

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Die Dirac-Gleichung in der Nähe schwarzer Löcher

Bachelorarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Bachelor of Science im Studiengang Physik

1. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf
2. Gutachter: Prof. Dr. Reinhard Meinel

Vorgelegt von: Andreas Schoepe
Matrikelnr.: 120122
Geboren am: 23.03.1990, Ilmenau
Vorgelegt am: 20. September 2013

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Einleitung | 2 |
| 1 | Die freie Dirac-Gleichung im flachen Raum | 3 |
| 1.1 | Lorentz-Transformationen | 4 |
| 1.2 | Lorentzkovarianz der Dirac-Gleichung | 5 |
| 1.3 | Räumliche Drehungen | 7 |
| 2 | Die freie Dirac-Gleichung im gekrümmten Raum | 8 |
| 2.1 | Übergang zum gekrümmten Raum | 8 |
| 2.2 | Beschreibung der Raumzeit durch Tetraden | 8 |
| 2.3 | Spin-Zusammenhang und kovariante Ableitung | 10 |
| 3 | Die Dirac-Gleichung in der Nähe eines schwarzen Lochs vom Schwarzschildtyp | 12 |
| 3.1 | Metrik und Wahl der Tetraden | 12 |
| 3.2 | Spin-Zusammenhang | 13 |
| 3.3 | Dirac-Operator und Hamiltonsche Form der Dirac-Gleichung | 14 |
| 3.4 | Erhaltungsgrößen | 14 |
| 3.5 | Herleitung der radialen Dirac-Gleichung | 17 |
| 3.5.1 | Herleitung der Eigenfunktionen zur Separation | 17 |
| 3.5.2 | Die radiale Dirac-Gleichung | 20 |
| 3.6 | Hermitizität des Hamilton-Operators | 21 |
| 3.7 | Lösung der Radialgleichung | 23 |
| 3.7.1 | Eigenschaften von V_{\pm} | 25 |
| 3.7.2 | Approximation der Lösung mittels WKB-Näherung | 27 |
| 4 | Zusammenfassung | 33 |

0 Einleitung

Die Entwicklung der Quantenmechanik revolutionierte die damalige Physik, indem sie im Gegensatz zur klassischen Physik erlaubte, Materie im mikroskopischen bis subatomaren Bereich zu beschreiben. Mit der Weiterentwicklung zur Quantenfeldtheorie (QFT), in der Teilchen und Felder einheitlich beschrieben werden, konnten so drei der vier uns bekannten Grundkräfte, die starke Wechselwirkung (mit Hilfe der Quantenchromodynamik) sowie die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung (mit Hilfe der Elektroschwachen Wechselwirkung) mit sehr guter experimenteller Übereinstimmung beschrieben werden. Für die vierte Grundkraft, die Gravitation, konnte bislang keine Übertragung in eine Feldtheorie gelingen. Diese wird mit Hilfe von Einsteins Theorie zur Gravitation - die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) - durch die Geometrisierung der Raumzeit beschrieben und liefert ebenfalls sehr gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen. Als erste Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen lieferte Karl Schwarzschild die nach ihm benannte Schwarzschild-Lösung. Sie beschreibt das Gravitationsfeld einer nicht geladenen, nicht rotierenden kugelsymmetrisch verteilten Masse M . Ist die Ausdehnung des zur Masse gehörenden Objekts kleiner, als dessen Schwarzschildradius $r_s = 2GM/c^2$ (G -Gravitationskonstante, c -Lichtgeschwindigkeit), wird von einem schwarzen Loch gesprochen. Neben der Schwarzschild-Lösung konnten weitere Lösungen der Feldgleichungen gefunden werden, welche auch als schwarze Löcher interpretiert werden können. Diese unterscheiden sich lediglich durch die Eigenschaften Drehimpuls und Ladung. Die Hyperfläche mit $r = r_s$ wird Ereignishorizont genannt. Da die Fluchtgeschwindigkeit an diesem Ort der Lichtgeschwindigkeit c entspricht, kann selbst Licht nach Eintritt nicht mehr entweichen. Schwarze Löcher sind also unsichtbar. Jedoch werden große Mengen an Energie in Form von Strahlung im Sichtbaren bis Röntgenbereich emittiert, da in das Loch herabstürzende Materie stark beschleunigt und aufgrund von Reibungskräften stark erhitzt [1]. Objekte mit solch großer Energieemission wurden in Zentren großer Galaxien gefunden, wobei die Strahlungsintensität nur durch herabstürzende Materie sinnvoll erklärbar ist. Auch im Zentrum der Milchstraße wurde ein Objekt (Sagittarius A*) gefunden, dessen Masse etwa 4 Millionen Sonnenmassen beträgt und nur durch ein schwarzes Loch erklärbar ist.

Aufgrund der klassischen Beschreibung nehmen die in der ART betrachteten Größen eindeutige Werte an, während in der QFT Zustände von Systemen mit Observablen (Operatoren) gemessen werden. Sofern der Zustand kein Eigenzustand der entsprechenden Observable ist, sind lediglich Wahrscheinlichkeiten der Messergebnisse vorhersagbar. Die Quantisierung der Gravitation beinhaltet ebenso, die Schwerkraft in diskrete Energieportionen zu quanteln. Die Verbindung beider Theorien birgt also fundamentale Probleme. Es liegt Nahe, dass eine verallgemeinerte Theorie existieren muss. Ansätze dazu sind die Stringtheorie und die Schleifenquantengravitation. Eine Theorie zur Quantengravitation wird dann erforderlich, wenn der Gültigkeitsbereich für Gravitation und Quantentheorie erreicht wird, die sogenannte Planck-Skala. Die Planck-Länge beträgt $1,6 \cdot 10^{-35} m$ [2] und wird erreicht, wenn Schwarzschildradius r_s und Comptonwellenlänge $\lambda = h/Mc$ (h -Plancksches Wirkungsquant) eines Teilchens in der gleichen Größenordnung liegen. Solche extremen Konditionen werden vor allem in der in der Nähe schwarzer Löcher erreicht. Eine erste Verallgemeinerung besteht nun darin, die Krümmung des Raums als klassisches Hintergrundfeld zu betrachten und die QFT auf dieses zu erweitern. Eine Rückkopplung auf das Gravitationsfeld findet nicht statt. Diese Betrachtung ist insofern sinnvoll, da der Gültigkeitsbereich des aktuellen Standard-Modells im Bereich $\geq 10^{-19} m$ liegt [3]. Deshalb betrachten wir Schwarzschildradien, die wesentlich größer als die Planck-Länge sind.

