B \Delta_{yz}^B = \frac{\delta_{xz}}{a^2} \quad (3.19)$$

Im Kontinuumsimes ist deshalb $\Delta_{yz}^B = (D^B)_{xy}^{-1}$. Auf dem Gitter gilt hingegen $\Delta_{yz}^B = (a^4 D^B)_{xy}^{-1}$. Entsprechend wird auch $\Delta_{yz}^F = (a^4 D^F)_{xy}^{-1}$ definiert.

Für die Berechnung der GAUSSSchen Integrale muss nun beachtet werden, dass ψ ein MAJORANA-Spinor und daher nicht unabhängig von $\bar{\psi}$ ist. Nutzt man weiterhin, dass θ ebenfalls MAJORANA-Spinor sein soll, d.h. $\bar{\theta} = \theta^\top \mathcal{C}^{-1\top}$, und beachtet $\mathcal{C}^\top = -\mathcal{C}$ sowie die Antisymmetrie von $\mathcal{C}^{-1} D^F$, dann erhält man:

$$Z_0^B(J) = \left(\det \frac{a^4 D^B}{2\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{x,y} J_x \Delta_{xy}^B J_y \right) \quad (3.20)$$

$$Z_0^F(\bar{\theta}) = \text{Pf} (a^4 \mathcal{C}^{-1} D^F) \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{x,y} \bar{\theta}_x \Delta_{xy}^F \theta_y \right) \quad (3.21)$$

Hier ist Pf die PFAFFSche Determinante. Hätte man keine MAJORANA-Spinoren, würde dort die gewöhnliche Determinante von $a^2 D^F$ ohne Faktor \mathcal{C}^{-1} stehen und der Exponent wäre doppelt so groß³. Es gilt $(\text{Pf } M)^2 = \det M$ [21]. Die Vorfaktoren vor

³Hier wurde bereits berücksichtigt, dass der Vorfaktor des kinetischen Terms in der Wirkung dann doppelt so groß ist, wie der von MAJORANA-Spinoren, d.h. D^F muss durch $2D^F$ ersetzt werden.

3. Quantenfelder auf einem Gitter

den Exponentialfunktionen spielen aber für die Berechnung von Erwartungswerten keine Rolle, da sie in (3.1) herausfallen.

Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\hat{p}_i = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_i}{2}\right) \quad \text{und} \quad m_r(p) = m + \frac{ar}{2} \sum_i \hat{p}_i \hat{p}_i \quad (3.22)$$

ergibt sich aus (D.5):

$$D^B(p) = \sum_i \hat{p}_i \hat{p}_i + m^2 \quad (3.23)$$

$$D^F(p) = \sum_j \frac{i}{a} \sin(ap_j) \gamma_j + m_r(p) \quad (3.24)$$

Die Propagatoren im Impulsraum sind also:

$$\Delta^B(p) \equiv (D^B(p))^{-1} = \frac{1}{\sum_i \hat{p}_i \hat{p}_i + m^2} \quad (3.25)$$

$$\Delta^F(p) \equiv (D^F(p))^{-1} = \frac{-\sum_j \frac{i}{a} \sin(ap_j) \gamma_j + m_r(p)}{\sum_i \left(\frac{1}{a} \sin(ap_i)\right)^2 + m_r^2(p)} \quad (3.26)$$

Die Propagatoren im Ortsraum $\langle A_x A_y \rangle_0 \equiv \Delta_{xy}^B$ und $\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle_0 \equiv \Delta_{xy}^F$ können mit (D.5) berechnet werden.

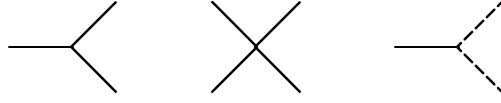
3.4.2. Feynman-Regeln

Die FEYNMAN-Regeln beschreiben nun genau wie im Kontinuum die Entwicklung von (3.16) nach S_I , also die Störungstheorie, mit Hilfe von FEYNMAN-Diagrammen. Die Form der Wechselwirkung S_I legt die möglichen FEYNMAN-Diagramme fest. Mit Hilfe der FEYNMAN-Regeln wird jedes Diagramm in ein Integral übersetzt und anschließend werden alle Integrale summiert.

In den FEYNMAN-Diagrammen wird jeder Wechselwirkungsterm in S_I durch einen Punkt bzw. Vertex symbolisiert. Die n -te Ordnung der Entwicklung von $e^{-S_I(\partial_J, \partial_{\bar{\theta}})}$ wird also durch Diagramme mit n Vertizes dargestellt. Der Propagator Δ_{xy}^B wird durch Linien dargestellt, Δ_{xy}^F entsprechend durch eine andere Art von Linien. Jeweils zwei Ableitungen ∂_J bzw. $\partial_{\bar{\theta}}$ erzeugen durch ihre Wirkung auf (3.20) bzw. (3.21) einen Propagator. Die Vertizes werden daher durch Linien verbunden, wobei mit jedem Vertex genauso viele Linien einer bestimmten Art verbunden sein müssen, wie der dazugehörige Wechselwirkungsterm Felder dieser Art enthält. Bildet man den Erwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von Feldern, wird jedes dieser Felder durch einen äußeren Vertex mit nur einer Linie der Art des Feldes dargestellt⁴.

⁴Hier und im Folgenden wird angenommen, dass die Felder der äußeren Vertizes alle an verschiedenen Gitterpositionen ausgewertet werden.

Es sollen nun die FEYNMAN-Regeln für (3.12) aufgestellt werden. Die Felder ψ sollen eine gestrichelte Linie und die Felder A eine durchgezogene Linie bekommen. Den drei Termen in (3.12) entsprechen dann folgende Vertizes:



Die FEYNMAN-Regeln sollen im Impulsraum formuliert werden. Dazu werden die Propagatoren Δ_{xy}^B und Δ_{xy}^F mit (D.5) durch ihre FOURIER-Transformierte ersetzt:

$$\Delta_{xy}^{B,F} = \int_{BZ} d^2p e^{ipx} e^{-ipy} \frac{\Delta^{B,F}(p)}{(2\pi)^2} \quad (3.27)$$

Der Term $(2\pi)^{-2}\Delta^{B,F}(p)$ wird den Linien zugeordnet, der Term e^{ipx} bzw. e^{-ipy} dem zu x bzw. y gehörenden Vertex. Für zwei durch eine Linie verbundene Vertizes hat p unterschiedliche Vorzeichen, was als ein- und auslaufender Impuls interpretiert wird. Die FEYNMAN-Diagramme sind also wie folgt in Formeln zu übersetzen:

1. Eine Bosonenlinie entspricht einen Faktor $(2\pi)^{-2}\Delta^B(p)$, eine Fermionenlinie $(2\pi)^{-2}\Delta^F(p)$, wobei jede Linie eine andere Impulsvariable erhält.
2. Äußere Vertizes bekommen einen Faktor $e^{\pm ipx}$. Bei inneren Vertizes kommt für jede Linie ein solcher Faktor hinzu, diese werden allerdings über alle x summiert und mit $-a^2$ sowie der Kopplungskonstante multipliziert. Es entsteht somit insgesamt ein Faktor $-(2\pi)^2\delta_P(\sum p)$ multipliziert mit der Kopplungskonstante. Die Summe im Argument von δ_P läuft über alle ein- und auslaufenden Impulse. Man hat also an jedem Vertex eine Impulserhaltung bis auf Vielfache von $2\pi/a$ für jede Impulskomponente.
3. Über jede Impulsvariable wird integriert und die Spinorindizes werden entlang der Fermionenlinien kontrahiert. Da jeder Vertex einen δ_P -Faktor beiträgt und der Integrand die selbe Periodizität wie δ_P besitzt, sind viele dieser Integrationen trivial.
4. Zusätzliche Vorfaktoren können, wie im Kontinuum, aus den Symmetrien des Diagramms abgelesen werden. Da die Fermionfelder bzw. die Ableitungen $\partial_{\bar{\theta}}$ antikommutieren, können noch Vorzeichenwechsel auftreten. Eine geschlossene Fermionenlinie erzeugt einen zusätzlichen Faktor -1 .

Die FOURIER-Transformierten der Erwartungswerte erhält man, indem man an den äußeren Vertizes den Faktor $e^{\pm ipx}$ weglässt, die zugehörige Integration über p nicht durchführt und für jeden äußeren Vertex einen Faktor $(2\pi)^2$ hinzufügt. Die δ_P werden jetzt durch Ausführen der trivialen Integrationen eliminiert. Es bleibt ein $\delta_P(\sum p)$ übrig, bei dem die Summe nur über die Impulse geht, die von den äußeren Vertizes her ein- und auslaufen. Die verbleibenden Integrationsvariablen werden Schleifenimpulse genannt, ihre Anzahl ist die Zahl der Schleifen des Diagramms. Die Auswertung

3. Quantenfelder auf einem Gitter

solcher Gitterintegrale, insbesondere im Hinblick auf den Kontinuumsimes, wird in Abschnitt 4 besprochen.

Die Wechselwirkungsterme in (3.12) sind sehr angenehm zu handhaben, da in ihnen nur Produkte von Feldern an *einem* Punkt x auftreten. Bei Gittereichtheorien treten hier beispielsweise Produkte von nächsten Nachbarn auf, was zu komplizierteren Regeln für die Vertizes führt [4].

3.4.3. Kontinuumsimes

Man erwartet, dass bereits die wechselwirkungsfreie Theorie den richtigen Kontinuumsimes besitzt. Dazu müssen die Propagatoren $\langle A_x A_y \rangle_0$ und $\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle_0$ der freien Theorie den richtigen Grenzwert annehmen. Liegt p in der Mitte der BRILLOUIN-Zone und ist a sehr klein, dann gilt:

$$(\Delta^B(p))^{-1} = \sum_i p_i p_i + m^2 + O(a^2) \quad (3.28)$$

$$(\Delta^F(p))^{-1} = \sum_j i p_j \gamma_j + m + O(a) \quad (3.29)$$

In der Mitte der BRILLOUIN-Zone stimmen $\Delta^B(p)$ und $\Delta^F(p)$ daher mit der Kontinuumstheorie überein. Zur Bestimmung von Δ_{xy}^B und Δ_{xy}^F muss aber über die gesamte BRILLOUIN-Zone integriert werden. Am Rand der BRILLOUIN-Zone stimmt $D^B(p)$ zwar, auch für noch so kleines a , nicht mit der Kontinuumstheorie überein, der Beitrag dieser hohen Impulse kann hier jedoch vernachlässigt werden. Am Rand der BRILLOUIN-Zone gilt $\hat{p}_i \approx \frac{2}{a}$, so dass der Beitrag großer Impulse zum Integral über $(D^B(p))^{-1}$ für kleine a stark unterdrückt wird.

Diese ungenauen Argumente wurden von REISZ präzisiert. REISZ bewies ein Theorem [22, 23], das recht allgemeine Bedingungen an den Integranden stellt, unter denen das Gitterintegral den erwarteten Kontinuumsimes besitzt⁵. Das Theorem macht keine Aussagen über divergente Integrale, ist aber auch auf mehrfache Integrale anwendbar und daher für die Gitterstörungsrechnung sehr wertvoll.

Wäre $r = 0$, hätte man jedoch ein Problem mit dem Fermionenpropagator. Das Theorem von REISZ ist in diesem Fall nicht anwendbar, und tatsächlich besitzt Δ_{xy}^F nicht den gewünschten Kontinuumsimes. Liegen nämlich einige Komponenten p_j von p am Rand der BRILLOUIN-Zone, dann gilt $\frac{i}{a} \sin(a(p_j + \delta p_j)) \approx -i \delta p_j$ für kleine a . Zeigt der Impuls in bestimmte Richtungen, so wird sein Beitrag zu Δ_{xy}^F daher nicht mehr unterdrückt, obwohl der Betrag des Impulses groß ist. Unter kleinen Änderungen des Impulses ändert sich $(\Delta^F(p))^{-1}$ in diesen bestimmten Regionen genau wie in der Mitte der BRILLOUIN-Zone. Denkt man sich die BRILLOUIN-Zone am Rand periodisch fortgesetzt, dann gibt es vier dieser Regionen, und zwar die Ecken des ersten Quadranten der BRILLOUIN-Zone. Im Kontinuumsimes hat man so effektiv vier Fermionenfelder statt einem. Besser sieht man dies direkt an der für

⁵Dies bedeutet grob gesagt, dass der Grenzwert $a \rightarrow 0$ unter das Integral gezogen werden darf und p für den Grenzprozess in der Mitte der BRILLOUIN-Zone liegt.

die Fermionen verwendeten Ableitung $(\partial_i)_{xy}$, denn diese überspringt jeden zweiten Gitterpunkt, so dass man in zwei Dimensionen 4 unabhängige Untergitter erhält.

Für $r > 0$ sind diese Untergitter nicht mehr unabhängig. Es gilt nun $m_r(p) \approx m + \text{const}/a$ am Rand der BRILLOUIN-Zone, so dass dort der Beitrag aller Impulse wieder unterdrückt wird. Das Theorem von REISZ bestätigt nun den korrekten Grenzwert von Δ_{xy}^F .

Der zu r proportionale WILSON-Term stellt zwar den richtigen Grenzwert des Fermionenpropagators her, er kann jedoch zu abweichenden Ergebnissen bei Schleifenintegralen führen. Ein Beispiel ist eine Fermionenschleife mit einem einzigen Propagator, also die Spur von Δ_{xy}^F . Da die Spur der DIRAC-Matrizen verschwindet, verbleibt man mit folgendem Integral:

$$\int_{BZ} \frac{m_r(p) d^2 p}{\sum_i \left(\frac{1}{a} \sin(ap_i)\right)^2 + m_r^2(p)} \quad (3.30)$$

Im Kontinuum hätte dieses Integral eine *logarithmische* UV-Divergenz. Nach obigen Überlegungen besitzt $m_r(p)$ aber eine zusätzliche lineare UV-Divergenz, das Gitterintegral ist somit *linear* divergent. Die FEYNMAN-Diagramme der Gitterstörungstheorie besitzen also nicht immer den selben Divergenzgrad wie die Kontinuumsversionen. Im Theorem von REISZ wird daher ein Gitterdivergenzgrad definiert, der bei Integralen über mehrere Schleifen ähnliche Aussagen über die Konvergenz zulässt, wie der oberflächliche Divergenzgrad im Kontinuum.

Obwohl in der Gitterstörungsrechnung zusätzliche Divergenzen auftreten können, bedeutet dies nicht automatisch, dass die Gittertheorie den falschen Kontinuumslikes besitzt. Es kann trotzdem sein, dass die Gitterstörungstheorie gewissermaßen ein ungewöhnliches Renormierungsschema der Störungstheorie des Kontinuums darstellt, so dass man die Störungsreihen nicht direkt vergleichen kann. Man darf daher nur renormierte Größen mit dem Kontinuum vergleichen. Durch die Renormierung werden jedoch eventuell alle zusätzlichen Divergenzen entfernt. Wichtig ist insbesondere, dass die Gittertheorie durch die zusätzlichen Divergenzen ihre Renormierbarkeit nicht verliert. Das Theorem von REISZ sichert die korrekte Konvergenz der endlichen Integrale.

3.5. Symmetrieverletzung durch das Gitter

Die prominenteste Symmetrie, die durch die Gitterformulierung verletzt wird, ist die POINCARÉ-Symmetrie. Immerhin bleibt jedoch eine ihrer endlichdimensionalen Untergruppen in der Gittertheorie erhalten.

Es können auch andere Symmetrien durch die Formulierung einer Theorie auf dem Gitter verloren gehen. Da Symmetrien sehr wichtige Eigenschaften der Theorien sind, kann man nicht unbedingt erwarten, durch Simulationen bei endlichem Gitterabstand korrekte Ergebnisse zu erhalten, falls nicht zumindest ein Teil der Symmetrie auf dem Gitter exakt vorhanden ist. Auf jeden Fall muss gefordert wer-

3. Quantenfelder auf einem Gitter

den, dass die Symmetrie im Grenzfall $a \rightarrow 0$ wieder hergestellt wird, damit man die Simulationsergebnisse nach $a = 0$ extrapolieren kann.

3.5.1. Chirale Symmetrie

Im Kontinuum gilt $\gamma_* \not{D} = -\not{D} \gamma_*$, so dass der kinetische Term der Fermionen $\bar{\psi} \not{D} \psi$ invariant unter der globalen chiralen Symmetrie

$$\psi \rightarrow e^{i\epsilon \gamma_*} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\epsilon \gamma_*} \quad (3.31)$$

ist. Will man nun chirale Theorien auf dem Gitter formulieren, wäre eine Gitterversion D von \not{D} praktisch, die $\gamma_* D = -D \gamma_*$ erfüllt. Das Theorem von NIELSEN und NINOMIYA [24] besagt nun, dass dies für einen lokalen Operator D mit korrektem Kontinuumsliches des Propagators nicht möglich ist. Man kann aber einen Operator D finden, der

$$\gamma_* D = -D \hat{\gamma}_* \quad \text{mit} \quad \hat{\gamma}_* = \gamma_* (1 - aD) \quad (3.32)$$

erfüllt. Dann ist $\bar{\psi} D \psi$ zumindest invariant unter einer Gitterversion der chiralen Symmetrie:

$$\psi \rightarrow e^{i\epsilon \hat{\gamma}_*} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\epsilon \hat{\gamma}_*} \quad (3.33)$$

Für $a = 0$ stimmt diese Symmetrie mit (3.31) überein. Nun können Gitterwirkungen konstruiert werden, die exakt invariant unter der Gitterversion der chiralen Symmetrie sind.

Bei den WILSON-Fermionen wurde ein Term zur Wirkung hinzugefügt, der für $a = 0$ aus der Wirkung verschwindet, aber trotzdem notwendig für den korrekten Kontinuumsliches der Propagatoren ist. Dieser zusätzliche Term kann aber zu zusätzlichen Divergenzen in der Gitterstörungstheorie führen. Entsprechend reicht die Existenz einer exakten Symmetrie (3.33) der Gittertheorie nicht aus, um sicher zu sein, dass die gewollte Kontinuumstheorie beschrieben wird, auch wenn die Gitterversion der Symmetrie für $a = 0$ naiv mit der Symmetrie im Kontinuum übereinstimmt. Einige Ergebnisse zum Kontinuumsliches chiraler Gittertheorien sind z.B. in [25] zusammengefasst. Die Beziehung (3.32) ist nach GINSPARG und WILSON benannt [26].

3.5.2. Supersymmetrie

Die Supersymmetrietransformationen (3.3) lassen die Wirkung im Kontinuum unter anderem deshalb invariant, weil für die Ableitungen die LEIBNIZ-Regel angewendet werden kann. Diese gilt für die hier verwendeten Gitterableitungen nicht. Die einfache Realisierung des WESS-ZUMINO-Modells (3.11, 3.12) verletzt daher die Supersymmetrie.

Eine Gitterversion der Supersymmetrie zu finden, so wie dies für die chirale Symmetrie gelungen ist, wird im Allgemeinen schwierig sein. Die POINCARÉ-Symmetrie wird durch das Gitter bereits verletzt, diese ist aber ein Teil der Supersymmetriealgebra. In [27] ist dies trotzdem für das zweidimensionale WESS-ZUMINO-Modell

gelungen. Hier wurde die Transformation von ψ unter Supersymmetrie durch eine unendliche Reihe in a ergänzt, deren Koeffizienten nicht-lokal sind und rekursiv bestimmt werden können. Als Test für dieses Modell werden in [27] einige supersymmetrische WARD-Identitäten mit Hilfe der Gitterstörungstheorie bestätigt.

Da die WARD-Identitäten eine direkte Folge der Supersymmetrie sind, ist deren Überprüfung ein üblicher Test, ob die Gittertheorie für die Simulation der Kontinuumstheorie geeignet ist. Fällt dieser Test positiv aus, dann hat man eine vernünftige Realisierung einer supersymmetrischen Theorie auf dem Gitter gefunden, unabhängig davon, ob man eine Gitterversion der Supersymmetrie angeben kann oder nicht. Die in [27] gefundene Gitterversion der Supersymmetrie ist aber sehr nützlich, um die WARD-Identitäten in der Gitterstörungstheorie für dieses Modell zu bestätigen.