Ziel dieser Arbeit ist es, die freie Dirac-Gleichung für ein massives Teilchen im Gravitationsfeld eines schwarzen Lochs aufzustellen und anschließend für die äußere Schwarzschildlösung ($r_s < r < \infty$) zu diskutieren. Dazu wird zunächst die Dirac-Gleichung, welche mit der speziellen Relativitätstheorie konform ist und Spin-1/2 Teilchen Quantenmechanisch beschreibt, im Minkowski-Raum untersucht, wobei sich hauptsächlich der Lorentz-Invarianz gewidmet wird. Anschließend wird die Dirac-Gleichung auf den gekrümmten Raum verallgemeinert. Es wird ein Formalismus eingeführt, in dem die Spinoren an jedem Punkt der Raumzeit in den lokalen Tangentialraum überführt werden. Wegen der lokalen Lorentz-Invarianz wird deshalb eine neue kovariante Ableitung hergeleitet. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird als konkretes Beispiel ein schwarzes Loch von Schwarzschildtyp gewählt und nach Erhaltungsgrößen gesucht. Es werden Eigenfunktionen der kommutierenden Operatoren hergeleitet, sodass die Dirac-Gleichung zu einem System von gekoppelten Differentialgleichungen für die radiale Koordinate wird. Anschließend erfolgt die Lösung für die radialen Funktionen mit der WKB-Näherung.

1 Die freie Dirac-Gleichung im flachen Raum

Zunächst werden wir die freie Dirac-Gleichung im flachen Raum repetieren.

Notation: In dieser Arbeit wird für partielle Ableitungen abkürzend $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ geschrieben. Es wird immer von der Einsteinscheinen Summenkonvention Gebrauch gemacht. In diesem Kapitel laufen lateinische Buchstaben aus der Mitte des Alphabets (i, j, k, \dots) von 1...3, griechische Buchstaben laufen von 0...3.

Dirac versuchte eine Gleichung zu finden, welche von 1. Ordnung in der Zeitableitung ist und die Form der Schrödinger-Gleichung besitzt. Es soll

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}_{Dirac}\psi \quad (1)$$

gelten, wobei ψ die Wellenfunktion bezeichnet. Um die Kovarianz der Gleichung zu sichern, müssen demzufolge auch die räumlichen Ableitungen von erster Ordnung sein. Dies führt zu dem Ansatz [4]

$$\hat{H}_{Dirac} = \frac{\hbar c}{i}\alpha^j\partial_j + \beta mc^2. \quad (2)$$

Hier bezeichnet m die Ruhemasse des Teilchens. Mit der Bedingung, dass ψ auch der Klein-Gordon-Gleichung genügt, und mit der Forderung der Hermitizität von \hat{H}_{Dirac} folgen die Eigenschaften

$$\{\alpha^j, \alpha^k\} := \alpha^j\alpha^k + \alpha^k\alpha^j = 2\delta^{jk} \quad (3)$$

$$\{\alpha^j, \beta\} = 0 \quad (4)$$

$$(\alpha^j)^2 = \beta^2 = 1 \quad (5)$$

$$\alpha^i = (\alpha^i)^\dagger, \quad \beta = \beta^\dagger, \quad (6)$$

wobei in (3) der Antikommutator definiert wurde.

Aufgrund dieser Eigenschaften folgerte Dirac, dass es sich um Matrizen gerader Dimension handeln muss. Die kleinste Dimension der Matrizen, welche die durch (3) und (4) erzeugte Algebra erfüllen, ist 4×4 .

Von nun an benutzen wir natürliche Einheiten, sodass $\hbar = 1$, $c = 1$ und $G = 1$ gelten.

Wir setzen den Hamilton-Operator (2) in Gleichung (1) ein und multiplizieren von links mit β

$$(i\beta\partial_t + i\alpha^j\partial_j - m)\psi = 0. \quad (7)$$

Mit den Definitionen

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^j = \beta\alpha^j$$

erhalten wir schließlich die Dirac-Gleichung in kovarianter Form

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (8)$$

Die γ^μ werden Dirac-Matrizen oder auch im Folgenden Gamma-Matrizen genannt. Sie erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (9)$$

Wir bemerken, dass aufgrund der obigen Eigenschaften von β und α^j , die Gamma-Matrizen die Eigenschaften

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^j)^2 = -\mathbb{1} \quad (10)$$

$$(\gamma^0)^{-1} = (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (11)$$

$$(\gamma^j)^{-1} = (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j \quad (12)$$

besitzen. Sie sind also unitär und (anti-)hermitisch.

Aus Gleichung (9) folgt die Gleichheit der Gamma-Matrizen bis auf eine unitäre Transformation $U \in U(4)$

$$\gamma'^\mu = U^\dagger\gamma^\mu U. \quad (13)$$

Wir werden später die Dirac-Matrizen in Dirac-Darstellung benutzen. Dazu führen wir die drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein und ergänzen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \sigma_0, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \sigma_0.$$

Dann gilt für die Matrizen in Dirac-Darstellung:

$$\beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

1.1 Lorentz-Transformationen

Durch Experimente von Michelson und Morley (1887) stellte sich heraus, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Inertialsystemen gleich ist. Darauf begründete Albert Einstein (1905) die spezielle Relativitätstheorie. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet: Verschwindet der Abstand zweier Ereignisse in einem Inertialsystemen I , so verschwindet er auch in allen anderen Inertialsystemen. Durch Übergang zu infinitesimalen Abständen ergibt sich daraus das Linienelement des Minkowskiraums

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (16)$$

Wir betrachten nun spezielle affine Transformationen Λ , die das Linienelement konstant lassen sollen:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^\mu} \frac{dx^\beta}{dx^\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (17)$$

$$\implies \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx^\mu} \frac{dx^\beta}{dx^\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (18)$$

Die Menge \mathcal{L} , welche Gleichung (18) genügt, bildet die Lorentz-Gruppe. Die Elemente von \mathcal{L} werden Lorentz-Transformationen genannt.

Aufgrund von Gleichung (18) gilt

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad \text{und} \quad \Lambda_\alpha^\beta = (\Lambda^{-1})^\beta_\alpha.$$

Wir betrachten nun Lorentz-Transformationen Λ mit

$$\Lambda^0_0 > 0, \quad \det \Lambda = 1. \quad (19)$$

Diese Bedingungen sichern, dass zukunftsgerichtete, zeitartige Vektoren zukunftsgerichtet und zeitartig bleiben, sowie rechtshändige Koordinatensysteme nicht auf linkshändige abgebildet werden [5]. Die Teilmenge (sogar Untergruppe) von \mathcal{L} , welche (19) erfüllt, wird eigentliche-orthochrone Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow genannt. Eine wichtige Eigenschaft von \mathcal{L}_+^\uparrow ist, dass die Elemente aus Folgen von infinitesimalen Transformationen aufgebaut werden können (daher auch als kontinuierlich bezeichnet) [6].