Entscheidend bei der Konstruktion des Gittermodells in [27] ist, dass für die Bosonen das Quadrat der für die Fermionen benutzten Gitterableitung verwendet wurde. Die Bosonen besitzen dann, genau wie die Fermionen, auch einen WILSON-Term. Die durch den WILSON-Term der Fermionen zusätzlich auftretenden Divergenzen heben sich dann mit denjenigen weg, die durch den WILSON-Term der Bosonen erzeugt werden.

4. Feynman-Integrale

Die Auswertung komplizierter FEYNMAN-Integrale ist ohne den intensiven Einsatz von Computern nicht möglich. Dies trifft auch auf die in Abschnitt 4.2 beschriebene asymptotische Entwicklung von FEYNMAN-Integralen zu. Diese muss bereits für vermeintlich einfache Ein-Schleifenintegrale in zwei Dimensionen z.B. mit Hilfe von MATHEMATICA durchgeführt werden, falls man sich nicht mit der führenden Ordnung zufrieden gibt.

Der Einsatz von Computern in der Hochenergiephysik ist daher sowohl für Gittersimulationen als auch für die Störungstheorie unumgänglich.

4.1. Rekursionsbeziehungen

Für die asymptotische Entwicklung in Abschnitt (4.2.3) werden folgende Integrale benötigt:

$$H_{n a_1 a_2}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^2 \frac{dk_i}{(1+k_i^2)^{a_i}} \left[\sum_{i=1}^2 \frac{k_i^2}{1+k_i^2} \right]^{-n-\delta} \quad (4.1)$$

Es gilt $H_{n a_1 a_2} = H_{n a_2 a_1}$. Die $H_{n a_1 a_2}$ erfüllen die algebraische Identität

$$H_{n-1 a_1 a_2} + (H_{n a_1+1 a_2} - H_{n a_1 a_2}) + (H_{n a_1 a_2+1} - H_{n a_1 a_2}) = 0. \quad (4.2)$$

Dies wird gewöhnlich wie folgt geschrieben:

$$[\mathbf{n}^- + (\mathbf{a}_1^+ - 1) + (\mathbf{a}_2^+ - 1)] H = 0 \quad (4.3)$$

Die Operatoren \mathbf{n}^\pm und \mathbf{a}_i^\pm erhöhen bzw. erniedrigen somit den entsprechenden Index um eins. Lässt man den Operator $\frac{\partial}{\partial k_1} k_1$ auf den Integranden von H wirken, dann verschwindet das Integral, wovon man sich durch partielle Integration über k_1 überzeugen kann. Es gilt deshalb:

$$[1 + 2a_1(\mathbf{a}_1^+ - 1) + 2(n + \delta)\mathbf{n}^+ \mathbf{a}_1^+(\mathbf{a}_1^+ - 1)] H = 0 \quad (4.4)$$

Das gleiche Argument gilt für $\frac{\partial}{\partial k_2} k_2$. Eine weitere Gleichung erhält man somit, indem man a_1 und \mathbf{a}_1^+ durch a_2 und \mathbf{a}_2^+ ersetzt.

Man kann mit (4.3) und (4.4) sämtliche $H_{n a_1 a_2}$ auf wenige sogenannte Masterintegrale zurückführen. In der Störungstheorie im Kontinuum werden ähnliche Methoden verwendet, um Beziehungen zwischen verschiedenen FEYNMAN-Integralen herzustellen. Man fügt dazu Ableitungsoperatoren in den Integranden ein, so dass

das Integral verschwindet. Dadurch werden analog zu (4.4) verschiedene FEYNMAN-Integrale miteinander verknüpft. Erstaunlich ist, dass man bei allen in der Praxis vorkommenden Fällen mit diesen Rekursionsbeziehungen eine unendlich große Klasse bestimmter Integrale auf *endlich* viele Masterintegrale zurückführen kann. Besonders wenn man Rechnungen in höheren Ordnungen der Störungstheorie durchführt, wird diese Methode intensiv verwendet.

Eine Vielzahl von Beispielen für Rekursionsbeziehungen mit jeweils passenden Lösungsstrategien ist in [28] aufgeführt. In der Praxis wird vor allem der LAPORTA-Algorithmus verwendet [29]. Einige neuere Ansätze zum Lösen von Rekursionsbeziehungen beruhen auf der Verwendung von GRÖBNER-Basen.

4.1.1. Gröbner-Basen

GRÖBNER-Basen werden in der Computeralgebra u.a. zum Vereinfachen von Polynomen unter gewissen Nebenbedingungen eingesetzt [30]. Man muss dazu eine Ordnungsrelation, genauer eine Totalordnung, auf den Monomen wählen, mit deren Hilfe man die Einfachheit der Monome mathematisch erfassen will. Hier soll als Beispiel die Grad-lexikographische Ordnung benutzt werden. Ein Monom der Form $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$ ist in dieser Ordnung als einfach anzusehen, wenn $\sum_k i_k$ möglichst klein ist. Stimmen zwei Monome in dieser Summe überein, ist dasjenige Monom einfacher, bei dem die Potenz von X_1 kleiner ist. Stimmt auch diese überein vergleicht man die Potenz von X_2 und so weiter. Mit Hilfe so einer Ordnungsrelation kann man in jedem Polynom das größte Monom finden. Dieses Monom ist der *führende Term* des Polynoms P . Dieser wird mit $\text{lt}(P)$ bezeichnet.

Als Beispiel sollen nun folgende Nebenbedingungen erfüllt sein:

$$0 = N_1 = X_1^2 + X_1 X_2, \quad 0 = N_2 = X_2^2 + X_1 X_2 + 1 \quad (4.5)$$

Das Polynom $P = X_1^2$ kann vereinfacht werden, indem es bezüglich N_1 und N_2 *reduziert* wird. Das bedeutet, dass man die führenden Terme von N_1 und N_2 in P mit Hilfe der Nebenbedingungen ersetzt, d.h. man ersetzt in P überall X_1^2 durch $-X_1 X_2$ und X_2^2 durch $-X_1 X_2 - 1$. Man erhält somit $P = N_1 - X_1 X_2 = -X_1 X_2$. Eine weitere Reduktion ist nicht mehr möglich. Es gilt jedoch auch:

$$0 = N_3 = X_1 N_2 - X_2 N_1 = X_1 \quad (4.6)$$

Die einfachste Version von P ist also $P = 0$ und nicht $P = -X_1 X_2$.

Eine systematische Lösung dieses Problems führt auf die GRÖBNER-Basen. Die Nebenbedingungen N_1 und N_2 erzeugen ein Ideal $I = \langle N_1, N_2 \rangle$ im Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$. Eine GRÖBNER-Basis G dieses Ideals besitzt nun die Eigenschaft, dass sie ebenso das Ideal erzeugt, die führenden Terme sind jedoch von minimaler Ordnung¹. Eine GRÖBNER-Basis reduziert *jedes* Element des Ideals I zu Null. In diesem Beispiel besteht die GRÖBNER-Basis aus X_1 und $X_2^2 + 1$. Die einzigen Monome, die nicht weiter reduziert werden können, sind daher X_2 und 1 .

¹Mathematisch präzise formuliert heißt das: $I = \langle G \rangle$ und $\langle \text{lt}(I) \rangle = \langle \text{lt}(G) \rangle$.

Die Bestimmung einer GRÖBNER-Basis kann mit dem BUCHBERGER-Algorithmus geschehen. Man erhält für verschiedene Ordnungsrelationen im Allgemeinen auch verschiedene GRÖBNER-Basen. Vereinfacht man mit ihnen ein Polynom, führen sie jedoch alle zum gleichen Ergebnis. Die Wahl der Ordnungsrelation hat jedoch Auswirkungen auf die Laufzeit des BUCHBERGER-Algorithmus.

4.1.2. Gröbner-Basen und Rekursionsrelationen

GRÖBNER-Basen wurden erstmals in [31] zum Lösen von Rekursionsbeziehungen zwischen FEYNMAN-Integralen verwendet, allerdings auf eine andere Weise als der im Folgenden dargestellten. Die hier vorgestellte Idee geht auf GERDT zurück [32–34].

Man betrachtet Polynome in \mathbf{n}^+ und \mathbf{a}_i^+ , bei denen die Vorfaktoren durch rationale Funktionen in n , a_i und physikalischen Parametern wie Masse und Impuls gegeben sind. Da \mathbf{n}^+ nicht mit n kommutiert, ebenso wenig wie \mathbf{a}_i^+ mit a_i , handelt es sich um einen Schiefpolynomring.

Die Rekursionsbeziehungen (4.3, 4.4) lauten:

$$0 = 1 + \mathbf{n}^+(\mathbf{a}_1^+ - 1) + \mathbf{n}^+(\mathbf{a}_2^+ - 1) \quad (4.7)$$

$$0 = 1 + 2a_1(\mathbf{a}_1^+ - 1) + 2(n + \delta)\mathbf{n}^+\mathbf{a}_1^+(\mathbf{a}_1^+ - 1) \quad (4.8)$$

$$0 = 1 + 2a_2(\mathbf{a}_2^+ - 1) + 2(n + \delta)\mathbf{n}^+\mathbf{a}_2^+(\mathbf{a}_2^+ - 1) \quad (4.9)$$

Diese erzeugen ein Ideal I in obigem Schiefpolynomring. Es gilt:

$$H_{ijk} = (\mathbf{n}^+)^i(\mathbf{a}_1^+)^j(\mathbf{a}_2^+)^k H_{000} \quad (4.10)$$

Die Idee ist nun, das Monom $(\mathbf{n}^+)^i(\mathbf{a}_1^+)^j(\mathbf{a}_2^+)^k$ mit einer GRÖBNER-Basis von I zu reduzieren. Die Monome, die nicht weiter reduziert werden können, entsprechen den Masterintegralen.

Diese Methode birgt jedoch einige Probleme. Diese entstehen dadurch, dass in einer Implementierung des BUCHBERGER-Algorithmus nur Äquivalenzumformungen durchgeführt werden dürfen. In einer Gleichung $n\mathbf{n}^+ + n = 0$ darf also nicht einfach durch n geteilt werden, ohne den Fall $n = 0$ separat zu betrachten. Ähnliches gilt für die Multiplikation einer Gleichung mit n .

Des Weiteren erhält man nicht immer die minimale Anzahl an Masterintegralen, wenn man die Operatoren \mathbf{n}^- und \mathbf{a}_i^- nicht berücksichtigt. Wenn die GRÖBNER-Basis $\mathbf{n}^{+2} - \mathbf{n}^+ = 0$ lautet, dann sind die nicht mehr reduzierbaren Monome \mathbf{n}^+ und 1. Die minimale Anzahl der Masterintegrale ist jedoch eins und nicht zwei, wie man durch Multiplikation dieser GRÖBNER-Basis mit \mathbf{n}^- bestätigen kann.

Ein Algorithmus für FEYNMAN-Integrale im Kontinuum, der aus dieser Methode entstanden ist, ist in [35–38] dargestellt. Statt einer GRÖBNER-Basis wird hier eine sogenannte S-Basis bestimmt, die auch zur Reduktion auf Masterintegrale geeignet ist. Die S-Basis kann aber mit weniger Rechenaufwand bestimmt werden als die GRÖBNER-Basis. Dabei wird genutzt, dass einige dimensional regularisierte

FEYNMAN-Integrale Null sind. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Rekursionsbeziehungen ist daher schwierig.

Der Vorteil der GRÖBNER-Basen ist, dass sie gewissermaßen die allgemeine Lösung der Rekursionsbeziehungen darstellen und kompakt gespeichert werden können.

4.1.3. Laportas Algorithmus

Stellt man die Rekursionsbeziehungen für alle $H_{n a_1 a_2}$ auf, so erhält man ein unendlichdimensionales homogenes lineares Gleichungssystem. Diesem entspricht eine lineare Abbildung, der Kern dieser Abbildung ist gerade der Lösungsraum des Gleichungssystems. Ist dieser Lösungsraum endlichdimensional, kann man ihn durch endlich viele Masterintegrale parametrisieren.

Der Algorithmus von LAPORTA [29] besteht nun darin, das Gleichungssystem nach einer bestimmten Vorschrift für einen gewissen Indexbereich aufzustellen und nach bestimmten Integralen aufzulösen. Dazu wird ein Kriterium angegeben, welche Integrale als einfach zu betrachten sind. Diese sollen bevorzugt als Masterintegrale dienen. Ein solches Kriterium entspricht der Ordnungsrelation, nach der eine GRÖBNER-Basis bestimmt wird.

Gemäß diesem Kriterium werden bevorzugt Gleichungen mit einfachen Integralen aufgestellt. Diese werden dann nach dem schwierigsten Integral in dieser Gleichung umgestellt. Der Ausdruck für das schwierige Integral wird dann, wie beim GAUSS-Verfahren, in allen bereits aufgestellten Gleichungen und in allen Gleichungen, die noch aufgestellt werden, substituiert. Als Unbekannte des Gleichungssystems werden dadurch vorwiegend einfache Integrale gewählt. Es werden so lange neue Gleichungen aufgestellt, bis die zu bestimmenden Integrale nur noch von einigen einfachen Integralen, die somit als die Masterintegrale identifiziert wurden, abhängen.

Eine auf FEYNMAN-Integrale im Kontinuum optimierte Implementierung dieses Algorithmus in MAPLE wird in [39] vorgestellt. In Abschnitt G.1 ist eine eigene Realisierung aufgeführt. Diese besitzt den Vorteil, dass dort einige oder alle Indizes variabel gelassen werden können, so dass man allgemeine Lösungsvorschriften bestimmen kann. Das Beispiel in Abschnitt G.1.1 zeigt, wie man folgende Lösungsvorschrift der H_{i11} für alle i bekommen kann:

$$H_{n11} = \frac{7 - 9n + 3n^2 - 9\delta + 6n\delta + 3\delta^2}{2(-1 + n + \delta)^2} H_{n-111} + \frac{-4 + 4n - n^2 + 4\delta - 2n\delta - \delta^2}{2(-1 + n + \delta)^2} H_{n-211} \quad (4.11)$$

Hier tritt jedoch dasselbe Problem wie bei den GRÖBNER-Basen auf, d.h. der Algorithmus in Abschnitt G.1 prüft nicht, ob die Formel (4.11) auch auf alle Werte von n anwendbar ist. Es könnten so Divisionen oder Multiplikationen von $n - Z$ zur Herleitung von (4.11) verwendet worden sein, so dass die Gleichung nicht für $n = Z$ verwendet werden darf. Da n aber immer als $n + \delta$ vorkommt, wobei δ ein infinitesimaler Regulator ist, kann dies ausgeschlossen werden.

Die Ergebnisse des LAPORTA-Algorithmus können gespeichert und jederzeit wiederverwendet werden. Der Speicherbedarf ist jedoch, je nachdem wie viele Gleichungen aufgestellt wurden, viel größer als der einer GRÖBNER-Basis.

4.2. Asymptotische Entwicklung

Das Theorem von REISZ kann nur auf konvergente Integrale angewendet werden. Es sagt außerdem nur etwas über die führende Ordnung konvergenter Integrale aus, was aber ohne Zweifel am interessantesten ist. Die asymptotische Entwicklung von FEYNMAN-Integralen bietet eine systematische Behandlung von divergenten Gitterintegralen. Man kann durch diese Entwicklung auch höhere Ordnungen des Integrals in der Gitterkonstanten erhalten, sowohl für konvergente als auch für divergente Integrale. Die Möglichkeit, FEYNMAN-Integrale einer Gittertheorie mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung auszuwerten, wurde in [40] aufgezeigt.

4.2.1. Beispiel

Als Beispiel wird folgendes FEYNMAN-Integral im Kontinuum und euklidischer Metrik betrachtet [41]:

$$I(p, q) = \int \frac{d^4k}{k^2(q-k)^2(p+k)^2} \quad (4.12)$$

Dieses Integral ist konvergent. Nun soll die führende Ordnung von $I(p, q)$ für den Fall $|p| \ll |q|$ bestimmt werden. Man kann nicht einfach im Integranden $p = 0$ setzen, da das Integral in diesem Fall eine IR-Divergenz bekommen würde. Statt dessen wird ein Λ so gewählt, dass $|p| \ll \Lambda \ll |q|$ gilt. Mit diesem wird das Integrationsgebiet aufgeteilt:

$$I(p, q) = \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^4k}{k^2(q-k)^2(p+k)^2} + \int_{|k| \geq \Lambda} \frac{d^4k}{k^2(q-k)^2(p+k)^2} \quad (4.13)$$

Im ersten Integral kann man k gegenüber q vernachlässigen, im zweiten Integral verschwindet p gegenüber k . Man hat somit:

$$I(p, q) \approx \frac{1}{q^2} \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^4k}{k^2(p+k)^2} + \int_{|k| \geq \Lambda} \frac{d^4k}{(k^2)^2(q-k)^2} \quad (4.14)$$

Das Integrationsgebiet soll nun wieder auf den ganzen \mathbb{R}^4 erweitert werden. Die Integrale werden dadurch aber divergent, so dass man vorher einen Regulator einführen muss. Hier wird die dimensionale Regularisierung mit $d = 4 - 2\epsilon$ verwendet. Dies führt auf:

$$I(p, q) \approx \frac{1}{q^2} \int \frac{d^d k}{k^2(p+k)^2} + \int \frac{d^d k}{(k^2)^2(q-k)^2} - F(p, q) \quad (4.15)$$

Der Fehler $F(p, q)$, den man durch die Vergrößerung des Integrationsgebietes verursacht hat, beträgt:

$$F(p, q) = \frac{1}{q^2} \int_{|k| \geq \Lambda} \frac{d^d k}{k^2(p+k)^2} + \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(k^2)^2(q-k)^2} \quad (4.16)$$

Im zweiten Integral kann k gegenüber q vernachlässigt werden, im ersten verschwindet p . Es ergibt sich:

$$F(p, q) = \frac{1}{q^2} \int_{|k| \geq \Lambda} \frac{d^d k}{(k^2)^2} + \frac{1}{q^2} \int_{|k| \leq \Lambda} \frac{d^d k}{(k^2)^2} \quad (4.17)$$

Diese Integrale können z.B. in d -dimensionalen Kugelkoordinaten ausgewertet werden und heben sich gegenseitig weg², d.h. es gilt $F(p, q) = 0$. Man kann auch schreiben:

$$F(p, q) = \frac{1}{q^2} \int \frac{d^d k}{(k^2)^2} \quad (4.18)$$

$F(p, q)$ ist also ein skalenloses Integral, solche Integrale verschwinden in dimensionaler Regularisierung. Diese Tatsache musste hier aber nicht verwendet werden, da sich die Integrale in (4.17) gegenseitig aufheben.

Die führende Ordnung der asymptotischen Entwicklung von $I(p, q)$ ist damit:

$$I(p, q) \approx \frac{1}{q^2} \int \frac{d^d k}{k^2(p+k)^2} + \int \frac{d^d k}{(k^2)^2(q-k)^2} \quad (4.19)$$

Beide Integrale sind divergent. Beim Übergang von (4.14) zu (4.19) hat man jedoch nur exakte Umformungen durchgeführt. Weil (4.14) nicht divergent ist, heben sich die Divergenzen der Integrale in (4.19) gegenseitig auf, so dass der Gesamtausdruck endlich ist. Diese beiden Integrale sind aber, obwohl sie divergieren, leichter zu lösen als das ursprüngliche.

Dies stellt nur die führende Ordnung der Entwicklung dar. Wie man höhere Ordnungen bestimmen kann, wird im nächsten Kapitel dargestellt.

4.2.2. Allgemeine Vorgehensweise

Zu dem Ergebnis (4.19) wäre man auch gekommen, wenn man folgende Vorschriften befolgt hätte:

1. Einführung einer Regularisierung, z.B. der dimensional Regularisierung.

²Das linke Integral ist konvergent für $\text{Re}(\epsilon) > 0$, das rechte hingegen für $\text{Re}(\epsilon) < 0$. Auf dieses Problem soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden, es wird jedoch in [41] diskutiert.

4. FEYNMAN-Integrale

2. Die Integrationsvariable wird in verschiedenen Regionen betrachtet, für obiges Beispiel wären das die Regionen $|k| \geq \Lambda$ und $|k| \leq \Lambda$. Für jede dieser Regionen wird nun der Integrand in den Parametern³ entwickelt, die in dieser Region als klein angesehen werden können. Diese Entwicklung kann oft in Form einer Taylor-Reihe geschehen.
3. Die Ergebnisse werden über den *gesamten* Raum integriert, nicht nur über die jeweilige Region.
4. Skalenlose Integrale werden Null gesetzt. Diese Vorschrift ist nicht an die dimensionale Regularisierung gebunden. Der Beitrag skalenloser Integrale fällt auch bei Verwendung eines anderen Regulators weg, ähnlich wie sich in (4.17) beide Integrale gegenseitig aufgehoben haben.

Durch diese Vorschriften umgeht man die explizite Aufteilung des Integrationsgebietes. Für euklidische Propagatoren im Kontinuum kann man beweisen, dass eine ähnliche Formulierung der asymptotischen Entwicklung in der Tat korrekte Ergebnisse liefert [41]. Diese Formulierung liefert die gleichen Resultate wie obige Vorschriften. Für andere Propagatoren liegt kein Beweis vor, aber auch kein Gegenbeispiel. Die asymptotische Entwicklung wird daher auch als eine semianalytische Methode beschrieben.

4.2.3. Konvergente Bosonenschleife

Als Beispiel für die asymptotische Entwicklung nach Abschnitt 4.2.2 wird nun folgendes Integral behandelt:

$$I_B(a, m, 0) = \int_{BZ} \frac{d^2 q}{\left(\sum_j \left[\frac{2}{a} \sin \left(\frac{aq_j}{2} \right) \right]^2 + m^2 \right)^2} \quad (4.20)$$

Die Verallgemeinerung (F.1) wird später betrachtet. Dieses Integral bleibt für $a = 0$ endlich. Durch die Substitution $k_i = \tan \left(\frac{q_i a}{2} \right)$ wird der Integrand eine rationale Funktion in den k_i und das Integrationsgebiet wird zu \mathbb{R}^2 :

$$\left[\frac{2}{a} \sin \left(\frac{aq_j}{2} \right) \right]^2 = \frac{4}{a^2} \frac{k_i^2}{1 + k_i^2} \quad (4.21)$$

$$d^2 q = \left| \det \frac{\partial q_i}{\partial k_i} \right| d^2 k = \prod_{i=1}^2 \frac{2}{a} \frac{dk_i}{1 + k_i^2} \quad (4.22)$$

$$I_B(a, m, 0) = \frac{a^2}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_1}{1 + k_1^2} \frac{dk_2}{1 + k_2^2} \left[\tilde{m}^2 + \frac{k_1^2}{1 + k_1^2} + \frac{k_2^2}{1 + k_2^2} \right]^{-2-\delta} \quad (4.23)$$

Hier ist $\tilde{m} = \frac{ma}{2}$ die halbe Gittermasse und δ der für die asymptotische Entwicklung benötigte Regulator. Es wurde somit die analytische Regularisierung gewählt. Da

³Diese Parameter sind insbesondere äußere Impulse und Massen.

sich das Integrationsgebiet nun über \mathbb{R}^2 erstreckt, kann man prüfen, ob bestimmte Methoden für FEYNMAN-Integrale im Kontinuum auf (4.23) anwendbar sind. Für die asymptotische Entwicklung ist dies tatsächlich möglich [40].

Im Kontinuumsliches geht \tilde{m} gegen Null. Es kann daher eine asymptotische Entwicklung des Integrals (4.23) für kleine \tilde{m} durchgeführt werden. Entsprechend den Regeln in Abschnitt 4.2.2 müssen nun alle möglichen Regionen der Schleifenvariablen k_i betrachtet werden. Es tragen allerdings nur zwei Regionen zur Entwicklung bei. In der einen Region sind alle k_i von der gleichen Größenordnung wie \tilde{m} , der Beitrag dieser Region wird $I_{<}(\tilde{m})$ genannt. In der anderen Region sind alle k_i viel größer als \tilde{m} , deren Beitrag wird mit $I_{>}(\tilde{m})$ abgekürzt. Regionen, in denen einige Komponenten von k groß sind und andere klein, liefern hingegen keinen Beitrag⁴. Es gilt also die Zerlegung:

$$I_B(a, m, 0) = \frac{a^2}{4} [I_{<}(\tilde{m}) + I_{>}(\tilde{m})] \quad (4.24)$$

Beitrag $I_{<}(\tilde{m})$ für kleine k_i

Man betrachtet nun den Integranden von (4.23) für kleine \tilde{m} und k_i . Man setzt dazu überall folgende Entwicklung an:

$$\frac{1}{1+k_i^2} = 1 - k_i^2 + k_i^4 - \dots \quad (4.25)$$

Die so entstehenden Integrale sind alle von der Form (E.2). Es sind Integrale über Propagatoren des *Kontinuums*. Die führende Ordnung von $I_{<}(\tilde{m})$ in \tilde{m} ist damit:

$$O(\tilde{m}^{-2}) : \int \frac{d^2k}{(k^2 + \tilde{m}^2)^{2+\delta}} = \frac{\pi}{\tilde{m}^{2+2\delta}} \quad (4.26)$$

Hierfür wurde in der Entwicklung (4.25) nur der erste Term benutzt. Berücksichtigt man auch höhere Terme, erhält man für die nächste Ordnung in \tilde{m} :

$$\begin{aligned} O(\tilde{m}^0) : & \int d^2k \left[-\frac{\sum_i k_i^2}{(k^2 + \tilde{m}^2)^{2+\delta}} + (2 + \delta) \frac{\sum_i k_i^4}{(k^2 + \tilde{m}^2)^{3+\delta}} \right] \\ & = 2\tilde{m}^{-2\delta} \left[-\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta+2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{\Gamma(\delta)(\delta+2)}{\Gamma(\delta+3)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right) \right] \\ & = \frac{\pi}{2} \frac{\tilde{m}^{-2\delta}}{\delta(\delta+1)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

LAURENT-Entwicklung in δ ergibt schließlich:

$$I_{<}(\tilde{m}) = \frac{\pi}{\tilde{m}^2} [1 + O(\delta)] + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\delta} - 1 - 2 \log \tilde{m} + O(\delta) \right] + O(\tilde{m}^2) \quad (4.28)$$

⁴In diesen gemischten Regionen reicht der Regulator δ nicht aus, um die auftretenden Integrale endlich zu machen. Ein zusätzlicher Regulator $\prod_i (\sin(k_i/2))^{2\epsilon}$ muss eingeführt werden. Die gemischten Regionen führen dann auf skalenlose Integrale und tragen daher nicht bei. *Nach* der asymptotischen Entwicklung kann ϵ Null gesetzt werden und man verbleibt mit zwei durch δ regularisierten Regionen [40].

Beitrag $I_{>}(\tilde{m})$ für große k_i

Für die Bestimmung von $I_{>}(\tilde{m})$ muss der Integrand in \tilde{m} entwickelt werden:

$$I_{>}(\tilde{m}) = H_{211}(\delta) - (2 + \delta)\tilde{m}^2 H_{311}(\delta) + \dots \quad (4.29)$$

Dabei ist $H_{na_1a_2}(\delta)$ durch (4.1) gegeben. Benötigt werden aber nur die H_{n11} . Diese können mit Hilfe von (4.11) auf zwei Masterintegrale zurückgeführt werden.

Als Masterintegrale werden solche gewählt, die konvergent für $\delta \rightarrow 0$ sind. Für diese muss also $a_i \geq 1$ und $n \leq 0$ gelten. Deren Integranden kann man in eine TAYLOR-Reihe in δ entwickeln und gliedweise integrieren. Wählt man H_{011} und H_{-111} als Masterintegrale, lautet deren Entwicklung nach der Substitution $k_i = \tan(r_i)$:

$$\begin{aligned} H_{k11}(\delta) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^2r \left(\sum_i \sin^2(r_i) \right)^{\delta-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^2r \left(\sum_i \sin^2(r_i) \right)^{-k} \log^n \left(\sum_i \sin^2(r_i) \right) \right] \frac{(-)^n \delta^n}{n!} \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} H_{k11}^{(n)} \delta^n \end{aligned} \quad (4.30)$$

Man erhält $H_{011}^{(0)} = \pi^2 = H_{-111}^{(0)}$. Die restlichen Koeffizienten können nur numerisch berechnet werden. Wegen des Integrals

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d^2r (\sin^2 r_1 + \sin^2 r_2 - 1) \log(\sin^2 r_1 + \sin^2 r_2) = \pi(\pi - 2) \quad (4.31)$$

hat man jedoch folgende Relation:

$$H_{011}^{(1)} - H_{-111}^{(1)} = \pi(\pi - 2) \quad (4.32)$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch die Identität:

$$H_{011}^{(2)} - H_{-111}^{(2)} - H_{-111}^{(1)} = \pi^2 + 6\pi(\log(2) - 1) \quad (4.33)$$

Mit Hilfe von (4.11) kann man nun H_{111} in eine Laurent-Reihe in δ entwickeln:

$$\begin{aligned} H_{111} &= \frac{1 - 3\delta + 3\delta^2}{2\delta^2} H_{011} + \frac{-1 + 2\delta - \delta^2}{2\delta^2} H_{-111} \\ &= \frac{1}{\delta^2} (H_{011}^{(0)} - H_{-111}^{(0)}) + \frac{1}{2\delta} (2H_{-111}^{(0)} - 3H_{011}^{(0)} + H_{011}^{(1)} - H_{-111}^{(1)}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (3H_{011}^{(0)} - H_{-111}^{(0)} + 2H_{-111}^{(1)} - 3H_{011}^{(1)} + H_{011}^{(2)} - H_{-111}^{(2)}) + O(\delta) \\ &= -\frac{\pi}{\delta} + 3\pi \log(2) + O(\delta) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Analog erhält man für H_{211} :

$$H_{211} = -\frac{\pi}{2\delta} + \frac{\pi}{2}(3 \log(2) - 1) + O(\delta) \quad (4.35)$$

Man kann nun mit (4.11), (4.34) und (4.35) sämtliche H_{n11} für $n > 0$, bis auf Terme $O(\delta)$, exakt bestimmen. Es muss daher *nicht* auf numerische Werte für die $H_{n11}^{(j)}$ zurückgegriffen werden. Das Ergebnis für $I_{>}(\tilde{m})$ ist damit:

$$I_{>}(\tilde{m}) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\delta} + 3 \log(2) - 1 + O(\delta) \right] + O(\tilde{m}^2) \quad (4.36)$$

Ergebnis für $I_B(a, m, 0)$

Die Divergenzen in δ zwischen $I_{<}(\tilde{m})$ und $I_{>}(\tilde{m})$ heben sich wie erwartet weg, der Grenzprozess $\delta \rightarrow 0$ kann daher ohne Probleme durchgeführt werden. Nachdem \tilde{m} wieder durch m ersetzt wurde, erhält man schließlich:

$$I_B(a, m, 0) = \frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{8} [5 \log(2) - 2 - 2 \log(am)] a^2 + O(a^4) \quad (4.37)$$

Höhere Ordnungen in a berechnet man am besten mit Hilfe eines Computers. Das MATHEMATICA-Paket in Abschnitt G.2 liefert (F.2).

4.2.4. Entwicklung von Integralen mit einer Schleife

In diesem Abschnitt soll ein allgemeines Ein-Schleifenintegral betrachtet werden. Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$D^B(m, q) = \sum_j \left[\frac{2}{a} \sin\left(\frac{aq_j}{2}\right) \right]^2 + m^2 \quad (4.38)$$

$$D^E(q_j) = \frac{1}{a} \sin(aq_j) \quad (4.39)$$

$$D^F(m, q) = \sum_j i D^E(q_j) \gamma_j + m + \frac{ar}{2} D^B(0, q) \quad (4.40)$$

$$D^G(m, q) = \sum_j [D^E(q_j)]^2 + \left[m + \frac{ar}{2} D^B(0, q) \right]^2 \quad (4.41)$$

Der Schleifenimpuls ist q mit Komponenten q_i . Die äußeren Impulse sind p_j mit Komponenten $p_{j|i}$. Des Weiteren sind I_1 , I_2 und I_3 Indexmengen. Es genügt, die Integrale

$$I = \int_{BZ} d^2q \frac{\prod_{i \in I_1} (D^E(m_i, q + p_i))^{e_i}}{\left[\prod_{j \in I_2} (D^B(m_j, q + p_j))^{b_j} \right] \left[\prod_{k \in I_3} (D^G(m_k, q + p_k))^{f_k} \right]} \quad (4.42)$$

zu betrachten. Ein beliebiges Ein-Schleifenintegral, wie z.B. (F.4), kann als Summe dieser geschrieben werden. Ein WILSON-Term im Zähler kann zu einem negativen b_j

4. FEYNMAN-Integrale

führen. Nun werden die Substitutionen $k_i = \tan\left(\frac{aq_i}{2}\right)$ und $\rho_{j|i} = \tan\left(\frac{ap_{j|i}}{2}\right)$ durchgeführt. Das Integrationsgebiet wird dadurch zu \mathbb{R}^2 . Mit den Abkürzungen $\tilde{m}_i = \frac{am_i}{2}$ sowie $\tilde{D}^{B,F} = \frac{a^2}{4}D^{B,F}$ und $\tilde{D}^E = \frac{a}{2}D^E$ gilt:

$$d^2q = \prod_{i=1}^2 \frac{2}{a} \frac{dk_i}{1+k_i^2} \quad (4.43)$$

$$\tilde{D}^B(m_i, q + p_i) = \sum_{j=1}^2 \frac{(k_j + \rho_{i|j})^2}{(1+k_j^2)(1+\rho_{i|j}^2)} + \tilde{m}_i^2 \quad (4.44)$$

$$\tilde{D}^E(q_j + p_{i|j}) = \frac{k_j(1-\rho_{i|j}^2) + \rho_{i|j}(1-k_j^2)}{(1+k_j^2)(1+\rho_{i|j}^2)} \quad (4.45)$$

$$\tilde{D}^G(m_i, q + p_i) = \sum_j \left[\tilde{D}^E(q_j + p_{i|j}) \right]^2 + \left[\tilde{m}_i + r \tilde{D}^B(0, q + p_i) \right]^2 \quad (4.46)$$

Wie in Abschnitt 4.2.3 kann man eine Zerlegung

$$I = \left(\frac{a}{2}\right)^s [I_{<} + I_{>}] \quad (4.47)$$

$$s = 2 \sum_{i \in I_2} b_i + 2 \sum_{i \in I_3} f_i - \sum_{i \in I_1} e_i - 2 \quad (4.48)$$

durchführen. $I_{<}$ und $I_{>}$ hängen nur über \tilde{m}_i und $\rho_{i|j}$ von der Gitterkonstanten ab. Für die Entwicklung von $I_{<}$ werden \tilde{m}_i , $\rho_{i|j}$ und k_j als klein angenommen. Für die Entwicklung von $I_{>}$ sind nur \tilde{m}_i und $\rho_{i|j}$ klein.

Die Entwicklung von $I_{<}$ führt wie in Abschnitt 4.2.3 auf FEYNMAN-Integrale mit Propagatoren des Kontinuums. Diese Integrale können mit Hilfe von FEYNMAN-Parametern auf (E.2) zurückgeführt werden, vgl. Abschnitt E.

Die Entwicklung von $I_{>}$ geschieht mit Hilfe von Rekursionsrelationen. Dazu wird

$$H'_{n m a_1 a_2} = \int \prod_{i=1}^2 \frac{dk_i}{(1+k_i^2)^{a_i}} D^B(0, k)^{-n-\delta} D^G(0, k)^{-m} \quad (4.49)$$

definiert. Es gelten folgende algebraische Identitäten:

$$\left[1 + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1) \mathbf{n}^+ \right] H' = 0 \quad (4.50)$$

$$\left[1 + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1) \mathbf{m}^+ + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1)^2 \mathbf{m}^+ - r^2 \left[\sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1) \right]^2 \mathbf{m}^+ \right] H' = 0 \quad (4.51)$$

$$\left[(\mathbf{m}^- + \sum_{i=1}^2 \mathbf{a}_i^+ (\mathbf{a}_i^+ - 1)) \mathbf{n}^{+2} - r^2 \right] H' = 0 \quad (4.52)$$

Durch Einfügen von $\frac{\partial}{\partial k_1} k_1$ bzw. $\frac{\partial}{\partial k_2} k_2$ in den Integranden und partielle Integration erhält man zwei weitere Beziehungen:

$$\left[1 + 2m\mathbf{a}_1^+ (\mathbf{a}_1^+ - 1) \mathbf{m}^+ (2\mathbf{a}_1^+ - 1 - 2r^2 \sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1)) + 2a_1 (\mathbf{a}_1^+ - 1) + 2(n + \delta) \mathbf{a}_1^+ (\mathbf{a}_1^+ - 1) \mathbf{n}^+ \right] H' = 0 \quad (4.53)$$

$$\left[1 + 2m\mathbf{a}_2^+ (\mathbf{a}_2^+ - 1) \mathbf{m}^+ (2\mathbf{a}_2^+ - 1 - 2r^2 \sum_{i=1}^2 (\mathbf{a}_i^+ - 1)) + 2a_2 (\mathbf{a}_2^+ - 1) + 2(n + \delta) \mathbf{a}_2^+ (\mathbf{a}_2^+ - 1) \mathbf{n}^+ \right] H' = 0 \quad (4.54)$$

Als Masterintegrale werden H'_{-1011} , H'_{0011} , H'_{-1111} und H'_{-1112} gewählt. Diese kann man in eine TAYLOR-Reihe in δ entwickeln:

$$H'_{n m a_1 a_2} = \sum_{i=0}^{\infty} H'^{(i)}_{n m a_1 a_2} \delta^i \quad (4.55)$$

Für die $H'^{(i)}_{n m a_1 a_2}$ gelten folgende Beziehungen:

$$H'^{(0)}_{-1011} = \pi^2 = H'^{(0)}_{0011} \quad (4.56)$$

$$H'^{(0)}_{-1111} = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \quad (4.57)$$

$$H'^{(0)}_{-1112} = (-18 + (-27 + 32\sqrt{3})\pi) \frac{\pi}{54} \quad (4.58)$$

$$H'^{(1)}_{0011} - H'^{(1)}_{-1011} = \pi(\pi - 2) \quad (4.59)$$

$$H'^{(2)}_{0011} - H'^{(2)}_{-1011} - H'^{(1)}_{-1011} = \pi^2 + 6\pi(\log(2) - 1) \quad (4.60)$$

Es zeigt sich, dass die asymptotische Entwicklung unter Ausnutzung dieser Beziehungen nur noch von einer numerischen Konstanten c abhängt. Diese wird definiert durch

$$c \equiv H'^{(1)}_{0011} + 2H'^{(1)}_{-1112} - \frac{8}{3}H'^{(1)}_{-1111}. \quad (4.61)$$

Ihr Wert beträgt ungefähr 0,871981885.

Die Entwicklung von $I_>$ kann nun durchgeführt werden. Um die aus (4.45) entstehenden Terme auf die Form (4.49) zu bringen, ist folgende Formel nützlich:

$$\frac{k_i^2}{1 + k_i^2} = 1 - \frac{1}{1 + k_i^2} \quad (4.62)$$

Solche Terme können durch Erhöhung des Index a_i erzeugt werden.

Das MATHEMATICA-Paket in Abschnitt G.2 kann für die Entwicklung der Integrale (4.42) verwendet werden. Dieses Paket integriert nicht über die eventuell eingeführten FEYNMAN-Parameter. Solche Integrationen können aber zumindest für *einen* FEYNMAN-Parameter mit MATHEMATICA ausgeführt werden. Tritt mehr als ein FEYNMAN-Parameter auf, kann man wahrscheinlich nicht über alle elementar integrieren.