Wenn im Folgenden von Lorentz-Transformationen gesprochen wird, werden damit die Elemente der eigentlichen-orthochronen Lorentz-Gruppe gemeint.

1.2 Lorentzkovarianz der Dirac-Gleichung

Wir wollen nun prüfen, ob die Dirac-Gleichung Lorentzkovariant ist. Als Grundlage wurden [6] und [7] benutzt. Die Forderung nach Kovarianz bedeutet, dass bei gegebenem $\psi(x)$ im Inertialsystem I, welches Gleichung (8) löst, eine Vorschrift existiert, durch die sich $\psi'(x')$ im Inertialsystem I' berechnen lässt, wobei beide Wellenfunktionen den selben physikalischen Zustand beschreiben.

1. Zur Wahrung des Relativitätsprinzips muss also gelten

$$(i\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0. \quad (20)$$

2. Die gesuchte Transformation ist linear. Die Linearität ergibt sich aus der Linearität der Dirac-Gleichung und der Lorentz-Transformationen.

Sei $\Lambda = \Lambda^{\mu}_{\nu}$ die Lorentz-Transformationsmatrix, $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ und $S = S(\Lambda)$ die lineare Transformation zwischen $\psi'(x')$ und $\psi(x)$ mit

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x'). \quad (21)$$

Aufgrund der Gleichheit der Dirac-Matrizen bis auf unitäre Transformationen kann im Folgenden immer mit γ^{μ} gerechnet werden.

Es soll sich nun der Transformationsvorschrift zwischen $\psi'(x') \longleftrightarrow \psi(x)$ zugewendet werden.

Aus Bedingung 2. folgt für die Dirac-Gleichung in I'

$$(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)S(\Lambda)\psi(x) = 0. \quad (22)$$

Wir multiplizieren von links mit $S^{-1}(\Lambda)$ und erhalten so

$$(iS^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} - m)\psi(x) = 0. \quad (23)$$

Zum Erhalt der Dirac-Gleichung in I resultiert somit die Bedingung

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu} \quad (24)$$

$$\iff S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}. \quad (25)$$

Falls für jedes Λ ein $S(\Lambda)$ mit Gleichung (25) bestimmt werden kann, ist die Kovarianz der Dirac-Gleichung sichergestellt.

Bestimmung von $S(\Lambda)$

Wir betrachten dazu eine infinitesimale Lorentz-Transformation $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}_{\nu}$. Mit der Bedingung

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

folgt unter Vernachlässigung quadratischer Terme

$$\begin{aligned} & (\delta^{\mu}_{\alpha} + \Delta\omega^{\mu}_{\alpha})\eta_{\mu\nu}(\delta^{\nu}_{\beta} + \Delta\omega^{\nu}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \\ \iff & \eta_{\alpha\beta} + \Delta\omega^{\mu}_{\alpha}\eta_{\mu\beta} + \eta_{\alpha\nu}\Delta\omega^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \\ \iff & \Delta\omega_{\beta\alpha} = -\Delta\omega_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Da wegen Λ auch die zugehörige Spinortransformation $S(\Lambda)$ nur infinitesimal von δ^{ν}_{α} abweicht, machen wir für S den Ansatz [6]

$$S = 1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \quad S^{-1} = 1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \quad \Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}. \quad (26)$$

Einsetzen in (25) und Vernachlässigung der quadratischen Terme liefert

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{i}{2}\Sigma_{\alpha\beta}\Delta\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{2}\Sigma_{\alpha\beta}\Delta\omega^{\alpha\beta}\right) &= (\delta^\mu_\nu + \Delta\omega^\mu_\nu)\gamma^\nu \\ \iff \frac{1}{2i}[\Sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\mu]\Delta\omega^{\alpha\beta} &= \Delta\omega^\mu_\nu\gamma^\nu \\ \iff \frac{1}{2i}[\Sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\mu]\Delta\omega^{\alpha\beta} &= \Delta\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\eta_{\nu\beta} - \delta^\mu_\beta\eta_{\nu\alpha}\right)\gamma^\nu, \end{aligned}$$

wobei die Beziehung

$$\Delta\omega^\mu_\nu = \Delta\omega^{\alpha\beta}\delta^\mu_\alpha\eta_{\beta\nu} = \frac{1}{2}\Delta\omega^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\alpha\eta_{\nu\beta} - \delta^\mu_\beta\eta_{\nu\alpha}\right)$$

und die Antisymmetrie der $\Delta\omega_{\alpha\beta}$ genutzt wurden.

Damit reduziert sich die Bestimmungsgleichung auf

$$i[\gamma^\mu, \Sigma_{\alpha\beta}] = \left(\delta^\mu_\alpha\eta_{\nu\beta} - \delta^\mu_\beta\eta_{\nu\alpha}\right)\gamma^\nu. \quad (27)$$

Als Lösung ergibt sich

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \quad (28)$$

denn es gilt (mit $\delta^\mu_\nu = \eta^\mu_\nu$):

$$\begin{aligned} \frac{i}{4i}[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha] &= \frac{1}{4}\left([\gamma^\mu, 2\gamma_\alpha\gamma_\beta] - \underbrace{[\gamma^\mu, 2\eta_{\alpha\beta}]}_{=0}\right) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2\eta^\mu_\beta\gamma_\alpha + 2\eta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta) \\ &= (\eta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \eta^\mu_\beta\gamma_\alpha) = (\eta^\mu_\alpha\eta_{\beta\nu} - \eta^\mu_\beta\eta_{\alpha\nu})\gamma^\nu. \end{aligned}$$

Damit ist die Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung bewiesen.

Endliche Drehungen ergeben sich dann durch hintereinander Ausführen von infinitesimalen Lorentz-Transformationen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\Delta\omega = \omega \quad (29)$$

$$S(\Lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)^N = \exp\left(\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) \quad (30)$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \left((1 + \Delta\omega)^N\right)^\mu_\nu = (e^\omega)^\mu_\nu \quad (31)$$

Durch Herunter- und Hochziehen der Indizes folgt zusammenfassend

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right), \quad (32)$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (33)$$

$$\Lambda = e^\omega \quad (34)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (35)$$

Wir bemerken noch, dass $\Sigma^{\mu\nu}$ den Vertauschungsrelationen

$$[\gamma^\alpha, \Sigma^{\mu\nu}] = i(\eta^{\nu\alpha}\gamma^\mu - \eta^{\mu\alpha}\gamma^\nu) \quad (36)$$

$$[\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\mu\nu}] = i(\eta^{\alpha\mu}\Sigma^{\beta\nu} + \eta^{\beta\nu}\Sigma^{\alpha\mu} - \eta^{\beta\mu}\Sigma^{\alpha\nu} - \eta^{\alpha\nu}\Sigma^{\beta\mu}) \quad (37)$$

genügt. Es handelt sich bei (37) um die zur Lorentz-Algebra gehörende Kommutatorrelation. Damit ist $\Sigma^{\mu\nu}$ eine Erzeugende der Lorentz-Algebra.