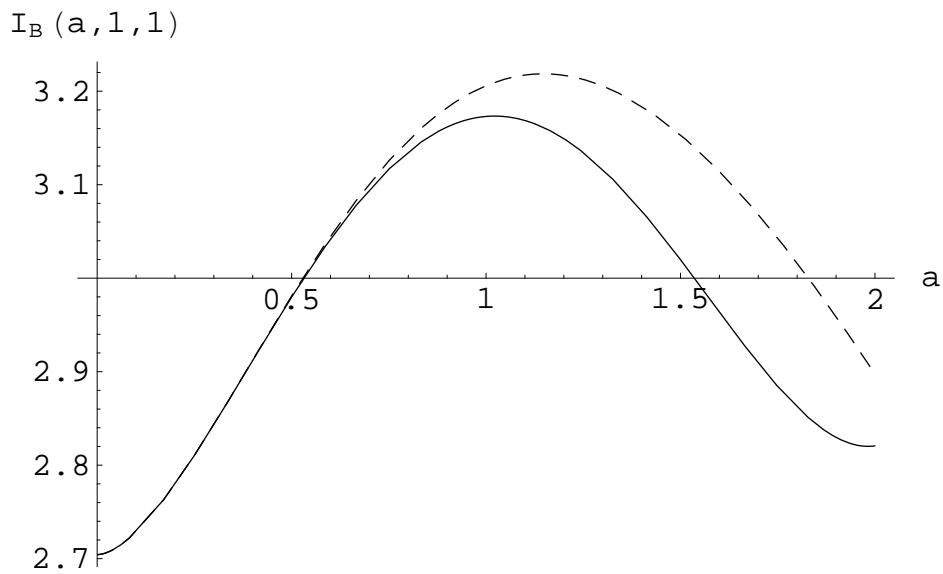
Ein Test, den das Paket erfüllt, beruht darauf, dass sich alle Divergenzen in δ exakt aufheben müssen. Im nächsten Abschnitt wird die asymptotische Entwicklung von zwei Integralen mit numerischen Resultaten verglichen.

4.2.5. Vergleich mit numerischen Resultaten

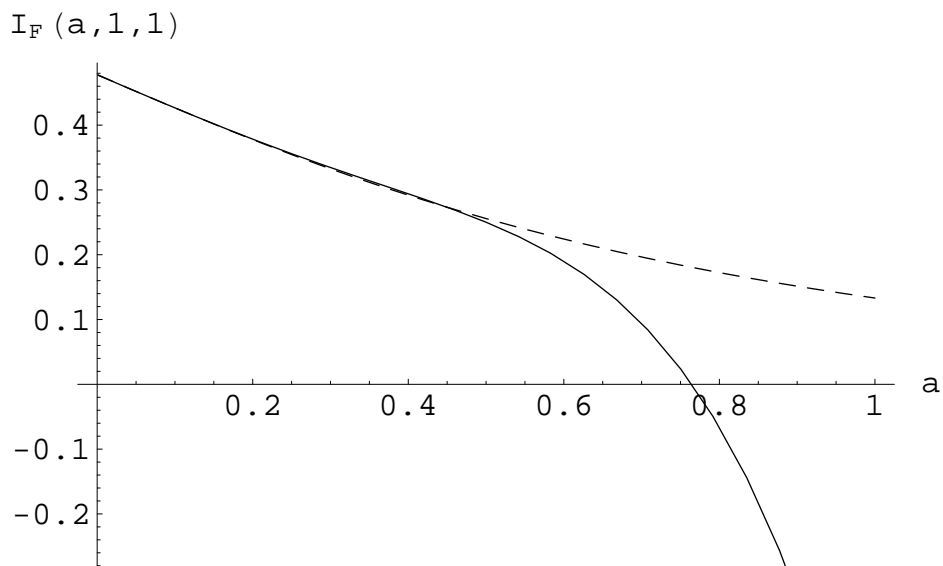
In zwei Dimensionen können die Integrale (F.1) und (F.4) noch gut numerisch berechnet werden. Es bietet sich daher an, durch Vergleich mit numerischen Resultaten die Konvergenz der asymptotischen Entwicklung zu untersuchen.

In Abbildungen 4.1 wurde das Verhalten für $a \rightarrow 0$ dargestellt. Dabei wurde p konstant gehalten. Die Entwicklung der Fermionenschleife zeigt ein etwas schlechteres Konvergenzverhalten als die der Bosonenschleife.

4. FEYNMAN-Integrale



(a) Bosonenschleife nach (F.3)



(b) BPHZ-renormierte Fermionenschleife nach (F.6)

Abbildung 4.1.: Konvergenzverhalten bei festgehaltenem Impuls $p = 1$ und einer Masse $m = 1$. Die gestrichelten Linien sind numerische Resultate. Für dieses Diagramm wurde eine Entwicklung der Fermionenschleife bis zur vierten Ordnung in a verwendet. Die höheren Ordnungen sind in (F.6) auf Grund ihrer Komplexität allerdings nicht angegeben.

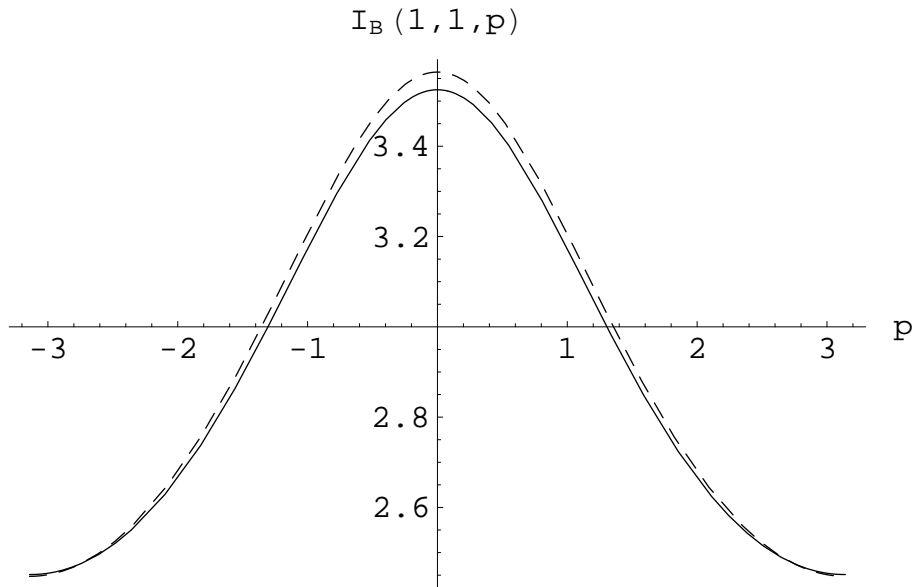
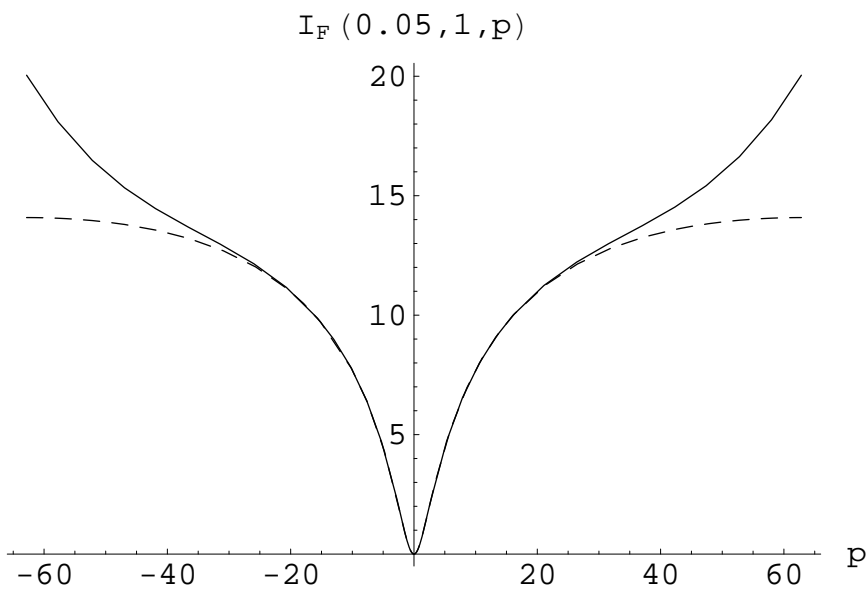
(a) Bosonenschleife nach (F.3) für $a = 1$ (b) BPHZ-renormierte Fermionenschleife nach (F.6) für $a = 0.05$

Abbildung 4.2.: Konvergenzverhalten bei festem Gitterabstand a und einer Masse $m = 1$, aufgetragen in der gesamten BRILLOUIN-Zone, d.h. $p \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$. Die gestrichelten Linien sind numerische Resultate. Für dieses Diagramm wurde eine Entwicklung der Fermionenschleife bis zur vierten Ordnung in a verwendet. Die höheren Ordnungen sind in (F.6) auf Grund ihrer Komplexität allerdings nicht angegeben.

4. FEYNMAN-Integrale

In Abbildungen 4.2 wurde hingegen a konstant gehalten und das Verhalten der Entwicklung im Impuls p in der gesamten BRILLOUIN-Zone untersucht. Hier zeigt sich bei der Entwicklung der Fermionenschleife eine noch deutlichere Abweichung, denn erst bei sehr kleinem a stimmt die Entwicklung in einem großen Teil der BRILLOUIN-Zone mit den numerischen Ergebnissen überein. Die Abweichungen bleiben aber am Rand der BRILLOUIN-Zone, auch für kleine a , relativ groß.

Für diese Diagramme wurde eine Entwicklung der Fermionenschleife bis zur vierten Ordnung in a verwendet. Die höheren Ordnungen sind in (F.6) auf Grund ihrer Komplexität allerdings nicht angegeben. Sie können mit dem Programm aus Abschnitt G.2 bestimmt werden, dies ist jedoch sehr zeitaufwendig.

5. Diskussion

Die asymptotische Entwicklung der FEYNMAN-Integrale einer supersymmetrischen Gittertheorie ist dazu geeignet, analytische Ausdrücke für das Verhalten der WARD-Identitäten für kleine Gitterkonstanten zu erhalten. Für Simulationen es ist notwendig, dass diese den korrekten Grenzwert annehmen, und eine schnelle Konvergenz ist wünschenswert. Weichen die Simulationen von der Gitterstörungstheorie ab, weist dies auf Effekte hin, die nicht mit der Störungstheorie berechnet werden können. Die Untersuchung solcher Effekte ist gerade das Ziel von Gittersimulationen. Ist beispielsweise eine WARD-Identität in Simulationen verletzt, obwohl sie nach der Gitterstörungstheorie erfüllt sein müsste, dann hat weist dies auf eine Brechung der Supersymmetrie hin, die nicht über die Störungstheorie im Kontinuum gefunden werden kann.

Fraglich bleibt, ob die Berücksichtigung von Integralen mit nur einer Schleife ausreicht, um hieraus für Simulationen relevante Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhalten, ganz zu schweigen von der Tatsache, dass Simulationen auf einem endlichen Gitter durchgeführt werden und die Gittertheorie für ein unendliches Gitter formuliert wird. Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens auf mehrere Schleifen ist aufwendig. In diesem Fall ist es eventuell vorteilhaft, mit einer anderen Regularisierung zu arbeiten. Wahrscheinlich lassen sich die Koeffizienten der Entwicklung nicht mehr über Rekursionsbeziehungen auf endlich viele numerisch oder analytisch bestimmbare Konstanten zurückführen. Es ist aber durchaus machbar, nur die führende Ordnung zu bestimmen. Man erhält so eine auch für divergente Integrale geeignete systematische Methode, um zu überprüfen, ob die Gittertheorie den korrekten Kontinuumsimes besitzt.

Es ist denkbar, die Wirkung durch Hinzufügen zusätzlicher Terme, die im naiven Kontinuumsimes aus der Wirkung verschwinden, zu verbessern, d.h. so zu verändern, dass die WARD-Identitäten das richtige bzw. ein verbessertes Konvergenzverhalten haben. Analytische Ausdrücke für die WARD-Identitäten sind dabei eventuell hilfreich.

Es ist auch möglich, andere Gitterableitungen zu betrachten, die im Impulsraum durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt werden können. Dazu müssen im Wesentlichen nur die Rekursionsbeziehungen angepasst werden. Ein Vergleich verschiedener Ableitungen bezüglich der Konvergenz wird dadurch möglich.

Das Lösen der Rekursionsbeziehungen kann viel effektiver mit Hilfe von Algorithmen erfolgen, die Gebrauch von GRÖBNER-Basen machen. Diese Basen enthalten quasi eine allgemeine Lösungsvorschrift für die Rekursionsbeziehungen und müssen für jede Dimension und Ableitung nur einmal berechnet werden.

Die Durchführung dieser Rechnungen mit Hilfe von MATHEMATICA hat den Vorteil,

5. Diskussion

dass **MATHEMATICA** eine benutzerfreundliche Oberfläche bietet und viele benötigte Routinen bereits implementiert sind. Insbesondere neuere Versionen von **MATHEMATICA** zeigen aber teilweise einen übermäßig hohen Verbrauch von Ressourcen. Dieses Problem konnte manchmal durch Implementierung alternativer Routinen umgangen werden, allerdings wird auch der Vorteil der umfangreichen bereits implementierten Routinen relativiert. Besser wäre es also, die bezüglich der Ressourcen aufwendigen Programmteile beispielsweise in **C++** oder **FORM** umzusetzen und **MATHEMATICA** hauptsächlich als Benutzeroberfläche zu verwenden.

A. Notation und Konventionen

Die MINKOWSKI-Metrik ist $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$. Die Generatoren der Translationen sind P_μ und die der LORENTZ-Gruppe, also der Isometriegruppe zu dieser Metrik, sind $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$. Zusammen bilden sie die POINCARÉ-Algebra:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -(M_{\mu\nu})_\rho{}^\tau J_{\tau\sigma} - (M_{\mu\nu})_\sigma{}^\tau J_{\rho\tau} \quad (\text{A.1})$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = -(M_{\mu\nu})_\rho{}^\sigma P_\sigma \quad (\text{A.2})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (\text{A.3})$$

$M_{\mu\nu}$ sind Matrizen mit $(M_{\mu\nu})^{\rho\tau} = -i\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\tau + i\delta_\nu^\rho\delta_\mu^\tau$. Die $M_{\mu\nu}$ bilden selbst bereits eine Darstellung der LORENTZ-Algebra (A.1), nämlich die *Vektordarstellung*. Die Gleichungen (A.2) und (A.1) besagen also lediglich, dass sich P_μ unter der LORENTZ-Gruppe wie ein Vektor transformiert und $J_{\mu\nu}$ wie ein Bivektor. Die *Spinordarstellung* ist durch die $\Sigma_{\mu\nu}$ aus Abschnitt B.1 gegeben. Ein Element der POINCARÉ-Gruppe (ohne Raum- und Zeitspiegelung) kann allgemein geschrieben werden als $\exp(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu} + ia^\mu P_\mu)$, wobei $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ gelten soll. Eine LORENTZ-Matrix kann somit als $\Lambda = \exp(\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}) = \exp(\omega)$ geschrieben werden.

Der räumliche Anteil eines Vektors x wird mit \mathbf{x} bezeichnet

Indizes von Spinoren werden durchgängig unterdrückt. Es werden DIRAC-Slashes verwendet, z.B. $\not{P} \equiv \gamma^\mu P_\mu$. Weitere Definitionen zu Spinoren sind in Abschnitt B zusammengefasst. Der ladungskonjugierte Spinor ψ^c ist in MINKOWSKI-Metrik durch $\psi^c \equiv B_- \psi^*$ und in EUKLIDISCHER Metrik durch $\psi^c \equiv B_+ \psi^*$ gegeben. In zwei Dimensionen soll außerdem für beide Metriken $B_\pm = \mathcal{CA}^\top$ gewählt werden.

Sind θ und ξ zwei GRASSMANN-Variablen, dann gilt für die komplexe Konjugation $(\theta\xi)^* = \xi^*\theta^*$.

Nützliche Formeln sind:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (\text{A.4})$$

$$e^{-B} A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_{(n)} \quad (\text{A.5})$$

Formel (A.4) ist nach BAKER, CAMPBELL und HAUSDORFF benannt, die ... stehen für mehrfache Kommutatoren zwischen A und B . In (A.5) ist $[A, B]_{(0)} = A$ und $[A, B]_{(n+1)} = [[A, B]_{(n)}, B]$.

Die σ_i sind die Pauli Matrizen, d.h.:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Die zweidimensionale Einheitsmatrix wird auch als σ_0 bezeichnet.

B. Spinoren

Literatur zu diesem Abschnitt befindet z.B. in [7, 10, 12, 13, 42, 43].

B.1. Dirac-Matrizen

Die DIRAC-Matrizen γ_μ sind irreduzible Darstellungen der CLIFFORD-Algebra:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

Die Matrizen $\Sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ erzeugen dann die LORENTZ-Transformation der γ_μ :

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = -(M_{\mu\nu})_\rho^\sigma \gamma_\sigma \quad (\text{B.2})$$

Hieraus folgt sofort, dass die $\Sigma_{\mu\nu}$ eine Darstellung der LORENTZ-Algebra (A.1) bilden:

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -(M_{\mu\nu})_\rho^\tau \Sigma_{\tau\sigma} - (M_{\mu\nu})_\sigma^\tau \Sigma_{\rho\tau} \quad (\text{B.3})$$

Die Objekte, die nach dieser Darstellung der LORENTZ-Algebra transformieren, werden Spinoren genannt. Diese Darstellung muss nicht irreduzibel sein. Für die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ soll eine beliebige Signatur zugelassen werden, wobei t die Zahl der zeitartigen Dimensionen und s die Zahl der raumartigen Dimensionen sein soll. Auf der Diagonale von $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$ steht also t -mal eine $+1$ und s -mal eine -1 .

B.1.1. Gerade Dimension $d = 2n$

Zuerst wird eine irreduzible Darstellung der DIRAC-Matrizen in gerader Dimension $d = 2n$ explizit konstruiert. Vorerst soll die Metrik EUKLIDISCH sein, d.h. $s = 0$. Die γ_μ werden als HERMITESCH angenommen. Man führt die Operatoren $a_u = \frac{1}{2}(\gamma_{2u-2} \pm i\gamma_{2u-1})$ mit $u = 1, 2, \dots, n$ ein, für die folgende Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{a_u, a_v^\dagger\} = \delta_{uv}, \quad \{a_u, a_v\} = \{a_u^\dagger, a_v^\dagger\} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Nun führt man einen Vektor $|0\rangle$ ein, der die Bedingungen $a_u^\dagger |0\rangle = 0$ erfüllen soll und definiert mit diesem die Basisvektoren $|s_1 s_2 \dots s_n\rangle = (a_1)^{s_1} (a_2)^{s_2} \dots (a_n)^{s_n} |0\rangle$. Aufgrund der Vertauschungsrelationen (B.4) können die s_u nur die Werte 0 und 1 annehmen. Man erhält somit ein direktes Produkt von n zweidimensionalen Vektorräumen. Aus den Vertauschungsrelationen ergeben sich die Matrizen der a_u in dieser Basis zu:

$$a_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \quad (\text{B.5})$$

Die letzte Matrix vor den Einheitsmatrizen steht an der u -ten Stelle. Die DIRAC-Matrizen für $s = 0$ sind also:

$$\gamma_{2u-2} = \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_0 \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_{2u-1} = \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_0 \otimes \dots \otimes \sigma_0 \quad (\text{B.7})$$

Die DIRAC-Matrizen mit beliebiger Signatur erhält man hieraus, indem man die letzten s Matrizen mit i multipliziert.

Es gilt der Satz, dass alle irreduziblen Darstellungen der CLIFFORD-Algebra in gerader Dimension zu dieser Darstellung äquivalent sind, d.h. hat man eine irreduzible Darstellung γ'_μ , dann gibt es ein S , so dass $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$. Ist aber γ_μ eine Darstellung der CLIFFORD-Algebra, sind auch $-\gamma_\mu$, $\pm\gamma_\mu^\dagger$, $\pm\gamma_\mu^\top$ und $\pm\gamma_\mu^*$ Darstellungen. Es gelten also folgende Beziehungen:

$$-\gamma_\mu = \gamma_* \gamma_\mu \gamma_*^{-1} \quad \pm\gamma_\mu^\dagger = A_\pm \gamma_\mu A_\pm^{-1} \quad (\text{B.8})$$

$$\pm\gamma_\mu^* = B_\pm^{-1} \gamma_\mu B_\pm \quad \pm\gamma_\mu^\top = C_\pm^{-1} \gamma_\mu C_\pm \quad (\text{B.9})$$

Die Matrizen A_\pm , B_\pm , C_\pm und γ_* sind nach dem Lemma von SCHUR eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Konstante. Von diesen Matrizen soll außerdem verlangt werden, dass der Betrag ihrer Determinanten gleich eins ist. Mit dieser Bedingung ist nur noch die Phase unbestimmt. Man sieht sofort, unter Verwendung der CLIFFORD-Algebra, dass man $\gamma_* = (-i)^{n+s} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{d-1}$ wählen kann. Die Phase wurde so gewählt, dass $\gamma_*^2 = 1$ ist.