1.3 Räumliche Drehungen

Wir betrachten nun eine räumliche Drehung mit Winkel ϑ um den Einheitsvektor \vec{n} , $|\vec{n}| = 1$. Die entsprechende Lorentz-Transformation hat dann die Form [8]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{pmatrix}, R \in SO(3), \quad (38)$$

$$= e^{\vartheta \Omega_n}, (\Omega_n)^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n_3 & n_2 \\ 0 & n_3 & 0 & -n_1 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Mit Gleichung (32) folgt für die entsprechende Spinor-Transformation

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\vartheta\eta_{\mu\rho}(\Omega_n)^\rho{}_\nu\Sigma^{\mu\nu}\right) = \exp(i\vartheta(n_1\Sigma^{23} + n_2\Sigma^{31} + n_3\Sigma^{12})) \quad (40)$$

$$= \exp(-i\vartheta\vec{n}\hat{S}), \hat{S}_k := -\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\Sigma^{ij}. \quad (41)$$

Drehungen von Wellenfunktionen werden durch den Gesamtdrehimpuls \hat{J} erzeugt [6],[9]

$$\psi'(x) = (\Gamma(\vartheta, \vec{n})\psi)(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (42)$$

$$\Gamma(\vartheta, \vec{n}) = \exp(-i\vartheta\vec{n}\hat{J}) \quad (43)$$

Durch Einsetzen von (39) und (41) folgt

$$\left(\exp(-i\vartheta\vec{n}\hat{J})\psi\right)(x) = \exp(-i\vartheta\vec{n}\hat{S})\psi(e^{-\vartheta\Omega_n}x). \quad (44)$$

Mit der Relation [8]

$$\left.\frac{d}{d\vartheta}\psi(e^{-\vartheta\Omega_n}x)\right|_{\vartheta=0} = -i\vec{n}\hat{L}\psi(x)$$

folgt durch Ableiten von Gleichung (44) an der Stelle $\vartheta = 0$

$$-i\vec{n}\hat{J}\psi(x) = -i\vec{n}\hat{S}\psi(x) - i\vec{n}\hat{L}\psi(x). \quad (45)$$

Damit kann \hat{S} als Spinoperator identifiziert werden.

Zusammenfassend folgt:

$$\hat{J} = \hat{S} + \hat{L} \quad (46)$$

$$\hat{S}_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}\Sigma^{ij} \quad (47)$$

$$\hat{L}_k = -i\varepsilon_{kij}x_i\partial_j. \quad (48)$$

2 Die freie Dirac-Gleichung im gekrümmten Raum

In diesem Kapitel wird der Übergang zum gekrümmten Raum und dessen Konsequenzen für die Dirac-Gleichung betrachtet. Es soll schon an dieser Stelle auf die verwendete Notation verwiesen werden. Ab sofort werden koordinatenunabhängige Indizes (Tetraden-Indizes) mit kleinen lateinischen Buchstaben aus dem Anfang des Alphabets (a, b, c, \dots) verwendet und laufen von 0...3. Koordinatenabhängige Indizes (Tensor-Indizes) werden mit kleinen griechischen Buchstaben (α, β, \dots) mit Werten von 0...3, sowie mit lateinischen Buchstaben aus der Mitte des Alphabets (i, j, k, \dots) mit Werten von 1...3 symbolisiert.

2.1 Übergang zum gekrümmten Raum

Nach Überlegungen von Albert Einstein über die Wesensgleichheit von schwerer und träger Masse veröffentlichte er die Allgemeine Relativitätstheorie. Diese sollte invariant unter beliebigen Koordinaten-Transformationen formuliert sein. Mathematisch gesehen geschieht ein Übergang vom Minkowski-Raum zu einem pseudo Riemannschen Raum.

Die Geometrie des Raums wird dabei (lokal) durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ im Linienelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (49)$$

bestimmt.

Damit Tensorfelder nach Ableiten Tensorfelder bleiben und forminvariant gegenüber beliebigen Koordinaten-Transformationen sind, bedarf es einer kovarianten Ableitung

$$T_{\mu_1 \dots \mu_q; \alpha}^{\nu_1 \dots \nu_p} = T_{\mu_1 \dots \mu_q, \alpha}^{\nu_1 \dots \nu_p} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu_1} T_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\beta \dots \nu_p} + \dots - \Gamma_{\alpha\mu_1}^{\beta} T_{\beta \dots \mu_q}^{\nu_1 \dots \nu_p} - \dots, \quad (50)$$

wobei die Christoffelsymbole mit Hilfe der Metrik bestimmbar sind

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\nu, \mu} + g_{\beta\mu, \nu} - g_{\mu\nu, \beta}). \quad (51)$$

Aufgrund der Krümmung des Raumes verlieren Lorentz-Transformationen ihre globale Gültigkeit. Durch Koordinaten-Transformationen in einem Punkt P kann jedoch

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu, \alpha}(P) = 0$$

erreicht werden. Man spricht von einem lokalen Inertialsystem. In diesem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie. Dementsprechend können nur noch raumzeitabhängige Lorentz-Transformationen $\Lambda(x)$ durchgeführt werden, sogenannte lokale Lorentz-Transformationen. Spinoren transformieren im flachen Raum bei Lorentz-Transformationen mit $S(\Lambda)$. Auch im gekrümmten Raum können Spinoren eingeführt werden, indem sie an jedem Punkt der Raumzeit durch eine koordinatenunabhängige Basis des Tangentialraums beschrieben werden, welchen wir lokalen Minkowski-Raum nennen. Dort können die lokalen Lorentz-Transformationen durchgeführt werden. Der Übergang wird mit sogenannten Tetraden oder auch Vierbeinen bewerkstelligt.

2.2 Beschreibung der Raumzeit durch Tetraden

Wir beginnen an jedem Punkt der Raumzeit eine koordinatenunabhängige (pseudo-)orthonormale Basis von vier Vektoren $e_{(a)}$, $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ einzuführen [10],[11]. Die Umklammerung des Index soll dabei verdeutlichen, dass es sich um einen Basisvektor handelt.