Wenn man berücksichtigt, dass die letzten s Matrizen noch mit i zu multiplizieren sind, gilt für die Darstellung (B.6, B.7):

$$\gamma_\mu^\dagger = \begin{cases} \gamma_\mu & \text{für } \mu < t \\ -\gamma_\mu & \text{für } \mu \geq t \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma_\mu^\top = \begin{cases} \gamma_\mu & \text{für } \mu \text{ gerade} \\ -\gamma_\mu & \text{für } \mu \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Da das Vertauschen zweier nicht gleicher DIRAC-Matrizen nur das Vorzeichen ändert, kann dies umgeschrieben werden als:

$$\mathcal{A} \gamma_\mu \mathcal{A}^{-1} = (-1)^{t+1} \gamma_\mu^\dagger \quad \text{mit } \mathcal{A} \equiv (-i)^{-\frac{1}{2}(t-1)t} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{t-1} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{C}^{-1} \gamma_\mu \mathcal{C} = (-1)^n \gamma_\mu^\top \quad \text{mit } \mathcal{C} \equiv \gamma_1 \gamma_3 \dots \gamma_{2n-1} \quad (\text{B.13})$$

Die Matrizen A_\pm , B_\pm und C_\pm können nun durch \mathcal{A} , \mathcal{C} und γ_* ausgedrückt werden. Alle diese Matrizen sind unitär, da nach (B.10) bereits alle γ_μ unitär sind. Die Phase von \mathcal{A} wurde so gewählt, dass $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$. Für EUKLIDISCHE Metrik, d.h. $s = 0$, gilt in dieser Darstellung $\mathcal{A} = \gamma_*$.

B.1.2. Ungerade Dimension $d = 2n + 1$

Aus den DIRAC-Matrizen in $d = 2n$ Dimensionen kann man DIRAC-Matrizen in $d = 2n + 1$ Dimensionen erhalten, indem man $\gamma_{2n} = i\gamma_*$ setzt. Ist $s = 0$, dann muss

$s - t$	0	1	2	3	4	5	6	7	(mod 8)
b_+	+1		-1	-1	-1		+1	+1	
b_-	+1	+1	+1		-1	-1	-1		

Tabelle B.1.: Die basisunabhängige Zahl $b_{\pm} \equiv B_{\pm}B_{\pm}^*$. Wo keine Zahl steht, kann die entsprechende Matrix B_{\pm} nicht definiert werden. Diese Tabelle gilt ebenfalls für $c_{\pm} \equiv C_{\pm}C_{\pm}^{-1\text{T}}$, wenn man $s - t$ durch $-d$ ersetzt.

man den Vorfaktor i weglassen. Die Darstellungen γ_{μ} und $-\gamma_{\mu}$ sind damit nicht mehr äquivalent: Wenn es ein S gäbe, so dass $-\gamma_{\mu} = S\gamma_{\mu}S^{-1}$, dann wäre $\gamma_{2n} = S\gamma_{2n}S^{-1}$, denn γ_{2n} ist proportional zum Produkt einer *geraden* Anzahl von DIRAC-Matrizen. In der Tat gilt der Satz, dass eine irreduzible Darstellung der CLIFFORD-Algebra in ungerader Dimension zu einer dieser beiden Äquivalenzklassen gehören muss. Dies bedeutet, dass es nur entweder eine Matrix A_+ oder A_- mit der Eigenschaft (B.8) geben kann und entsprechend existiert auch nur jeweils eine der Matrizen B_{\pm} und C_{\pm} . Die Relationen (B.12) und (B.13) bleiben aber gültig, so dass man anhand dieser entscheiden kann, ob z.B. A_+ oder A_- noch definiert werden kann.

B.1.3. Spezielle Darstellungen

Man kann durch einen Basiswechsel $\gamma'_{\mu} = S\gamma_{\mu}S^{-1}$ von den obigen Darstellungen zu jeder anderen irreduziblen Darstellung übergehen. Durch so einen Basiswechsel transformieren die Matrizen A_{\pm} , B_{\pm} und C_{\pm} gemäß:

$$A'_{\pm} = S^{-1\text{†}}A_{\pm}S^{-1}, \quad B'_{\pm} = SB_{\pm}S^{-1*}, \quad C'_{\pm} = SC_{\pm}S^{\text{T}} \quad (\text{B.14})$$

Hieraus folgt, dass die Zahl $b_{\pm} \equiv B_{\pm}B_{\pm}^*$ basisunabhängig und unabhängig von der Wahl der Phase von B_{\pm} ist und daher in jeder beliebigen Basis berechnet werden kann. Gleiches gilt für die Zahl $c_{\pm} \equiv C_{\pm}C_{\pm}^{-1\text{T}}$. Das Ergebnis für b_{\pm} und c_{\pm} ist in Tabelle B.1.3 aufgeführt [42, 43]. Außerdem kann man A_{\pm} basisunabhängig so wählen, dass $A_{\pm} = A_{\pm}^{\text{†}}$ gilt.

Für explizite Rechnungen ist es sinnvoll, DIRAC-Matrizen mit bestimmten Eigenschaften zu wählen. Übliche Darstellungen sind:

Chirale Darstellung: Diese existiert in gerader Dimension und ist dadurch charakterisiert, dass γ_* diagonal ist.

Dirac-Darstellung: In dieser Darstellung ist γ_0 diagonal.

Majorana-Darstellung: Hier sind alle DIRAC-Matrizen rein imaginär¹, d.h. $-\gamma_{\mu}^* = \gamma_{\mu}$. Durch Vergleich mit (B.9) erkennt man, dass B_- existiert und gleich der Einheitsmatrix gewählt werden kann. Es muss also $b_- = +1$ gelten, vgl. Tabelle B.1.3.

¹Dies gilt falls, wie hier, die raumartigen Richtungen eine -1 in der Metrik bekommen.

B.2. Irreduzible Spinoren

Wie bereits erwähnt, sind zwar die DIRAC-Matrizen γ_μ irreduzible Darstellungen der CLIFFORD-Algebra, die daraus nach (B.3) konstruierte Darstellung der LORENTZ-Algebra muss jedoch nicht irreduzibel sein. Irreduzible Spinoren erhält man, indem man fordert, dass die Spinoren reell und/oder chiral sein sollen.

Der Spinor ψ^* transformiert unter der LORENTZ-Algebra (B.3) mit $\Sigma_{\mu\nu}^*$, also im Allgemeinen nicht wie ψ . Man kann deshalb nicht fordern, dass ψ^* gleich ψ sein soll, da dies nicht LORENTZ-invariant wäre. ψ^* kann aber mit Hilfe von B_\pm umgerechnet werden, damit er das gleiche Transformationsverhalten wie ψ hat. Das Ergebnis ist der ladungskonjugierte Spinor ψ^c :

$$\psi^c \equiv B_\pm \psi^* \quad (\text{B.15})$$

Dieser besitzt das gewünschte Transformationsverhalten, denn es gilt $(i\Sigma_{\mu\nu})^* = B_\pm^{-1} i\Sigma_{\mu\nu} B_\pm$. Er wird ladungskonjugierter Spinor genannt, da die DIRAC-Gleichung unter komplexer Konjugation und anschließendem Basiswechsel durch B_\pm in eine DIRAC-Gleichung mit gleichen DIRAC-Matrizen und entgegengesetzter Ladung übergeht. Sind die Komponenten des Spinors ψ Operatoren auf einem HILBERT-Raum, dann ist die komplexe Konjugation einer Komponente als HERMITESche Konjugation bezüglich des HILBERT-Raumes zu verstehen.

Analog definiert man einen adjungierten Spinor durch:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \mathcal{A} \quad (\text{B.16})$$

Eine LORENTZ-Transformation des adjungierten Spinors erhält man durch Multiplikation von rechts mit dem Inversen dieser Transformation, denn es gilt $(i\Sigma_{\mu\nu})^\dagger = \mathcal{A} i\Sigma_{\nu\mu} \mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{A} i\Sigma_{\mu\nu} \mathcal{A}^{-1}$.

B.2.1. Chirale Spinoren

In geraden Dimensionen kann man mit Hilfe von γ_* zwei Projektoren definieren:

$$\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_*) \quad (\text{B.17})$$

Diese kommutieren mit allen $\Sigma_{\mu\nu}$. Man kann also eine der folgenden LORENTZ-invarianten Bedingungen an ψ stellen:

$$\mathcal{P}_\pm \psi = \psi \quad (\text{B.18})$$

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, wird der Spinor *chiral* genannt. Ein Spinor mit $\mathcal{P}_+ \psi = \psi$ heißt *rechtshändig*, einer mit $\mathcal{P}_- \psi = \psi$ nennt sich *linkshändig*.

B.2.2. Reelle Spinoren

Ein reeller Spinor, auch MAJORANA-Spinor genannt, erfüllt die Bedingung:

$$\psi^c = \psi \quad (\text{B.19})$$

Ladungskonjugation auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert die Konsistenzbedingung $\psi = \psi^{cc} = B_{\pm} B_{\pm}^* \psi$. Diese Bedingung ist erfüllt, falls $b_+ = +1$ oder $b_- = +1$, vgl. Tabelle B.1.3. Liegen die DIRAC-Matrizen in einer MAJORANA-Darstellung vor, dann ist $B_- = 1$ und die Komponenten eines MAJORANA-Spinors sind tatsächlich reell, d.h. $\psi^* = \psi$.

Gilt hingegen $b_+ = -1$ oder $b_- = -1$ und hat man k Spinoren ψ_i ($i = 1, \dots, k$), kann man eine *symplektische* MAJORANA-Bedingung stellen:

$$\psi_i^c = \Omega_{ij} \psi_j \quad (\text{B.20})$$

Hier soll die Matrix Ω unitär und antisymmetrisch sein, insbesondere gilt $\Omega \Omega^* = -1$. Die Bedingung (B.20) ist dann konsistent, falls $B_{\pm}^{-1} \Omega_{ij} B_{\pm}^{-1*} \Omega_{jk}^* = \delta_{ik}$, d.h. wenn $b_+ = -1$ oder $b_- = -1$ gilt. Die Bedingung $\Omega \Omega^* = -1$ kann nur erfüllt werden, wenn die Zahl der Spinoren k gerade ist, weil $|\det \Omega|^2 = \det(-1) = (-1)^k$ sein muss.

B.2.3. Reelle chirale Spinoren

Man kann sich nun fragen, unter welchen Bedingungen die Spinoren gleichzeitig reell und chiral sein können. Weil $B_+ \propto \gamma_* B_-$ und $\gamma_*^2 = 1$ ist, gilt $\mathcal{P}_+ B_{\pm} \propto \mathcal{P}_+ B_{\mp}$ und $\mathcal{P}_- B_{\pm} \propto -\mathcal{P}_- B_{\mp}$, obige Konsistenzbedingung muss also immer für B_+ und B_- erfüllt sein. Daher muss für die Existenz von reellen chiralen Spinoren $b_+ = +1$ und $b_- = +1$ gelten, bzw. $b_+ = -1$ und $b_- = -1$ bei symplektisch-reellen chiralen Spinoren.

B.3. Gewichte

Die Superladungen transformieren unter der LORENTZ-Gruppe wie ein Spinor. Dies kann gezeigt werden, indem man deren Gewichte bestimmt und mit denen der Spinordarstellung vergleicht.

Eine CARTANSche Unteralgebra ist eine maximale abelsche Unteralgebra einer LIE-Algebra. Ihre Elemente besitzen also gemeinsame Eigenvektoren. Eine mögliche CARTANSche Unteralgebra der LORENTZ-Algebra (B.3) ist gegeben durch $\Sigma_{2u-2 \ 2u-1}$ mit $u = 1, 2, \dots, n$, sowohl in $d = 2n$ als auch in $d = 2n + 1$. Mit der Definition von a_u aus Abschnitt B.1.1 gilt²:

$$\Sigma_{2u-2 \ 2u-1} = \frac{1}{2} [a_u, a_u^\dagger] = a_u a_u^\dagger - \frac{1}{2} \quad (\text{B.21})$$

²Hier ist die Metrik EUKLIDisch.

Die in Abschnitt B.1.1 benutzten Basisvektoren $|s_1 s_2 \dots s_n\rangle = (a_1)^{s_1} (a_2)^{s_2} \dots (a_n)^{s_n} |0\rangle$ sind gerade die gemeinsamen Eigenvektoren dieser CARTANSchen Unteralgebra, die Gewichte bzw. Eigenwerte sind $s_u - 1/2$. Weil s_u nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, sind die Gewichte einer Spinordarstellung also entweder $+1/2$ oder $-1/2$.

C. Grassmann-Variablen

Im Folgenden sind $Q_a(t)$ und $P_a(t)$ Operatoren, die den Koordinaten und den dazu konjugierten Impulsen des kanonischen Formalismus entsprechen. Für ein skalares Feld $A(\mathbf{x}, t)$ ist z.B. $Q_{\mathbf{x}}(t) \equiv A(\mathbf{x}, t)$ und $P_{\mathbf{x}}(t) \equiv \dot{A}(\mathbf{x}, t)$. Bei der Herleitung des Pfadintegrals für Bosonen aus dem kanonischen Formalismus nutzt man, dass die gemeinsamen Eigenvektoren $|q\rangle$ der Q_a zum Eigenwert q_a eine Basis des physikalischen HILBERT-Raumes bilden:

$$1 = \int \prod_a dq_a |q\rangle \langle q| \quad (\text{C.1})$$

Mit Hilfe von

$$Q_a |q\rangle = q_a |q\rangle \quad (\text{C.2})$$

kann man außerdem die Operatoren Q_a durch ihre Eigenwerte q_a ersetzen. Analoges gilt für P_a .

Bei Fermionen gelten zwischen den Q_a und P_a jedoch Antikommutatoren:

$$\{Q_a, P_b\} = i\delta_{ab}, \quad \{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0 \quad (\text{C.3})$$

Man hat daher Probleme, mit Hilfe von (C.2) die Q_a durch ihre Eigenwerte q_a zu ersetzen, denn für diese müsste wegen (C.3) $q_a q_b + q_b q_a = 0$ gelten. Man fordert daher, dass die q_a , ebenso wie die Q_a , untereinander antikommutieren. Die q_a sollen trotzdem auf den physikalischen HILBERT-Raum wie gewöhnliche Variablen wirken. Die Variablen erhalten somit, genau wie die Q_a und P_a , eine \mathbb{Z}_2 -Graduierung, die zwischen bosonischen und fermionischen Sektor unterscheidet, vgl. Abschnitt 2.1. Es sollen daher folgende Antikommutatoren gelten:

$$\{q_a, q_b\} = \{q_a, Q_b\} = \{q_a, P_b\} = 0 \quad (\text{C.4})$$

Die q_a sind nur durch diese algebraischen Eigenschaften definiert, man kann sie nicht durch reelle Zahlen darstellen. Sie werden als GRASSMANN-Variablen bezeichnet. Man kann jetzt eine Lösung $|q\rangle$ von (C.2) konstruieren [1]:

$$|q\rangle = \exp\left(-i \sum_a P_a q_a\right) |0\rangle \quad (\text{C.5})$$

Analog zu Abschnitt B.1.1, vgl. (B.4) und (C.3), ist $|0\rangle$ definiert durch $Q_a |0\rangle = 0$ für alle a . Eine Basis des HILBERT-Raumes erhält man ebenfalls analog durch wiederholtes Anwenden der P_a , d.h. $|a, b, \dots\rangle \equiv P_a P_b \dots |0\rangle$. Der Vektor $|q\rangle$ enthält also alle Basisvektoren $|a, b, \dots\rangle$. Man kann mit der im folgenden Abschnitt definierten BEREZIN-Integration über die GRASSMANN-Variablen q_a eine zu (C.1) analoge

Relation aufstellen [1]. Fermionische Felder werden im Pfadintegral daher durch GRASSMANN-Variablen beschrieben, die über (C.1) und (C.2) zwar eine formale Analogie zu bosonischen Feldern herstellen, jedoch nur Feldkonfigurationen berücksichtigen, die dem PAULI-Prinzip genügen.

C.1. Berezin-Integration

Weil GRASSMANN-Variablen zu Null quadrieren, sind deren Potenzen auf die \mathbb{Z}_2 beschränkt. In diesem Sinne führt das Erhöhen und das Erniedrigen der Potenz zum gleichen Ergebnis. Die Integration über eine GRASSMANN-Variable wird daher identisch zur Ableitung nach dieser definiert. Ist θ_i eine GRASSMANN-Variable, dann sind das Integrationsmaß $d\theta_i$ und die Ableitung ∂_{θ_i} ebenfalls fermionische Objekte.

Unter einer Koordinatentransformation $\theta'_i = A_{ij}\theta_j$ ändert sich das Maß $d^n\theta \equiv \prod d\theta_i$ wie eine Ableitung nach allen θ_i gemäß der Kettenregel. Dies führt zu:

$$d^n\theta' = (\det A)^{-1}d^n\theta = \left(\det \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right)^{-1} d^n\theta \quad (\text{C.6})$$

Für bosonische Variablen x_i gilt hingegen¹:

$$d^m x' = \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) d^m x \quad (\text{C.7})$$

Bei der Integration über den Superraum hat man ein gemischtes Maß $d^m x d^n \theta$. Dessen Transformationsverhalten fasst man mit Hilfe der Superdeterminanten Sdet zusammen:

$$dx'^m d\theta'^n = \text{Sdet} \left(\frac{\partial(x', \theta')}{\partial(x, \theta)}\right) d^m x d^n \theta \quad (\text{C.8})$$

Die Superdeterminante kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\text{Sdet} \begin{pmatrix} m_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & m_2 \end{pmatrix} = \frac{\det(m_1 - \mu_2 m_2^{-1} \mu_1)}{\det(m_2)} = \frac{\det(m_1)}{\det(m_2 - \mu_1 m_1^{-1} \mu_2)} \quad (\text{C.9})$$

Hier sind m_1 und m_2 Matrizen mit kommutierenden Einträgen, μ_1 und μ_2 sind hingegen Matrizen mit antikommutierenden Einträgen. Die Matrix $\partial(x', \theta')/\partial(x, \theta)$ ist genau von dieser Form. Für eine lineare Transformation $x' = m_1 x + \mu_2 \theta$ und $\theta' = \mu_1 x + m_2 \theta$ kann man einen Zusammenhang zwischen (C.8) und (C.9) herstellen, indem man zuerst eine Transformation $\theta' = \mu_1 x + m_2 \theta$ durchführt, was den Faktor $\det^{-1}(m_2)$ ergibt, und danach die Transformation $x' = m_1 x + \mu_2 m_2^{-1}(\theta' - \mu_1 x)$ mit dem Faktor $\det(m_1 - \mu_2 m_2^{-1} \mu_1)$. Die Superdeterminante hängt mit der Superspur STr über $\text{Sdet}(\exp(M)) = \exp(\text{STr}(M))$ zusammen. Es gilt:

$$\text{STr} \begin{pmatrix} m_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & m_2 \end{pmatrix} = \text{Tr}(m_1) - \text{Tr}(m_2) \quad (\text{C.10})$$

¹Hier werden nur Transformationen berücksichtigt, welche die Orientierung erhalten.

D. Fourier-Transformation

Hier werden einige Konventionen zur FOURIER-Transformation auf einem unendlichen n -dimensionalen kubischen Gitter zusammengefasst. Die Gitterkonstante ist a , die Orte der Gitterpunkte werden mit x bezeichnet und eine Funktion auf dem Gitter mit f_x . Diese hängt mit ihrer FOURIER-Transformierten $f(p)$ zusammen über:

$$f(p) = a^n \sum_x f_x e^{-ipx}, \quad f_x = \int_{BZ} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} f(p) e^{ipx} \quad (\text{D.1})$$

Hier ist $BZ = [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]^n$ die BRILLOUIN-Zone des kubischen Gitters. Das Gitter wirkt als Regulator von FEYNMAN-Integralen, indem es die Impulsintegrationen auf die BRILLOUIN-Zone beschränkt. Die für UV-Divergenzen verantwortlichen großen Impulse werden somit einfach abgeschnitten. Die Impulse werden allerdings nicht kovariant abgeschnitten, da sie auf eine *kubische* BRILLOUIN-Zone beschränkt werden und nicht auf eine Kugel. Dies ist natürlich unumgänglich, da das Gitter die RotationsSymmetrie der Kontinuumstheorie verletzt und daher keine kovariante Regularisierung darstellen kann.

Die FOURIER-Transformation der δ -Funktionen ist gegeben durch:

$$\frac{\delta_{xy}}{a^n} = \int_{BZ} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} e^{ip(x-y)}, \quad \delta_P(p) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^n \sum_x e^{-ipx} \quad (\text{D.2})$$

Das P an $\delta_P(p)$ weist darauf hin, dass $\delta_P(p)$ periodisch ist. Man fordert von allen eventuell auftretenden Integranden, dass sie periodisch über die BRILLOUIN-Zone hinaus fortgesetzt werden. In diesem Fall kann man bei Integration über $\delta_P(p - q)$ das p immer durch q ersetzen, auch dann, wenn q nicht in der BRILLOUIN-Zone liegt, so wie man es von $\delta(p - q)$ gewohnt ist.

Für eine Matrix F_{xy} soll die FOURIER-Transformierte $F(p, q)$ definiert sein durch:

$$F(p, q) = a^{2n} \sum_{x,y} F_{xy} e^{-ipx+iqy} \quad (\text{D.3})$$

$$F_{xy} = \int_{BZ} \int_{BZ} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n q}{(2\pi)^n} F(p, q) e^{ipx-iqy} \quad (\text{D.4})$$

Ist F_{xy} ein translationsinvarianter Operator, d.h. gilt $F_{xy} = F_{x-y,0}$, kann man auch schreiben:

$$F(p) = a^n \sum_x F_{x0} e^{-ipx}, \quad F_{xy} = \int_{BZ} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} F(p) e^{ip(x-y)} \quad (\text{D.5})$$

Für translationsinvariante Operatoren gilt somit $F(p, q) = (2\pi)^n \delta_P(p - q) F(p)$.

E. Alpha- und Feynman-Parameter

Aus der Integraldarstellung der Gammafunktion kann man folgende Formel für die Propagatoren im Kontinuum gewinnen:

$$\frac{1}{(k^2 + m^2)^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\lambda-1} e^{(k^2+m^2)\alpha} \quad (\text{E.1})$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man alle solche Propagatoren in FEYNMAN-Integralen ersetzen. Die Integrationen über die Schleifenimpulse werden so zu GAUSSSchen Integralen und können ausgeführt werden. Das Resultat ist eine Darstellung des FEYNMAN-Integrals durch sogenannte Alpha-Parameter, über die dann anstelle der Schleifenimpulse integriert werden muss. Diese Darstellung bietet einige Vorteile, u.a. für die Untersuchung des Divergenzverhaltens oder für die Definition der dimensional Regularisierung [28]. Aber auch für die Auswertung von FEYNMAN-Integralen kann sie verwendet werden. Es gilt:

$$\int \frac{d^d k}{(k^2 + m^2)^\alpha} \prod_{i=1}^d k_i^{2a_i} = m^{d-2\alpha+2\sum_i a_i} \frac{\Gamma(\alpha - d/2 - \sum_i a_i)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{i=1}^d \Gamma\left(\frac{1}{2} + a_i\right) \quad (\text{E.2})$$

Eng verwandt mit den Alpha-Parametern sind die FEYNMAN-Parameter ξ_i [28]. Ihre Bedeutung beruht auf folgender Formel:

$$\frac{1}{\prod_l A_l^{\lambda_l}} = \frac{\Gamma(\sum_l \lambda_l)}{\prod_l \Gamma(\lambda_l)} \int_0^1 d\xi_1 \dots \int_0^1 d\xi_L \prod_l \xi_l^{\lambda_l-1} \frac{\delta(\sum_l \xi_l - 1)}{(\sum_l A_l \xi_l)^{\sum_l \lambda_l}} \quad (\text{E.3})$$

Mit dieser können mehrere Propagatoren zu einem zusammengefasst werden. So können alle Ein-Schleifenintegrale über die Propagatoren (E.1) auf (E.2) zurückgeführt werden. Ein einfaches Beispiel ist:

$$\frac{1}{[(k+p)^2 + m_1^2]^{\lambda_1} [k^2 + m_2^2]^{\lambda_2}} = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \int_0^1 \frac{d\xi \xi^{\lambda_1-1} (1-\xi)^{\lambda_2-1}}{[(k+p'(\xi))^2 + m'(\xi)]^{\lambda_1+\lambda_2}} \quad (\text{E.4})$$

Hier ist:

$$p'(\xi) = p\xi, \quad m'(\xi) = m_1^2\xi + (m_2^2 + p^2\xi)(1-\xi) \quad (\text{E.5})$$

F. Formeln

In diesem Abschnitt wird die Schreibweise (4.38, 4.40) verwendet. Der Impuls soll nur eine nichtverschwindende Komponente haben, daher wird $v = (p, 0)^\top$ gesetzt. Es werden außerdem die Abkürzungen $X = \sqrt{4m^2 + p^2}$ und $Y = \arctan\left(\frac{p}{X}\right)$ verwendet. Die numerische Konstante c beträgt ungefähr 0,871981885.

F.1. Bosonenschleife

In diesem Abschnitt sind die Resultate der asymptotischen Entwicklung für folgendes Integral aufgeführt:

$$I_B(a, m, p) = \int_{BZ} \frac{d^2k}{D^B(m, k + v(p))D^B(m, k)} \quad (\text{F.1})$$

F.1.1. Ohne äußeren Impuls

$$\begin{aligned} I_B(a, m, 0) &= \frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{8} [5 \log(2) - 2 - 2 \log(am)] a^2 \\ &\quad - \frac{\pi}{256} [50 \log(2) - 19 - 20 \log(am)] m^2 a^4 \\ &\quad + \frac{\pi}{2048} [105 \log(2) - 41 - 42 \log(am)] m^4 a^6 \\ &\quad - \frac{\pi}{786432} [10140 \log(2) - 4057 - 4056 \log(am)] m^6 a^8 \\ &\quad + \frac{\pi}{12582912} [40350 \log(2) - 16403 - 16140 \log(am)] m^8 a^{10} \\ &\quad - \frac{\pi}{167772160} [133575 \log(2) - 54823 - 53430 \log(am)] m^{10} a^{12} \\ &\quad + \frac{5\pi}{3221225472} [127470 \log(2) - 52609 - 50988 \log(am)] m^{12} a^{14} \\ &\quad + O(a^{16}) \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

F.1.2. Mit äußerem Impuls

$$\begin{aligned}
 I_B(a, m, p) = & -\frac{4\pi Y}{pX} \\
 & -\frac{a^2\pi}{24pX^3} \left[-3p(\log(32) - 2\log(am))X^3 + 4p(3m^2 + p^2)X \right. \\
 & \quad \left. + (48m^4 + 8p^2m^2 - 2p^4)Y \right] \\
 & +\frac{a^4\pi}{23040pX^5} \left[4Y(8640m^8 + 6720p^2m^6 + 2368p^4m^4 \right. \\
 & \quad \left. + 496p^6m^2 + 51p^8) \right. \\
 & \quad + pX(-1440(-13 + 50\log(2))m^6) \\
 & \quad + pX(-5760p^2(-1 + \log(32))m^4) \\
 & \quad + pX(-2p^4(389 + 450\log(2))m^2) \\
 & \quad + pX(180(10m^2 - p^2)X^2\log(am)) \\
 & \quad \left. + pX(p^6(-277 + 450\log(2))) \right] \\
 & +O(a^6)
 \end{aligned} \tag{F.3}$$

F.2. Fermionenschleife

In diesem Abschnitt sind die Resultate der asymptotischen Entwicklung für folgendes Integral aufgeführt:

$$I'_F(a, m, p) = \text{Tr} \left[\int_{BZ} \frac{d^2k}{D^F(m, k + q(p))D^F(m, k)} \right] \tag{F.4}$$

Es stellt eine Summe mehrerer Integrale von der Form (4.42) dar. Das BPHZ-renormierte Integral ist einfach $I_F(a, m, p) \equiv I'_F(a, m, p) - I'_B(a, m, 0)$.

F.2.1. Nicht-renormiert

$$\begin{aligned}
 I'_F(a, m, p) = & -\frac{3c}{4} + \frac{2X\pi Y}{p} + 2\pi\log(m) + \frac{1}{54}\pi(9 + (27 + 20\sqrt{3})\pi - 189\log(2)) \\
 & + 2\pi\log(a) \\
 & -\frac{am}{36p} \left[144(5m^2 + p^2)\pi\frac{Y}{X} \right. \\
 & \quad \left. + p(-81c + 72\pi(3\log(a) + \log(\frac{m}{4}) + \log(m^2))) \right. \\
 & \quad \left. + p(+2\pi(30 + (27 + 4\sqrt{3})\pi - 117\log(2))) \right] \\
 & +O(a^2)
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

F.2.2. BPHZ-renormiert

$$\begin{aligned}
 I_F(a, m, p) = & +2\pi\left(\frac{X}{p}Y - 1\right) \\
 & +5am\pi - 4a(5m^2 + p^2)\frac{Y}{pX} \\
 & +O(a^2)
 \end{aligned} \tag{F.6}$$

G. MATHEMATICA-Pakete

G.1. Rekursionsbeziehungen

Das Paket `Recurrence` kann Rekursionsbeziehungen unter Verwendung des Algorithmus von LAPORTA lösen.

G.1.1. Befehle

`DefineRecurrence[F, {Gleichungen,...} ,{Indizes,...} , Optionen]:`

Mit diesem Befehl werden die Rekursionsbeziehungen definiert. Die Syntax kann man an dem weiter unten folgenden Beispiel ablesen. Es sind folgende Optionen möglich:

Symmetric: Gruppen von Indizes, die symmetrisch sind.

Priority: Gibt Rangfolge der Indizes an, die bei den Masterintegralen möglichst kleine Werte annehmen sollen. Es können mehrere Indizes zu Gruppen zusammengefasst werden. In diesem Fall wird versucht, Masterintegrale mit einer möglichst geringen *Summe* der Indexwerte dieser Gruppe zu erhalten.

Start: Indexwerte, von denen gestartet wird. Können Variablen sein.

Directory: Verzeichnis, in der die Lösungen gespeichert werden.

Masters: Explizite Angabe gewünschter Masterintegrale.

`UndefineRecurrence[F]:` Löschen des Symbols `F`.

`SolveRecurrence[F, Bereich]:` Löst die Rekursionsbeziehungen für einen durch die Liste `Bereich` bestimmten Indexbereich. Die Liste `Bereich` muss so lang sein wie die Liste `Priority` in `DefineRecurrence`. Die Länge von `Bereich` ist i.A. *nicht* gleich der Zahl der Indizes.

`LoadRecurrence[F, Datei]:` Lädt das Symbol `F`.

`SaveRecurrence[F, Datei]:` Speichert das Symbol `F` in der gewünschten Datei ab. Eine Wiederverwendung mit `LoadRecurrence` erfordert die Angabe von `Directory` in `DefineRecurrence`.

Beispiel

Dieses Beispiel reproduziert (4.11).

```
In[1]:= <<Recurrence';          (* Paket laden *)

In[2]:= DefineRecurrence[ H,      (* definieren der *)
  {n[-1]+a1[1]+a2[1]-2,          (* Rekursionsbeziehungen*)
   1+2*a1*(a1[1]-1)+2*(n+\[Delta])*n[1]*a1[1]*(a1[1]-1),
   1+2*a2*(a2[1]-1)+2*(n+\[Delta])*n[1]*a2[1]*(a2[1]-1)},
  {n,a1,a2}, Start->{i-2,1,1}, Symmetric->{a1,a2},
  Priority->{{a1,a2},n}  ];

In[3]:= SolveRecurrence[H,{2,2}];

In[4]:= H[{i,1,1}]              (* Ausgabe des Ergebnisses*)
Out[4]=
(((-4 + 4*i - i^2 + 4*\[Delta] - 2*i*\[Delta] - \[Delta]^2)*
  H[{-2 + i, 1, 1}])/(2*(-1 + i + \[Delta])^2) +
((7 - 9*i + 3*i^2 - 9*\[Delta] + 6*i*\[Delta] + 3*\[Delta]^2)*
  H[{-1 + i, 1, 1}])/(2*(-1 + i + \[Delta])^2)
```

G.1.2. Quelltext: Recurrence.m

```
(*****
 *          Recurrence.m - a tool to solve recurrence relations          *
 *****)

BeginPackage["Recurrence"];

(* define public functions *)

(* define recurrence relations *)
DefineRecurrence::usage = "DefineRecurrence[F,eq,vars,opts]
F: symbol for the following recurrence relations
eq: list of recurrence relations
vars: list of index names
opts: options, can be Symmetric, Priority, Start, Directory and Masters"

UndefineRecurrence::usage = "UndefineRecurrence[F]"

(* find solutions to recurrence relations *)
SolveRecurrence::usage = "SolveRecurrence[F,max]
max: index range to solve"

(* load and save symbol F *)
LoadRecurrence::usage = "LoadRecurrence[F,file]"
SaveRecurrence::usage = "SaveRecurrence[F,file]"

(* is true if a symbol is a recurrence relation *)
RecurrenceQ::usage = "RecurrenceQ[F]"

(* returns a list of indices occurring in an equation *)
Indizes::usage = "Indizes[F,eq]"
```

G. MATHEMATICA-Pakete

```

(* options to DefineRecurrence *)
Symmetric::usage = ""
Priority::usage = ""
Start::usage = ""
Directory::usage = ""
Masters::usage = ""

(* get list of master integrals, not yet implemented *)
getMasters::Usage = "getMasters[F]"

Begin["Private"];

(* error messages *)
General::invarg = "invalid argument: 1 2"
General::invarg1 = "invalid argument: 1"
General::invarg0 = "invalid argument."

RecurrenceQ[_] = False;

(* Indizes[x] gives a list of indices occurring in an equation x *)
SetAttributes[Indizes, Listable];
Indizes[F_, x_] := Cases[x, F[_], {0, \[Infinity]}] /. F[i_>] :> i;

(* simplify index operators *)
SetAttributes[{IndexVal, IndexAdd}, HoldFirst];
IndexAdd /: Times[IndexAdd[F_, inc1_], IndexAdd[F_, inc2_]] =
    IndexAdd[F, inc1+inc2];
IndexAdd /: Power[IndexAdd[F_, inc_], p_Integer] = IndexAdd[F, inc*p];

SetAttributes[DefineRecurrence, HoldFirst];
Options[DefineRecurrence] := {Symmetric->Null,
    Priority->Null,
    Start->Null,
    Directory->Null,
    Masters->Null};

DefineRecurrence[F_, eql_, vars_, opts___] := Module[
    {sym, prio, start, dir, master, optsOK},

    {optsOK, sym, prio, start, dir, master} = checkOptions[F, eql, vars, opts];
    If[!optsOK, Return[Null]];

    initEquations[F, eql, vars];
    initData[F, dir];
    initSymmetries[F, sym];
    initPriority[F, prio, start];
    initMasters[F, master];

    RecurrenceQ[F]^=True;
    F::usage=ToString[F]<>"[{i, j, k, ...}]";

    Protect[F];
    Return[F];
];

initEquations[F_, eql_, vars_] := Module[
    {eqs, incOne, range, minInd, maxInd, numInd},

    numInd=Length[vars];
    numIndizes[F]^=numInd;

    F/:IndexVal[F[i_], n_Integer]:=i[[n]];
    F/:IndexAdd[F[i_], inc_]:=F[i+inc];

```

```

eqs=eq1;
Do[
  incOne=Table[Which[i==j,1,True,0],{j,numInd}];
  eqs=eqs*IndexAdd[#,Array[0&,numInd]]
    /.vars[[i]][n_Integer]->IndexAdd[#,incOne*n]
    /.vars[[i]]->IndexVal[#,i];
  ,{i,numInd}];
Equations[F]^=Expand[eqs];

range=Indices[F,ApplyEqs[F,vars]]/.Array[vars[[]]->0&,numInd];
minInd=(Min/@Transpose[#])&/@range;
maxInd=(Max/@Transpose[#])&/@range;
EqRange[F]^=Max/@Transpose[maxInd-minInd];
Do[
  eqs[[j]]=eqs[[j]]
    /.IndexVal[#,i-]:>(IndexVal[#,i]-minInd[[j,i]]);
  ,{j,Length[range]};
Equations[F]^=Simplify[Expand[eqs*Thread[IndexAdd[#,-minInd]]]];
];

ApplyEqs[F_,v_]:=Evaluate[Equations[F]]&[Unevaluated[F[v]]];

findFirst[list_,element_]:=Module[{p},
  p=Position[list,element,1,1];
  Return[If[Length[p]==0,0,p[[1,1]]]];
];

initData[F_,dir_]:=Module[{} ,
  indexList[F]^={};
  dependencies[F]^={};
  reverseDepend[F]^={};
  properties[F]^={};
  loadData[F];

  Directory[F]^=dir;
  If[MatchQ[dir,Null],
    initDataRAM[F];
  ,
    initDataHD[F];
  ];

F[indexNr_Integer]:=getEquation[F,indexNr]/;isKnown[F,indexNr];
F[index_?VectorQ]:=(F[indexNumber[F,SortIndex[F,index]]]
  /.F[i_Integer]:>F[getIndex[F,i]])
  /;isKnown[F,index];

F/:IndexAdd[F[i_],inc_]:=F[indexNumber[F,SortIndex[F,i+inc]]];
];

loadData[F_]:=Module[{iList,deps,revDeps,props},

  iList=indexList[F];
  deps=dependencies[F];
  revDeps=reverseDepend[F];
  props=properties[F];
  F/:indexNumber[F,index_]:=Module[{nr},
    If[!OrderedIndexQ[F,index],Print["Fehler: ",index]];
    nr=findFirst[iList,index];
    If[nr==0,
      iList=Append[iList,index];
      deps=Append[deps,{}];
      revDeps=Append[revDeps,{}];
      props=Append[props,{False}];
      Return[Length[iList]];
    ,
      Return[nr];
    ];
];

```

```

];
];
F/: getIndex [F, i_]:=iList [[i]];
F/: probeIndexNumber [F, index_]:= findFirst [iList, index];

F/: setKnown [F, indexNr_]:= (props [[indexNr, 1]] = True);
F/: isKnown [F, indexNr_Integer]:= props [[indexNr, 1]];
F/: isKnown [F, index_?VectorQ]:= Module[{indexNr},
  If [Length [index] != numIndices [F], Return [False]];
  indexNr = probeIndexNumber [F, SortIndex [F, index]];
  Return [(indexNr != 0) && isKnown [F, indexNr]];
];

F/: setRevDep [F, indexNr_, revDep_]:= (revDeps [[indexNr]] = revDep);
F/: getRevDep [F, indexNr_]:= revDeps [[indexNr]];
F/: setDependencies [F, indexNr_, depend_]:= (deps [[indexNr]] = depend);
F/: getDependencies [F, indexNr_]:= deps [[indexNr]];

saveData [F]:= (
  indexList [F]^= iList;
  dependencies [F]^= deps;
  reverseDepend [F]^= revDeps;
  properties [F]^= props;
);
];

SaveRecurrence [F_, file_]:= Module[{},
  Unprotect [F];
  saveData [F];
  Save [file, F];
];

LoadRecurrence [F_, file_]:= Module[{},
  Get [file];
  loadData [F];
  Protect [F];
];

initDataRAM [F_]:= Module[{},
  F/: storeEquation [F, indexNr_, eq_]:=
    (equation [F, indexNr] = eq;
     setKnown [F, indexNr];
     Update [F]);
  F/: getEquation [F, indexNr_]:= equation [F, indexNr];
];

initDataHD [F_]:= Module[{maxFilesPerDir},
  maxFilesPerDir = 500;
  fileName [F, indexNr_]:= ToFileName [{Directory [F],
    StringJoin [ToString [F], ToString [
      Floor [indexNr / maxFilesPerDir] * maxFilesPerDir]}],
    StringJoin [ToString [F], ToString [indexNr], ".m"]];
  F/: storeEquation [F, indexNr_, equation_]:= Module[{dname, fname},
    fname = fileName [F, indexNr];
    dname = DirectoryName [fname];
    If [!MatchQ [FileType [dname], Directory],
      CreateDirectory [dname];
    ];
    Export [fname, equation];
    setKnown [F, indexNr];
    Update [F];
  ];
  F/: getEquation [F, indexNr_]:= Import [fileName [F, indexNr]];
];

removeDoubles [list_]:= Module[{i, j, l},