Die koordinatenunabhängige Basis kann in die koordinatenabhängige Basis $e_{(\mu)} = \partial_\mu$ mit

$$e_{(\mu)}(x) = e_\mu^a(x) e_{(a)} \quad (52)$$

überführt werden. Die Komponenten e_μ^a bilden eine invertierbare 4×4 Matrix, die wir im Folgenden selbst als Tetraden bezeichnen.

2.2 Beschreibung der Raumzeit durch Tetraden

Die Tetraden überführen den lokalen Minkowski-Raum in die gekrümmte Raumzeit. Es soll gelten:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}. \quad (53)$$

Die Tensor-Indizes werden mit Hilfe des metrischen Tensors gehoben und gesenkt, Tetraden-Indizes mit der Minkowski-Metrik.

$$e_a^\mu = g^{\mu\nu} e_{\nu a}, \quad e_\mu^a = g_{\mu\nu} e^{\nu a}, \quad (54)$$

$$e_a^\mu = \eta_{ab} e^{\mu b}, \quad e_\mu^a = \eta^{ab} e_{\mu b}. \quad (55)$$

Es folgt durch Definition:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = \underbrace{\eta_{ab} \eta^{ac}}_{\delta_b^c} e_{\mu c} g_{\nu\alpha} e^{\alpha b} = g_{\alpha\nu} e_{\mu b} e^{\alpha b} \implies e_{\mu b} e^{\alpha b} = \delta_\mu^\alpha \quad (56)$$

$$e^{\alpha a} = \delta_\mu^\alpha e^{\mu a} = e^{\alpha b} e_{\mu b} e^{\mu a} \implies e_{\mu b} e^{\mu a} = \delta_b^a. \quad (57)$$

Das Einführen der Tetraden eröffnet eine neue Symmetrie, die lokalen Lorentz-Transformationen.

Sei $\Lambda(x)$ eine lokale Lorentz-Transformation. Dann führen e_ν^a und $e'_\nu{}^b = \Lambda^b{}_a e_\nu^a$ zur selben Metrik:

$$e'_\nu{}^a \eta_{ab} e'^\mu{}^b = \Lambda^a{}_c e_\nu^c \eta_{ab} \Lambda^b{}_d e_\mu^d = e_\nu^c \eta_{cd} e_\mu^d = g_{\nu\mu}. \quad (58)$$

Sei A_ν ein beliebiges Vektorfeld. Dann gilt

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha. \quad (59)$$

Dieses Vektorfeld kann lokal mit Hilfe der Tetraden in den Minkowski-Raum überführt werden

$$A_\nu = e_\nu^a A_a, \quad A_a = e_a^\nu A_\nu. \quad (60)$$

Da die nun offenstehenden lokalen Lorentz-Transformationen raumzeitabhängig sind, ist die Ableitung eines lokalen Lorentztensor kein Lorentztensor mehr. Deshalb muss es auch hier eine Verbindung zwischen partieller und kovarianter Ableitung geben, welche Lorentztensoren in Lorentztensoren überführt. Es muss also ein ω geben, sodass

$$\nabla_\mu A_a = \partial_\mu A_a - \omega_{\mu a}^b A_b \quad (61)$$

wieder ein Lorentzvektor ist. Diese Forderung ist erfüllt, falls es egal ist, ob wir erst den Vektor in einen Lorentzvektor überführen und dann die kovariante Ableitung bilden oder erst die kovariante Ableitung bilden und den entstandenen Vektor in einen Lorentzvektor überführen:

$$\begin{aligned} e_a^\nu \nabla_\mu A_\nu &= \nabla_\mu (e_a^\nu A_\nu) = \nabla_\mu A_a \\ e_a^\nu (\partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha) &= \partial_\mu (e_a^\nu A_\nu) - \omega_{\mu a}^b e_b^\nu A_\nu \\ &= (\partial_\mu e_a^\nu) A_\nu + e_a^\nu \partial_\mu A_\nu - \omega_{\mu ba} e^{\nu b} A_\nu \\ \iff -e_a^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha &= e_a^\nu \partial_\mu A_\nu - \omega_{\mu ba} e^{\nu b} A_\nu \\ \xleftrightarrow{\text{umben.}} -e_a^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A_\nu &= e_a^\nu \partial_\mu A_\nu - \omega_{\mu ba} e^{\nu b} A_\nu \end{aligned}$$

für ein beliebiges Vektorfeld A_ν .

Daher folgt die Bedingung

$$\partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu e_a^\alpha - \omega_{\mu ba} e^{\nu b} \equiv \nabla_\mu e_a^\nu = 0. \quad (62)$$

2.3 Spin-Zusammenhang und kovariante Ableitung

Analog lässt sich

$$\partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha^a + \omega_\mu^a e_\nu^b \equiv \nabla_\mu e_\nu^a = 0 \quad (63)$$

finden. Mit Hilfe von (62) bzw. (63) sind somit die Bestimmungsgleichungen für die $\omega_{\mu ab}$ gegeben.

Wir fordern, dass die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \nabla_\mu (e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab}) \\ &= \nabla_\mu \eta_{ab} = \eta_{ab,\mu} - \omega_\mu^a e_c^b \eta_{cb} - \omega_\mu^b e_d^a \eta_{ad} = -\omega_{\mu ba} - \omega_{\mu ab} \\ &\implies \omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}, \end{aligned}$$

wodurch $\omega_{\mu ab}$ antisymmetrisch in den Tetraden-Indizes wird.

2.3 Spin-Zusammenhang und kovariante Ableitung

Wir verallgemeinern nun die freie Dirac-Gleichung auf den gekrümmten Raum. Der Übergang erfordert zum einen das Ersetzen der flachen Gamma-Matrizen γ^a durch $\tilde{\gamma}^\nu = e^\nu_a \gamma^a$, welche die Clifford-Algebra

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (64)$$

erfüllen, zum anderen muss die partielle Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt werden

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + i\omega_\mu. \quad (65)$$

Wir berechnen nun den Spin-Zusammenhang ω_μ .

Die kovariante Ableitung D_μ muss invariant unter lokalen Spinor-Transformationen sein.

Sei $\Lambda^a_b(x) = (e^{\lambda(x)})^a_b$, $\lambda_{ab} = -\lambda_{ba}$ eine lokale Lorentz-Transformation, $S(\Lambda(x)) = \exp\left(\frac{i}{2}\lambda_{ab}\Sigma^{ab}\right)$ die zugehörige Spinor-Transformation mit

$$S^{-1}\gamma^a S = \Lambda^a_b \gamma^b. \quad (66)$$

Dann muss gelten

$$\tilde{D}_\mu \tilde{\psi} = (\partial_\mu + i\tilde{\omega}_\mu) S\psi \stackrel{!}{=} S(\partial_\mu + i\omega_\mu)\psi, \quad (67)$$

welches auf die Bedingung

$$\tilde{\omega}_\mu = S\omega_\mu S^{-1} + i(\partial_\mu S)S^{-1} \quad (68)$$

führt.

Aufgrund von (68) muss der Spin-Zusammenhang in der Lie-Algebra der Spin-Gruppe sein, zum Beispiel eine Linearkombination der Erzeugenden der Lorentz-Algebra (37):

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab}, \quad (69)$$

wobei die $\omega_{\mu ab}$ über Gleichung (62) gegeben sind. Andererseits kann $\omega_{\mu ab}$ auch als Eichfeld betrachtet werden [5]. Aufgrund dessen gilt bei einer lokalen Lorentz-Transformation Λ [11] [12]

$$\omega_{\mu ab} \longrightarrow \tilde{\omega}_{\mu cd} = \Lambda_c^a \omega_{\mu ab} (\Lambda^{-1})^b_d - ((\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1})_{cd} \quad (70)$$

$$\tilde{\omega}_\mu = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{\mu cd}\Sigma^{cd} = \frac{1}{2}(\Lambda_c^a \omega_{\mu ab} (\Lambda^{-1})^b_d - ((\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1})_{cd})\Sigma^{cd}. \quad (71)$$

Wir zeigen nun, dass das gewählte ω_μ in (69), welches als Eichfeld nach (71) transformieren muss, auch unter (68) transformiert.

Wir berechnen dazu zunächst

$$\begin{aligned}
 S\omega_\mu S^{-1} &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S\Sigma^{ab}S^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S\frac{1}{4i}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)S^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S\frac{1}{4i}(\gamma^a S^{-1}S\gamma^b - \gamma^b S^{-1}S\gamma^a)S^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}(\Lambda^{-1})^a{}_c(\Lambda^{-1})^b{}_d\Sigma^{cd}
 \end{aligned}$$

und sehen mit $(\Lambda^{-1})^a{}_c = \Lambda_c^a$ ein, dass dies der homogene Term von (71) ist.

Nun zum inhomogenen Term. Zunächst stellen wir mit Gleichung (66) fest, dass

$$(\partial_\mu\Lambda)^a{}_b\gamma^b = \partial_\mu(S^{-1}\gamma^a S) = (\partial_\mu S^{-1})\gamma^a S + S^{-1}\gamma^a(\partial_\mu S)$$

und

$$0 = \partial_\mu(SS^{-1}) = (\partial_\mu S)S^{-1} + S(\partial_\mu S^{-1})$$

gelten.

Es folgt

$$\begin{aligned}
 [\gamma^a, (\partial_\mu S)S^{-1}] &= \gamma^a(\partial_\mu S)S^{-1} - (\partial_\mu S)S^{-1}\gamma^a \\
 &= \gamma^a(\partial_\mu S)S^{-1} + S(\partial_\mu S^{-1})\gamma^a \\
 &= SS^{-1}\gamma^a(\partial_\mu S)S^{-1} + S(\partial_\mu S^{-1})\gamma^a SS^{-1} \\
 &= S(\partial_\mu\Lambda)^a{}_c\gamma^c S^{-1} \\
 &= (\partial_\mu\Lambda)^a{}_c(\Lambda^{-1})^c{}_b\gamma^b = ((\partial_\mu\Lambda)\Lambda^{-1})^a{}_b\gamma^b.
 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren von links mit γ_a und rechnen

$$\begin{aligned}
 \gamma_a[\gamma^a, (\partial_\mu S)S^{-1}] &= \gamma_a[\gamma^a, \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda)_{bc}\Sigma^{bc}] \\
 &= \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda)_{bc}\gamma_a\frac{1}{i}(\eta^{ba}\gamma^c - \eta^{ca}\gamma^b) \\
 &= \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda)_{bc}\frac{1}{i}(\gamma^b\gamma^c - \gamma^c\gamma^b) \\
 &= \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda)_{bc}4\Sigma^{bc} = 4(\partial_\mu S)S^{-1} \\
 &= ((\partial_\mu\Lambda)\Lambda^{-1})^a{}_b\gamma_a\gamma^b = ((\partial_\mu\Lambda)\Lambda^{-1})_{ab}\gamma^a\gamma^b.
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$4(\partial_\mu S)S^{-1} = ((\partial_\mu\Lambda)\Lambda^{-1})_{ab}\gamma^a\gamma^b \implies i(\partial_\mu S)S^{-1} = -\frac{1}{2}((\partial_\mu\Lambda)\Lambda^{-1})_{ab}\Sigma^{ab}$$

und damit ist die Gleichheit der inhomogenen Terme gezeigt.

Zusammenfassend folgt die kovariante Ableitung von Spinoren

$$D_\mu = \partial_\mu + i\omega_\mu, \tag{72}$$

mit dem Spin-Zusammenhang

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}\Sigma^{ab} \quad \Sigma^{ab} = \frac{1}{4i}[\gamma^a, \gamma^b]. \tag{73}$$

Die Dirac-Gleichung im gekrümmten Raum ist damit gegeben durch

$$(i\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu + i\omega_\mu) - m)\psi = (\mathcal{D} - m)\psi = 0, \quad \mathcal{D} = i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu. \tag{74}$$

3 Die Dirac-Gleichung in der Nähe eines schwarzen Lochs vom Schwarzschildtyp

Wir betrachten nun eine konkrete Metrik für ein ungeladenes, nicht-rotierendes kugelsymmetrisches schwarzes Loch im Vakuum, wobei die Raumzeit asymptotisch flach sein soll. Die Index-Notation bleibt wie in Kapitel 2 definiert.

3.1 Metrik und Wahl der Tetraden

Wir wählen die Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten.

Das Linienelement ist dann gegeben durch

$$ds^2 = R^2 dt^2 - \frac{dr^2}{R^2} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) \quad (75)$$

mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (76)$$

wobei $R := \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}$ und der Schwarzschildradius $r_s = 2M$ definiert wurden.

Wir müssen nun eine geeignete Vierbeinbasis wählen. Zwei Möglichkeiten zur Wahl der Tetraden sind besonders zweckmäßig [13]: Zum einen können die Basisvektoren so gewählt werden, dass sie an jedem Punkt parallel zu r , ϑ und φ sind. Dann ist die Matrix e^ν_a diagonal (vgl. dazu [11]). Zum anderen können die Basisvektoren parallel zu den kartesischen Achsen gelegt werden. Beide Möglichkeiten führen zu den selben Radialgleichungen, aber zu unterschiedlichen Abhängigkeiten der Komponenten.