```

```

l=list ;
For [i=1,i<=Length[l],i++,
  For [j=i+1,j<=Length[l],
    If [MatchQ[l[[i]],l[[j]]],
      l=Delete[l,j];
    ,
      j++;
  ];
];
Return[l];
];

initMasters[F_,master_]:=Module[{i,masters},
  masters=removeDoubles[indexNumber[F,SortIndex[F,#]]&/@master];
F/:getMasters[F]=masters;
F/:isMaster[F,indexNr_]:=MemberQ[getMasters[F],indexNr];
];

initSymmetries[F_,sym_]:=Module[{i,j,sortF,orderF,tk,st,or},
  If [Length[sym]!=0,
    sortF={};
    orderF=True;
    j=1;
    For [i=1,i<=Length[sym],i++,
      If [sym[[i,1]]!=j,
        sortF=Append[sortF,tk[#{j,sym[[i,1]]-1}]]];
      sortF=Append[sortF,st[tk[#{sym[[i,1]],
        sym[[i,2]]}]]];
      orderF=orderF&&or[tk[#{sym[[i,1],sym[[i,2]]}]];
      j=sym[[i,2]]+1;
    ];
    If [j<=numIndizes[F],
      sortF=Append[sortF,tk[#{j,numIndizes[F]}]]];
    ];
  sort[F]^=sortF;
  order[F]^=orderF;
F/:SortIndex[F,i_]:=Flatten[Evaluate[sort[F]]&[i]
  /.tk->Take/.st->Sort];
F/:OrderedIndexQ[F,i_]:=Evaluate[order[F]]&[i]
  /.tk->Take/.or->OrderedQ];
,
  F/:SortIndex[F,i_]=i;
  OrderedIndexQ[F,_]^=True;
];

initPriority[F_,prio_,st_]:=Module[{i,j,k,loopInd,loopIndF,sum,start},
  start=SortIndex[F,st];
  loopIndF=Array[0&,numIndizes[F]];
  j=1;
  For [i=1,i<=Length[prio],i++,
    sum=0;
    For [k=1,k<=Length[prio[[i]]],k++,
      j++;
      loopIndF[[prio[[i,k]]]=loopInd[j];
      sum+=loopInd[j];
    ];
    j++;
    loopIndF[[prio[[i,Length[prio[[i]]]]]=
      loopInd[j-Length[prio[[i]]]-sum];
  ];
F/:LoopToIndex[F,multi_]=(loopIndF/.loopInd->multi)+start;
F/:LoopRange[F,i_,min_,max_]:=
  Sequence@@@LoopPriority[prio,i,min,max];
];

```

```

F/: ChooseIndex [F, l_]:=Module[{ind},
  ind>DeleteCases[l, _?(isMaster[F, #]&)];
  If[Length[ind]==0, ind=1];
  Return[ind [[ MinPriority [prio,
    (getIndex [F, #]-start)&/@ind ]]]];
];
F/: checkMax [F, max_]:=VectorQ [max, (IntegerQ[#]&&NonNegative[#])&
  &&(Length[max]==Length[prio])];
F/: checkMin [F, min_]:=VectorQ [min, (IntegerQ[#]&&NonPositive[#])&
  &&(Length[min]==Length[prio])];
];

(* determine priority to loop over indices *)
LoopPriority [prio_, li_, min_, max_]:=Module[{ret, i, j, k, sum},
  ret={};
  k=1;
  For [i=1, i<=Length[prio], i++,
    If [Length[prio[[i]]]==1,
      ret=Append[ret, {li[k], min[[i]], max[[i]]}];
    ,
      ret=Append[ret, {li[k], 0, max[[i]]}];
    ];
  sum=li[k];
  k++;
  For [j=1, j<Length[prio[[i]]], j++,
    ret=Append[ret, {li[k], 0, sum}];
    sum-=li[k];
    k++;
  ];
];
Return[ret];
];

(* determine which index in an equation has the least priority, called by
ChooseIndex *)
MinPriority [prio_, list_]:=Module[{i, j, k, l, v, lsum, nsum},
  l=list;
  For [i=1, i<=Length[prio], i++,
    lsum=Sum[l[[1, prio[[i, j]]]], {j, Length[prio[[i]]]}];
    For [k=2, k<=Length[l],
      nsum=Sum[l[[k, prio[[i, j]]]],
        {j, Length[prio[[i]]]}];
      Which [lsum>nsum,
        l>Delete[l, k];
        , lsum==nsum,
        k++;
        , lsum<nsum,
        l=Drop[l, k-1];
        lsum=nsum;
      ];
    ];
  If [Length[l]==1, Return[findFirst [list, l[[1]]]];];
];
For [i=1, i<=Length[prio], i++,
  If [Length[prio[[i]]]==1, Continue[]];
  For [j=1, j<=Length[prio[[i]]], j++,
    v=prio[[i, j]];
    For [k=2, k<=Length[l],
      Which [l[[k-1, v]]>l[[k, v]],
        l>Delete[l, k];
        , l[[k-1, v]]==l[[k, v]],
        k++;
        , l[[k-1, v]]<l[[k, v]],
        l=Drop[l, k-1];
      ];
  ];
];

```



```

];
  If[Length[l]==1,Return[findFirst[list,l[[1]]]];];
];
Return[findFirst[list,l[[1]]]];
];

SetAttributes[{checkOptions,SymbolQ},HoldFirst];
listAnd[{i_--}]:=And[i];
SymbolQ[s_]:=MatchQ[Head[Unevaluated[s]],Symbol];

checkOptions[F_,eql_,vars_,opts___]:=Module[
  {sym,prio,start,dir,master,error,nsym,nprio},
  error={False,0,0,0,0,0};
  {sym,prio,start,dir,master}=
    ({Symmetric,Priority,Start,Directory,Masters}
    /.{opts}/.Options[DefineRecurrence]);

  If[!SymbolQ[F],
    Message[DefineRecurrence::invarg,F,"is_not_a_symbol."];
    Return[error];
  ];
  If[MemberQ[Attributes[F],Protected]&&!RecurrenceQ[F],
    Message[DefineRecurrence::invarg,F,"is_protected."];
    Return[error];
  ];

  If[!VectorQ[eql],
    Message[DefineRecurrence::invarg1,
      "Equations_have_wrong_format."];
    Return[error];
  ];
  If[!VectorQ[vars,SymbolQ],
    Message[DefineRecurrence::invarg1,vars];
    Return[error];
  ];

  If[!MatchQ[dir,Null],
    If[!MatchQ[FileType[dir],Directory],
      Message[DefineRecurrence::invarg,dir,
        "does_not_exist."];
      Return[error];
    ];
    dir=ToFileName[dir,ToString[F]];
    If[!MatchQ[FileType[dir],Directory],CreateDirectory[dir]];];

  If[start==Null,start=Array[0&,Length[vars]];];
  If[(!VectorQ[start])|| (Length[start]!=Length[vars]),
    Message[DefineRecurrence::invarg,"Start_>",start];
    Return[error];
  ];
  If[master==Null,master={};];
  If[!checkMaster[master,vars],
    Message[DefineRecurrence::invarg,"Masters_>",master];
    Return[error];
  ];
  nsym=checkSym[sym,vars];
  If[nsym==Null,
    Message[DefineRecurrence::invarg,"Symmetric_>",sym];
    Return[error];
  ];
  nprio=checkPrio[prio,vars];
  If[nprio==Null,
    Message[DefineRecurrence::invarg,"Priority_>",prio];
    Return[error];
  ];
];

```

G. MATHEMATICA-Pakete

```

    Unprotect[F];
    ClearAll[F];
    Return[{True, nsym, nprio, start, dir, master}]];
];

checkMaster[master_, vars_] := Module[{i},
    If[!MatchQ[Head[master], List], Return[False]];
    For[i=1, i<=Length[master], i++,
        If[(!VectorQ[master[[i]]) ||
            (Length[master[[i]]] != Length[vars]),
            Return[False];
        ];
    ];
    Return[True];
];

checkSym[sym_, vars_] := Module[{nsym, i, last},
    If[sym==Null, Return[{}]];
    If[!MatchQ[Head[sym], List], Return[Null]];
    If[Length[sym]==0, Return[{}]];
    nsym=sym/.Array[(vars[[#]]->#)&, Length[vars]];

    If[(Length[nsym]==2)&&(VectorQ[nsym, IntegerQ]), nsym={nsym}];
    If[(Length[nsym[[1]]] != 2) || (!MatrixQ[nsym, IntegerQ]),
        Return[Null];
    ];
    nsym=Sort[Sort/@nsym];

    last=0;
    For[i=1, i<=Length[nsym], i++,
        If[nsym[[i,1]]<=last, Return[Null]];
        last=nsym[[i,2]];
    ];
    If[last>Length[vars], Return[Null]];

    Return[nsym];
];

checkPrio[prio_, vars_] := Module[{nprio, clist, i, j},
    If[prio==Null, Return[Array[{#}&, Length[vars]]]];
    If[!MatchQ[Head[prio], List], Return[Null]];
    nprio=prio/.Array[(vars[[#]]->#)&, Length[vars]];
    clist=Array[False&, Length[vars]];

    For[i=1, i<=Length[nprio], i++,
        If[IntegerQ[nprio[[i]]], nprio[[i]]={nprio[[i]]}];
        If[(!VectorQ[nprio[[i]], (IntegerQ[#]
            &&(0<#<=Length[vars]))&)] ||
            (Length[nprio[[i]]]==0),
            Return[Null];
        ];
        For[j=1, j<=Length[nprio[[i]]], j++,
            If[clist[[nprio[[i,j]]]], Return[Null]];
            clist[[nprio[[i,j]]]] = True;
        ];
    ];
    If[!listAnd[clist], Return[Null]];

    Return[nprio];
];

UndefinedRecurrence[F] := Module[{}],
    If[!RecurrenceQ[F],
        Message[UndefinedRecurrence::invarg0];
        Return[Null];
];

```

```

];
Unprotect[F];
ClearAll[F];
Return[Null];
];

Masters[F_]:=getIndex[F,#]&/@getMasters[F];

SolveRecurrence[F_,min_,max_]:=Module[
{multi,range,index},

If[!RecurrenceQ[F],
Message[SolveRecurrence::invargl,F];
Return[Null];
];
If[!checkMax[F,max],
Message[SolveRecurrence::invargl,max];
Return[Null];
];
If[!checkMin[F,min],
Message[SolveRecurrence::invargl,min];
Return[Null];
];
Unprotect[F];

range=LoopRange[F,multi,min,max];
Do[
index=LoopToIndex[F,multi];

(* respect symmetries *)
If[!OrderedIndexQ[F,index],Continue[]];

(* solve for index with least priority and add equation *)
AddEquations[F,index];
,Evaluate[range]];

Protect[F];
Return[F];
];

SolveRecurrence[F_,max_]:=SolveRecurrence[F,Array[0&,Length[max]],max];

changeDependencies[F_,indexNr_,new_]:=Module[{i,j,p,rd,del},
del=getDependencies[F,indexNr];
For[i=1,i<=Length[new],i++,
j=new[[i]];
p=findFirst[del,j];
If[p==0,
setRevDep[F,j,Append[getRevDep[F,j],indexNr]];
,
del=Delete[del,p];
];
];
For[i=1,i<=Length[del],i++,
j=del[[i]];
rd=getRevDep[F,j];
p=findFirst[rd,indexNr];
If[p!=0,setRevDep[F,j,Delete[rd,p]]];];
];
setDependencies[F,indexNr,new];
];

AddEquations[F_,index_]:=Module[{i,k,l,ind,eqs,eq,known,revdep},
eqs=ApplyEqs[F,index];
For[i=1,i<=Length[eqs],i++,
eq=eqs[[i]];

```

```

eq=Collect[eq,F/@Indizes[F,eq],Together];
ind=Indizes[F,eq];
If[Length[ind]==0,Continue[]];

(* choose index with least priority... *)
k=ChooseIndex[F,ind];
(* and solve for it *)
eq=-(eq/.F[k]->0)/Coefficient[eq,F[k]];
ind>DeleteCases[ind,k];
eq=Collect[eq,F/@ind,Together];

storeEquation[F,k,eq];
changeDependencies[F,k,ind];

(* reverse dependencies and back substitution *)
revdep=getRevDep[F,k];
For[l=1,l<=Length[revdep],l++,
  k=revdep[[l]];
  eq=F[k];
  eq=Collect[eq,F/@Indizes[F,eq],Together];
  storeEquation[F,k,eq];
  ind=Indizes[F,eq];
  changeDependencies[F,k,ind];
];
];

End[(* "Private" *)];

EndPackage[(* Recurrence *)];

```

G.2. Entwicklung von Ein-Schleifenintegralen

Das Paket `LoopExp` implementiert die asymptotische Entwicklung von Ein-Schleifenintegralen für die in dieser Arbeit verwendeten Gitterableitungen. Es ist momentan auf $d = 2$ Dimensionen und einen WILSON-Parameter $r = 1$ beschränkt. Für andere Werte von d oder r muss jedoch lediglich die Wahl der Masterintegrale angepasst werden. Vor Benutzung dieses Paketes muss das Verzeichnis `soft` angelegt werden.

G.2.1. Befehle

`LoopExp[o, a, c, b1, f1, e1, fp]`: o ist die Ordnung in der Gitterkonstanten a , bis zu der entwickelt werden soll. c ist die numerische Konstante (4.61). fp gibt das Symbol für die Feynman-Parameter an. $b1$ und $f1$ sind Listen mit einem Eintrag für jeden der Terme D^B und D^G in (4.42). Die Einträge von $b1$ und $f1$ haben die Form $\{\text{Masse}, \{\text{ImpulsX}, \text{ImpulsY}\}, \text{Exponent}\}$. Die Einträge von $e1$ sind $\{\{px, py\}, \{qx, qy\}\}$ und entsprechen einem Term $\sum_j D^E(p_j) D^E(q_j)$. Einzelne Terme $D^E(p_j)$ sind prinzipiell möglich, dazu muss im Wesentlichen die Parameterübergabe anders gestaltet werden.

Das Ergebnis in Abhängigkeit von den physikalischen Impulsen erhält man, indem man in der Entwicklung alle p durch $\frac{1}{a} \tan(\frac{ap}{2})$ ersetzt. Die FEYNMAN-Parameter sind über das Intervall $[0, 1]$ zu integrieren.

HardStart[Zahl]: Initialisiere Rekursionsbeziehungen. *Zahl* ist der Startindex für den Bosonenpropagator. Dieser muss angegeben werden, weil er negativ werden kann.

SolveHard[b, f, i]: Löse Rekursionsbeziehungen für einen bestimmten Indexbereich.

SaveHard[]: Speichere Rekursionsbeziehungen.

LoadHard[]: Lade Rekursionsbeziehungen.

Beispiel

Dieses Beispiel reproduziert (F.3).

```
(* Lade Paket *)
In[1]:= << LoopExp `;

(* Löse Rekursionsbeziehungen *)
In[2]:= HardStart[-1];
In[3]:= SolveHard[5, 2, 5];

(* Führe Entwicklung durch *)
In[4]:= e=LoopExp[4, a, c, {{m, {0, 0}, 1}, {m, {p, 0}, 1}}, {}, {}, fp];

(* Ersetze p durch physikalischen Impuls *)
In[5]:= et=Series[e/.p->Tan[a*p/2]/a, {a, 0, 4}];

(* Integriere über Feynman-Parameter *)
In[6]:= eint=Collect[Normal[et], a,
  FullSimplify[
    Integrate[Apart[#], {fp[1], 0, 1},
      GenerateConditions -> False]] &];
```

G.2.2. Quelltext: LoopExp.m

```
(* *****
 * LoopExp.m - expands one loop lattice integrals around a=0
 * ***** *)

BeginPackage["LoopExp`"];

(* define public functions *)
LoopExp::usage = "LoopExp[o, a, nc, bl, fl, fe, fp]
o: order in a,
a: lattice spacing,
nc: name for numerical constant,
bl: list of boson propagators,
fl: list of fermion propagators,
```

G. MATHEMATICA-Pakete

```

fe: list_of_extra_fermion_propagators_in_the_denominator,
fp: name_for_Feynman_parameters"

HardStart::usage = "HardStart[bs]
Specify_boson_index_bs_from_where_to_start_solving_recurrence_relations.
Must_be_called_before_SolveHard."

SolveHard::usage = "SolveHard[br, fr, nr]
solve_recurrence_relations_over_index_range{br, fr, nr}"

SaveHard::usage = "SaveHard[]: save_solutions_for_recurrence_relations"
LoadHard::usage = "LoadHard[]: load_solutions_for_recurrence_relations"

(* recurrence relations and regulator are public *)
F;
\[Delta];

Begin["Private"];
Needs["Recurrence"];

(* some small functions *)
listAnd[{i_}]:=And[i];
sq[x_]:=x.x;
PlusToList[x_]:=If[MatchQ[Head[x], Plus], List@@x, {x}];

(***)
* solve kontinuum Feynman integrals using Feynman parameters
*)

(* main function, integrates a single summand *)
fint[m_, p_, e_, v_, fp_] := Module[
  {ret, i, esum, numer, denom, param, exp, np, x, dim, cl, v2, j, dir},

  np=Length[m];
  dim=Length[p[[1]]];
  esum=Sum[e[[i]], {i, np}];

  x=Array[dir[#]&, dim];
  param=Array[fp[#]&, np];
  param[[np]]=1-Sum[fp[i], {i, np-1}];
  denom=0;
  numer=1;
  For[i=1, i<=np, i++,
    denom+=param[[i]]*(sq[x+p[[i]]]+m[[i]]^2);
    numer*=param[[i]]^(e[[i]]-1);
  ];
  cl=(Coefficient[denom, #, 1]&/@x)/2;
  denom=Expand[denom-sq[x+cl]];
  If[denom==0, Return[0]];

  ret=PlusToList[Expand[Product[(x[[i]]-cl[[i]])^v[[i]], {i, dim}]]];
  For[j=1, j<=Length[ret], j++,
    v2=Exponent[ret[[j]], x];
    exp=esum-(Sum[v2[[i]], {i, dim}]+dim)/2;
    If[!listAnd[EvenQ/@v2],
      ret[[j]]=0;
      Continue[];
    ];
    ret[[j]]=Together[ret[[j]]/Product[x[[i]]^v2[[i]], {i, dim}]]
    *FunctionExpand[Gamma[exp]
    /Product[Gamma[e[[i]], {i, np}]
    *Product[Gamma[(1+v2[[i])/2], {i, dim}]]
    *numer/denom^exp];