Wir entscheiden uns für letzteres¹, sodass für die Tetraden

$$e^\nu_a = \begin{pmatrix} 1/R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & R \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & R \cos(\vartheta) \\ 0 & \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & -\frac{1}{r} \sin(\vartheta) \\ 0 & -\frac{\sin(\varphi)}{r \sin(\vartheta)} & \frac{\cos(\varphi)}{r \sin(\vartheta)} & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

gewählt wird.

Mit dieser Wahl gilt $2g^{\mu\nu} \mathbb{1} = \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = \{e^\mu_a \gamma^a, e^\nu_b \gamma^b\} = e^\mu_a e^\nu_b \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2e^\mu_a e^\nu_b \eta^{ab} \mathbb{1}$, wie sich leicht nachrechnen lässt.

Die Dirac-Matrizen des gekrümmten Raums sind damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^0 &= \frac{1}{R} \gamma^0 \\ \tilde{\gamma}^1 &= R (\gamma^1 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + \gamma^2 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \gamma^3 \cos(\vartheta)) \\ \tilde{\gamma}^2 &= \frac{1}{r} (\gamma^1 \cos(\vartheta) \cos(\varphi) + \gamma^2 \cos(\vartheta) \sin(\varphi) - \gamma^3 \sin(\vartheta)) \\ \tilde{\gamma}^3 &= \frac{1}{r} \left(-\gamma^1 \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} + \gamma^2 \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \right). \end{aligned}$$

¹Da bei dieser Wahl die Gesamtdrehimpulserhaltung gezeigt werden kann, welches mit ersterem nicht möglich ist.

Die nicht verschwindenden Christoffelsymbole ergeben sich mit Gleichung (51) zu

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{r_s}{2r(r-r_s)}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{r_s}{2r(r_s-r)}, & \Gamma_{22}^1 &= r_s - r, & \Gamma_{33}^1 &= (r_s - r) \sin^2(\vartheta) \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)}\end{aligned}$$

3.2 Spin-Zusammenhang

Wir widmen uns nun dem Spin-Zusammenhang für die gewählte Vierbeinbasis. Dazu benutzen wir Gleichung (62) und die Antisymmetrie ($\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$) mit der folgt

$$\omega_{\mu ab} = - [(\partial_\mu e^\nu_a) e_{\nu b} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu e^\alpha_a e_{\nu b}] = -g_{\nu\beta} [(\partial_\mu e^\nu_a) e^\beta_b + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu e^\alpha_a e^\beta_b].$$

Als nicht verschwindende Terme ergeben sich

$$\begin{aligned}\omega_{001} &= \frac{r_s}{2r^2} \sin(\vartheta) \cos(\varphi), & \omega_{002} &= \frac{r_s}{2r^2} \sin(\vartheta) \sin(\varphi), & \omega_{003} &= \frac{r_s}{2r^2} \cos(\vartheta) \\ \omega_{213} &= (1-R) \cos(\varphi), & \omega_{223} &= (1-R) \sin(\varphi) \\ \omega_{312} &= (R-1) \sin^2(\vartheta), & \omega_{313} &= (R-1) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi), & \omega_{323} &= (1-R) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi).\end{aligned}$$

Damit kann der Spin-Zusammenhang mit $\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}$ berechnet werden.

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^0 \gamma^0 \gamma^1 &= \frac{1}{R} \gamma^1 & \tilde{\gamma}^0 \gamma^0 \gamma^2 &= \frac{1}{R} \gamma^2 & \tilde{\gamma}^0 \gamma^0 \gamma^3 &= \frac{1}{R} \gamma^3 \\ \tilde{\gamma}^2 \gamma^1 \gamma^3 &= -\frac{1}{r} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \gamma^3 - \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 - \frac{1}{r} \sin(\vartheta) \gamma^1 \\ \tilde{\gamma}^2 \gamma^2 \gamma^3 &= \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 - \frac{1}{r} \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \gamma^3 - \frac{1}{r} \sin(\vartheta) \gamma^2 \\ \tilde{\gamma}^3 \gamma^1 \gamma^2 &= \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\cos(\varphi) \gamma^1 + \sin(\varphi) \gamma^2) \\ \tilde{\gamma}^3 \gamma^1 \gamma^3 &= \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\sin(\varphi) \gamma^3 - \cos(\varphi) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ \tilde{\gamma}^3 \gamma^2 \gamma^3 &= -\frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\cos(\varphi) \gamma^3 + \sin(\varphi) \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3).\end{aligned}$$

Mit den berechneten Summanden folgt für den Zusammenhangs-Term des Dirac-Operators

$$i \tilde{\gamma}^\mu \omega_\mu = \frac{i}{2} \tilde{\gamma}^\mu \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} = \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \tilde{\gamma}^\mu \gamma^a \gamma^b = \left(\frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) \tilde{\gamma}^1. \quad (78)$$

3.3 Dirac-Operator und Hamiltonsche Form der Dirac-Gleichung

Der Dirac-Operator ergibt sich mit diesen Resultaten zu

$$\mathcal{D} = i\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu + i\omega_\mu) = i\tilde{\gamma}^0\partial_t + i\tilde{\gamma}^1\left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2R^2}\right) + i\tilde{\gamma}^2\partial_\vartheta + i\tilde{\gamma}^3\partial_\varphi \quad (79)$$

und stimmt mit dem Ergebnis von [14] überein.

Wir bringen nun die Dirac-Gleichung

$$(\mathcal{D} - m)\psi = (i\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu + i\omega_\mu) - m)\psi \quad (80)$$

$$= \left(i\tilde{\gamma}^0\partial_t + i\tilde{\gamma}^1\left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2R^2}\right) + i\tilde{\gamma}^2\partial_\vartheta + i\tilde{\gamma}^3\partial_\varphi - m\right)\psi = 0 \quad (81)$$

in die Form der Schrödinger-Gleichung. Dazu wird Gleichung (81) von links mit $\tilde{\gamma}_0$ multipliziert. Mit $\tilde{\gamma}_0 = g_{00}\tilde{\gamma}^0 = R^2\tilde{\gamma}^0 = R\gamma^0$ folgt

$$i\partial_t\psi = \left(\gamma^0\tilde{\gamma}^1\frac{R}{i}\left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2R^2}\right) + \frac{R}{i}\gamma^0\tilde{\gamma}^2\partial_\vartheta + \frac{R}{i}\gamma^0\tilde{\gamma}^3\partial_\varphi + mR\gamma^0\right)\psi,$$

wodurch der Hamiltonoperator

$$\hat{h} = \gamma^0\tilde{\gamma}^1\frac{R}{i}\left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2R^2}\right) + \frac{R}{i}\gamma^0\tilde{\gamma}^2\partial_\vartheta + \frac{R}{i}\gamma^0\tilde{\gamma}^3\partial_\varphi + mR\gamma^0 \quad (82)$$

identifiziert werden kann. Die Hermitizität des Hamilton-Operators wird im Unterabschnitt 3.6 untersucht.