```

```

];

Return[Plus@@@ret];
];

(* rules to split sums of integrals *)
fint /: fint [m_, p_, e1_, v_]^(e2_):=fint [m, p, e1*e2, v*e2];
fint /: fint [{m1_}, {p1_}, {e1_}, v1_]*fint [{m2_}, {p2_}, {e2_}, v2_]:=
    fint [{m1, m2}, {p1, p2}, {e1, e2}, v1+v2];
intv /: intv [v_]^e_:=intv [v*e];
intv /: intv [v1_]*fint [m_, p_, e_, v2_]:=fint [m, p, e, v1+v2];
unit [i_, dim_]:=Module[{j}, Table[Which[i==j, 1, True, 0], {j, dim}]];

(* integrate sums of Feynman integrals using fint *)
fIntegrate [int_, prop_, x_, dim_, fp_]:= (int
    /. prop [m_, p_]>fint [{m}, {p}, {-1}, Array[0&, dim]]
    /. (x[#]>intv [unit [#], dim]&/@Range[dim])
    /. fint [opt_]>fint [opt, fp]);

(***)
* Functions to solve, save and restore recurrence relations
*)

(* Wilson parameter *)
r=1;
(* dimension *)
dim=2;
(* regulator *)
reg=\[Delta];

HardStart [bs_]:=Module[{a1, a2, b, f, masters, recEq},
    recEq={ b[-1]+a1[1]+a2[1]-2,
    f[-1]+a1[1]+a2[1]-2+(a1[1]-1)^2+(a2[1]-1)^2
    -r^2*(a1[1]+a2[1]-2)^2,
    (f[-1]+a1[1]*(a1[1]-1)+a2[1]*(a2[1]-1))*b[2]-r^2,
    1+2f*a1[1]*(a1[1]-1)*f[1]*(2*a1[1]-1-2*r^2*(a1[1]+a2[1]-2))
    +2*a1*(a1[1]-1)+2*(b+reg)*a1[1]*(a1[1]-1)*b[1],
    1+2f*a2[1]*(a2[1]-1)*f[1]*(2*a2[1]-1-2*r^2*(a1[1]+a2[1]-2))
    +2*a2*(a2[1]-1)+2*(b+reg)*a2[1]*(a2[1]-1)*b[1]};

    masters={{-1, 0, 1, 1}, {0, 0, 1, 1}, {-1, 1, 1, 1}, {-1, 1, 1, 2}};
    DefineRecurrence [F, recEq, {b, f, a1, a2}, Priority -> {{1}, {3, 4}, {2}},
        Symmetric->{{3, 4}}, Masters->masters,
        Start->{bs, 0, 0, 0}, Directory->"."];
];

SolveHard [b_, f_, a_]:=SolveRecurrence [F, {b, a, f}];
SaveHard []:=SaveRecurrence [F, ". /F/F.m"];
LoadHard []:=LoadRecurrence [F, ". /F/F.m"];

(***)
* functions to save soft part on HD
*)
sname="soft";
mySave [f_, e_]:=Put [e, Evaluate [f]];
myLoad [f_]:=Get [Evaluate [f]];
mySuffix=".m";
fileName [s_]:=ToFileName [{"", sname}, StringJoin [s, mySuffix]];
saveFile [s_, ex_]:=mySave [fileName [s], ex];
loadFile [s_]:=myLoad [fileName [s]];
maxFilesPerDir=500;
fileName [s_, n_]:=ToFileName [{"", sname}, StringJoin [s,
    ToString [Floor [n/maxFilesPerDir]*maxFilesPerDir]],
    StringJoin [s, ToString [n], mySuffix]];

```

G. MATHEMATICA-Pakete

```

saveFile [s_, n_, ex_] := Module[{dname, fname},
  fname = fileName[s, n];
  dname = DirectoryName[fname];
  If[!MatchQ[FileType[dname], Directory],
    CreateDirectory[dname];
  ];
  mySave[fname, ex];
];
loadFile [s_, n_] := myLoad[fileName[s, n]];

(**
 * own implementation of Series[], saves resources
 *)
softSeries [exp_, reg_, a_, amax_] := Module[{l, i},
  l = PlusToList[Expand[exp]];
  For [i = 1, i <= Length[l], i++,
    l[[i]] = Cancel[reg * l[[i]] /. reg -> 0] / reg
      + Cancel[D[reg * l[[i]], reg] /. reg -> 0];
  ];
  l = CoefficientList[Plus@@l, a];
  l = Together[Take[l, Min[amax + 1, Length[l]]]];
  For [i = Length[l], i >= 1, i--,
    If[!MatchQ[l[[i]], 0], Break[]];
    l = Delete[l, i];
  ];
  Return[l];
];

(**
 * main function, expands soft and hard part
 *)
LoopExp [o_, a_, nc_, bl_, fl_, fe_, fp_] := Module[
  {coeff, nb, nf, x, p, ma, soft, hard, h, i, j, bprop, pos, coList, dexp,
  p1, p2, minpot, H, shift, numfp, div, masters, nil, DF, DB, sum,
  k, zeros, lsum, intc, hardtime, softtime, simptime},

  (* number of boson propagators *)
  nb = Sum[bl[[j, 3]], {j, Length[bl]}];
  (* number of fermion propagators *)
  nf = Sum[fl[[j, 3]], {j, Length[fl]}];
  (* number of 'extra' fermion propagators in denominator *)
  ne = Length[fe];
  (* leading order of hard part is a^shift *)
  shift = 2*(nb + nf - ne) - dim;
  (* total leading order is a^minpot *)
  minpot = Min[0, shift];

  (* prepare some variables *)
  x = Array[Unique[] &, dim];
  coeff = Array[0 &, o - minpot + 1];
  saveFile["coeff", coeff];
  nil = Array[0 &, dim];
  pi = 1;
  setP[p_] := a * p;

  If[o < minpot, Return[SeriesData[a, 0, {}, minpot, minpot, 1]];];

  (* determine propagator for the regulator *)
  pos = Select[Join[bl, fl], #[[3]] > 0 &, 1];
  If[Length[pos] == 0,
    p = nil;
    ma = 0;
  ,
    p = setP[pos[[1, 2]]];
  ];
];

```


G.2. Entwicklung von Ein-Schleifenintegralen

```

    ma=a*pos [[1,1]]/2;
];

(**
 * prepare soft and hard
 *)
(* introduce regulator and measure *)
soft=Product[1/(1+h*x[[j]]^2),{j,dim}]*
  (h*Sum[(p[[j]]+x[[j]])^2/((1+h*x[[j]]^2)(1+h*p[[j]]^2))
    -(p[[j]]+x[[j]))^2,{j,dim}]
  +bprop[ma,p])^(-reg);
hard=H[Join[{0,0},Array[1&,dim]]]*DB[ma,p,h]^(-reg);

(* boson propagators *)
For[i=1,i<=Length[b1],i++,
  p=setP[b1[[i,2]]];
  ma=a*b1[[i,1]]/2;
  If[b1[[i,3]]>0,
    soft*=(h*Sum[(p[[j]]+x[[j]])^2
      /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p[[j]]^2))
      -(p[[j]]+x[[j]))^2,{j,dim}]
    +bprop[ma,p])^(-b1[[i,3]]);
    ,
    soft*=(Sum[(p[[j]]+x[[j]])^2
      /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p[[j]]^2))
      ,{j,dim}]+ma^2)^(-b1[[i,3]]);
  ];
  hard*=DB[ma,p,h]^(-b1[[i,3]]);
];

(* fermion propagators *)
For[i=1,i<=Length[f1],i++,
  p=setP[f1[[i,2]]];
  ma=a*f1[[i,1]]/2;
  If[f1[[i,3]]>0,
    soft*=(h*Sum[((x[[j]]+p[[j]])
      -h*x[[j]]^2*p[[j]]-x[[j]]*h*p[[j]]^2)
      /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p[[j]]^2)))^2
      -(p[[j]]+x[[j]))^2,{j,dim}]
      +(ma+r*h*Sum[(p[[j]]+x[[j]])^2
        /((1+h*x[[j]]^2)(1+h*p[[j]]^2)),{j,dim}])^2
      +bprop[ma,p]-ma^2)^(-f1[[i,3]]);
    ,
    soft*=(h*Sum[((x[[j]]+p[[j]])
      -h*x[[j]]^2*p[[j]]-x[[j]]*h*p[[j]]^2)
      /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p[[j]]^2)))^2,
      {j,dim}]
      +(ma+r*h*Sum[(p[[j]]+x[[j]])^2
        /((1+h*x[[j]]^2)(1+h*p[[j]]^2)),{j,dim}])^2
      )^(-f1[[i,3]]);
  ];
  hard*=DF[ma,p,h]^(-f1[[i,3]]);
];

(* 'extra' fermion propagators *)
For[i=1,i<=ne,i++,
  p1=setP[fe[[i,1]]];
  p2=setP[fe[[i,2]]];
  soft*=Sum[(x[[j]]+p1[[j]]
    -h*x[[j]]^2*p1[[j]]-x[[j]]*h*p1[[j]]^2)
    /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p1[[j]]^2))
    *(x[[j]]+p2[[j]]
    -h*x[[j]]^2*p2[[j]]-x[[j]]*h*p2[[j]]^2)
    /((1+h*x[[j]]^2)*(1+h*p2[[j]]^2)),
    {j,dim}];
  hard*=Sum[(x[[j]]+h*p1[[j]]

```

```

-x[[j]]^2*h*p1[[j]]-x[[j]]*h^2*p1[[j]]^2)
/((1+x[[j]]^2)*(1+h^2*p1[[j]]^2))
*(x[[j]]+h*p2[[j]]
-x[[j]]^2*h*p2[[j]]-x[[j]]*h^2*p2[[j]]^2)
/((1+x[[j]]^2)*(1+h^2*p2[[j]]^2)),
{j, dim}];
];

(***)
* expand soft in h until no new terms of order o in a emerge
*)
softtime=Timing[
Print["Expanding soft part..."];
intc=1;
For[i=1,True,i++,
saveFile["soft",soft];
sum=soft/.h->0;
soft=.;
sum=PlusToList[Expand[sum]];
lsum=Length[sum];
For[j=1,j<=lsum,j++,
saveFile["soft",j,sum[[j]]];
];
sum=.;
zeros=0;
For[j=1,j<=lsum,j++,
coList=loadFile["soft",j];
coList=fIntegrate[coList,bprop,x,dim,fp];
(*saveFile["int",intc,coList];
intc++;*)
coList=softSeries[coList*a^(shift-minpot),
reg,a,o-minpot];

If[Length[coList]==0,
zeros++;
Continue[]];
];
coeff=loadFile["coeff"];
For[k=1,k<=Length[coList],k++,
coeff[[k]]=Collect[coList[[k]]+coeff[[k]],
reg,Together];
];
saveFile["coeff",coeff];
Clear[coeff];
];
(*Print[intc-1];*)
coList=.;
If[zeros==lsum,Break[]];
soft=loadFile["soft"];
soft=D[soft,h]/i;
];
soft=.;
coList=.;

(* Laurent expansion in the regulator *)
coeff=loadFile["coeff"];
For[i=Max[0,shift]+1,i<=Length[coeff],i++,
dexp=Exponent[coeff[[i]],reg,Min];
If[dexp>=0,Continue[]];
div=Together[Coefficient[coeff[[i]],reg,dexp]];
numfp=Max[Cases[div,fp[_],\{Infinity\}]]
/.fp->Identity];
If[numfp<=0,Continue[]];
coeff[[i]]-=div*reg^dexp;
For[j=1,j<=numfp,j++,
div=Integrate[div,{fp[j],0,1}];
];

```

G.2. Entwicklung von Ein-Schleifenintegralen

```

        coeff[[i]]=Collect[coeff[[i]]+div*reg^dexp,reg,Together];
];
][[1]];
Print["      ",softtime];

(***)
* expand hard
*)
hardtime=Timing[
Print["Expandinghardpart..."];
If[o<shift,Goto[exit]];];

Derivative[0,nil,1][DB][m_,p_,h_]:=
D[Sum[(h*p[[j]]+x[[j]])^2/((1+x[[j]]^2)(1+h^2*p[[j]]^2)),
{j,dim}]+h^2*m^2,h];
Derivative[0,nil,1][DF][m_,p_,h_]:=
D[Sum[(x[[j]]+h*p[[j]]
-x[[j]]^2*h*p[[j]]-x[[j]]*h^2*p[[j]]^2)
/((1+x[[j]]^2)*(1+h^2*p[[j]]^2))^2,{j,dim}
+(h*m+DB[0,p,h])^2,h];
DB[_,-,0]=H[Join[{-1,0},nil]];
DF[_,-,0]=H[Join[{0,-1},nil]];
H/:H[i_]^e_:=H[i*e];
H/:H[i1_]*H[i2_]:=H[i1+i2];

For[i=0,i<=o-shift,i++,
If[i!=0,hard=D[hard,h]/i];
coList=Expand[hard/.h->0];
coList=coList/(x[[#]]^e_>(H[Join[{0,0},-unit[#,dim]]-1)
^Quotient[e,2]*x[[#]]^Mod[e,2]&
/@Range[dim])
/.(#->0& /@x);
coList=Expand[a^(shift-minpot)*coList];
coList=Series[coList,{a,0,o-minpot}];
coList=CoefficientList[coList,a]
/.H[{b_,f_}]>H[{b-reg,f}];
For[j=1,j<=Length[coList],j++,
coeff[[j]]+=coList[[j]];
];
hard=.;
coList=.;

(* identify integrals that must be reduced to master integrals *)
masters=Masters[F];
hInd=Transpose[Join[Flatten[Indizes[H,coeff],1],masters]];
Print["      IndexRange:",
{Min[hInd[[1]]],Min[hInd[[2]]],Min[hInd[[3]]+hInd[[4]]]},
"to",
{Max[hInd[[1]]],Max[hInd[[2]]],Max[hInd[[3]]+hInd[[4]]]};
coeff=coeff/.H->F; (* use recurrence relations *)

(* expand master integrals in regulator *)
dexp=Min[Exponent[coeff,reg,Min]];
coeff=coeff/.Array[
(F[masters[[#]]]->Sum[M[#,j]*reg^j,{j,0,-dexp}])&,
Length[masters]];

(* substitute known master integrals und relations between them *)
M[1,0]=\[Pi]^2;
M[2,0]=\[Pi]^2;
M[1,1]=2*\[Pi]-\[Pi]^2+M[2,1];
M[2,2]=\[Pi]^2+6*\[Pi]*(Log[2]-1)+M[1,2]+M[1,1];
M[3,0]=4*\[Pi]^2/(3*Sqrt[3]);
M[4,0]=(-18+(-27+32*Sqrt[3])*\[Pi])*\[Pi]/54;

```

G. MATHEMATICA-Pakete

```

M[2,1]=nc+8/3*M[3,1]-2*M[4,1];

(* try to eliminate regulator (the regulator MUST cancel everywhere) *)
coeff=Normal[Series[coeff,{reg,0,0}]];
Label[exit];
][[1]];
Print["_____",hardtime];

(***)
* finally: simplify
*)
simptime=Timing[
Print["Simplify..."];
(* TODO: p -> Tan[p*a/2]/a and expand *)
coeff=SeriesData[a,0,
Simplify[coeff/2^shift,Assumptions->{a>0}],
minpot,o+1,1];
][[1]];
Print["_____",simptime];

Return[coeff];
];

End[(* "Private" *)];
EndPackage[(* LatRec' *)];

```

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem Herrn Prof. Dr. Andreas Wipf für die gute Betreuung dieser Diplomarbeit, sowie der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für wertvolle Diskussionen und eine angenehme Arbeitsatmosphäre. Besonders mit Herrn Georg Bergner konnte ich einige diese Arbeit betreffende Fragen klären.

Auch bei meiner Familie möchte ich mich bedanken, da sie mich das gesamte Studium über unterstützt hat. Wenn ich während der Diplomarbeitszeit einen freien Kopf benötigt habe, dann stellten die Abende mit meinen Freunden einen guten Ausgleich zur Arbeit dar.

In der letzten Phase dieser Diplomarbeit wurden mir insbesondere von meiner Freundin Julia einige alltägliche Aufgaben abgenommen, so dass ich mich voll auf abschließende Korrekturen konzentrieren konnte. Dafür möchte ich mich nochmals herzlich bedanken.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantenelektrodynamik*. No. 4 in Lehrbuch der theoretischen Physik. Verlag Harri Deutsch, 7. (1991) ed., 1952.
- [3] E. Noether, “Invariante Variationsprobleme,” *Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse* (1918) 235–257.
- [4] H. J. Rothe, “Lattice gauge theories: An introduction,” *World Sci. Lect. Notes Phys.* **74** (2005) 1–605.
- [5] S. R. Coleman and J. Mandula, “All possible symmetries of the S matrix,” *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251–1256.
- [6] L. O’Raifeartaigh, “Mass differences and Lie algebras of finite order,” *Phys. Rev. Lett.* **14** (Apr, 1965) 575–577.
- [7] M. F. Sohnius, “Introducing supersymmetry,” *Phys. Rept.* **128** (1985) 39–204.
- [8] L. Frappat, P. Sorba, and A. Sciarrino, “Dictionary on Lie superalgebras,” [hep-th/9607161](#).
- [9] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, “All possible generators of supersymmetries of the S matrix,” *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [10] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Vol. 3: Supersymmetry*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (2000) 419 p.
- [11] J. A. Strathdee, “Extended poincare supersymmetry,” *Int. J. Mod. Phys.* **A2** (1987) 273.
- [12] Y. Tani, “Introduction to supergravities in diverse dimensions,” [hep-th/9802138](#).
- [13] A. Van Proeyen, “Tools for supersymmetry,” [hep-th/9910030](#).
- [14] B. de Wit and J. Louis, “Supersymmetry and dualities in various dimensions,” [hep-th/9801132](#).
- [15] B. de Wit, “Supergravity,” [hep-th/0212245](#).

- [16] V. G. Kac, “Lie superalgebras,” *Adv. Math.* **26** (1977) 8–96.
- [17] V. G. Kac, “A sketch of Lie superalgebra theory,” *Commun. Math. Phys.* **53** (1977) 31–64.
- [18] K. Osterwalder and R. Schrader, “Axioms for euclidean Green’s functions,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 83–112.
- [19] K. Osterwalder and R. Schrader, “Axioms for euclidean Green’s functions. 2,” *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 281.
- [20] S. Capitani, “Lattice perturbation theory,” *Phys. Rept.* **382** (2003) 113–302, [hep-lat/0211036](#).
- [21] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).
- [22] T. Reisz, “A power counting theorem for Feynman integrals on the lattice,” *Commun. Math. Phys.* **116** (1988) 81.
- [23] T. Reisz, “A convergence theorem for lattice Feynman integrals with massless propagators,” *Commun. Math. Phys.* **116** (1988) 573.
- [24] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “Absence of neutrinos on a lattice. 1. proof by homotopy theory,” *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 20.
- [25] M. Luscher, “Chiral gauge theories revisited,” [hep-th/0102028](#).
- [26] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, “A remnant of chiral symmetry on the lattice,” *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2649.
- [27] M. F. L. Golterman and D. N. Petcher, “A local interactive lattice model with supersymmetry,” *Nucl. Phys.* **B319** (1989) 307–341.
- [28] V. A. Smirnov, *Evaluating Feynman Integrals*. Berlin, Germany: Springer (2004) 244 p.
- [29] S. Laporta, “High-precision calculation of multi-loop feynman integrals by difference equations,” *Int. J. Mod. Phys.* **A15** (2000) 5087–5159, [hep-ph/0102033](#).
- [30] S. Weinzierl, “Computer algebra in particle physics,” [hep-ph/0209234](#).
- [31] O. V. Tarasov, “Computation of Gröbner bases for two-loop propagator type integrals,” *Nucl. Instrum. Meth.* **A534** (2004) 293–298, [hep-ph/0403253](#).
- [32] V. P. Gerdt, “Gröbner bases in perturbative calculations,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **135** (2004) 232–237, [hep-ph/0501053](#).

- [33] V. P. Gerdt, “On computation of Gröbner bases for linear difference systems,” [math-ph/0509050](#).
- [34] V. P. Gerdt and D. Robertz, “A maple package for computing Gröbner bases for linear recurrence relations,” *Nucl. Instrum. Meth.* **A559** (2006) 215–219, [cs.sc/0509070](#).
- [35] A. V. Smirnov and V. A. Smirnov, “Applying Gröbner bases to solve reduction problems for feynman integrals,” *JHEP* **01** (2006) 001, [hep-lat/0509187](#).
- [36] V. A. Smirnov, “Some recent results on evaluating Feynman integrals,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **157** (2006) 131–135, [hep-ph/0601268](#).
- [37] A. V. Smirnov, “An algorithm to construct Gröbner bases for solving integration by parts relations,” *JHEP* **04** (2006) 026, [hep-ph/0602078](#).
- [38] A. V. Smirnov and V. A. Smirnov, “S-bases as a tool to solve reduction problems for Feynman integrals,” [hep-ph/0606247](#).
- [39] C. Anastasiou and A. Lazopoulos, “Automatic integral reduction for higher order perturbative calculations,” *JHEP* **07** (2004) 046, [hep-ph/0404258](#).
- [40] T. Becher and K. Melnikov, “The asymptotic expansion of lattice loop integrals around the continuum limit,” *Phys. Rev.* **D66** (2002) 074508, [hep-ph/0207201](#).
- [41] V. A. Smirnov, *Applied Asymptotic Expansions in Momenta and Masses*. Berlin, Germany: Springer (2002) 262 p.
- [42] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, “Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model,” *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253–290.
- [43] T. Kugo and P. K. Townsend, “Supersymmetry and the division algebras,” *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Jena, den 30. November 2006

Jan Steinhoff

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 30. November 2006

Jan Steinhoff