3.4 Erhaltungsgrößen

In diesem Unterabschnitt soll überprüft werden, ob der Gesamtdrehimpuls eines Teilchens im Gravitationsfeld eines nicht-rotierenden kugelsymmetrischen schwarzen Lochs erhalten ist und berechnen dazu $[\hat{J}, \hat{h}]$. Zunächst wird \hat{h} in eine andere Form gebracht. Dazu werden die Gamma-Matrizen in expliziter Form betrachtet. Wir wählen für den flachen Raum die Dirac-Darstellung,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

mit den zweidimensionalen Pauli-Matrizen σ_i und $\sigma_0 = \mathbb{1}$.

Bemerkung: Die Dimension der Sigma-Matrizen σ_i ist im Folgenden im jeweiligen Kontext als 2×2 -Matrix σ_i oder als 4×4 -Matrix $\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$ zu verstehen.

Wir definieren zur einfacheren Berechnung die drei Matrizen

$$\sigma_r = \sigma_1 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + \sigma_2 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \sigma_3 \cos(\vartheta) \quad (84)$$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_1 \cos(\vartheta) \cos(\varphi) + \sigma_2 \cos(\vartheta) \sin(\varphi) - \sigma_3 \sin(\vartheta) \quad (85)$$

$$\sigma_\varphi = -\sigma_1 \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} + \sigma_2 \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \quad (86)$$

und damit die Alpha- und Gamma-Matrizen

$$\alpha^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ -\sigma_m & 0 \end{pmatrix}, \quad m = r, \vartheta, \varphi. \quad (87)$$

Es folgt leicht

$$\partial_\vartheta\sigma_r = \sigma_\vartheta \quad (88)$$

$$\partial_\varphi\sigma_r = \sin^2(\vartheta)\sigma_\varphi \quad (89)$$

und mit den Relationen für die Pauli-Matrizen $\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$ kann sich schnell vergewissert werden, dass

$$\{\sigma_m, \sigma_n\} = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = r, \vartheta, \varphi \quad (90)$$

$$\sigma_r^2 = \mathbb{1}, \quad \sigma_\vartheta^2 = \mathbb{1}, \quad \sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \mathbb{1} \quad (91)$$

gilt. Der Hamilton-Operator (82) kann damit in der Form

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \frac{R}{i} \left[R \alpha^r \left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) + \frac{1}{r} \alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{r} \alpha^\varphi \partial_\varphi \right] + mR\beta \\ &= \frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) - \frac{iR}{r} (\alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \alpha^\varphi \partial_\varphi) + mR\beta \end{aligned} \quad (92)$$

geschrieben werden.

Wir führen als nächstes den Gesamtdrehimpulsoperator für die Dirac-Darstellung der Gamma-Matrizen ein

$$\hat{J} = \hat{S} + \hat{L}, \quad \hat{S}_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \Sigma^{lm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_k = -i \varepsilon_{klm} x_l \partial_m.$$

und betrachten den Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= i (\sin(\varphi) \partial_\vartheta + \cot(\vartheta) \cos(\varphi) \partial_\varphi) \\ \hat{L}_2 &= -i (\cos(\varphi) \partial_\vartheta - \cot(\vartheta) \sin(\varphi) \partial_\varphi) \\ \hat{L}_3 &= -i \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Wir werden nun die Winkelableitungen des Hamilton-Operators mit Hilfe von \hat{S} und \hat{L} ausdrücken.

Dazu bemerken wir mit den obigen eingeführten Matrizen σ_r , σ_ϑ und σ_φ , dass

$$\begin{aligned} (\alpha^r)^2 &= \mathbb{1} \\ \alpha^r \alpha^\vartheta &= i \sigma_2 \cos(\varphi) - i \sigma_1 \sin(\varphi) \\ \alpha^r \alpha^\varphi &= i \sigma_3 - i \sigma_1 \cot(\vartheta) \cos(\varphi) - i \sigma_2 \cot(\vartheta) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

gilt.

Das Produkt des Spin- und Drehimpulsoperators kann dann geschrieben werden als

$$2\hat{S}\hat{L} = \vec{\sigma}\hat{L} = -(\alpha^r \alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \alpha^r \alpha^\varphi \partial_\varphi) \quad (93)$$

und für den Hamilton-Operator (92) folgt

$$\hat{h} = \frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{R-1}{rR} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) + \frac{iR}{r} \alpha^r (\vec{\sigma}\hat{L}) + mR\beta. \quad (94)$$

Wir berechnen nun $[\hat{J}, \hat{h}]$. Da der Drehimpulsoperator mit ∂_r und jeder radialsymmetrischen Funktion aufgrund der Drehsymmetrie vertauscht und weil der Spinoperator mit β kommutiert, verbleiben die zu betrachtenden Kommutatoren $[\hat{S}_k + \hat{L}_k, \alpha^r]$ und $[\hat{S}_k + \hat{L}_k, \hat{S}\hat{L}]$, um zu überprüfen, ob der Gesamtdrehimpuls erhalten ist.

- $[\hat{S}_k, \alpha^r] = [\hat{S}_k, \alpha^1] \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + [\hat{S}_k, \alpha^2] \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + [\hat{S}_k, \alpha^3] \cos(\vartheta)$

Berechnen zunächst

$$\left[\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \sigma_j \\ \sigma_i \sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \sigma_i \\ \sigma_j \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} = 2i\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgen die Kommutatoren

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1, \alpha^r] &= i\alpha^3 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) - i\alpha^2 \cos(\vartheta) \\ [\hat{S}_2, \alpha^r] &= -i\alpha^3 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + i\alpha^1 \cos(\vartheta) \\ [\hat{S}_3, \alpha^r] &= i\alpha^2 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - i\alpha^1 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

- $[\hat{L}_k, \alpha^r] = \alpha^1 [\hat{L}_k, \sin(\vartheta) \cos(\varphi)] + \alpha^2 [\hat{L}_k, \sin(\vartheta) \sin(\varphi)] + \alpha^3 [\hat{L}_k, \cos(\vartheta)]$

Mit $\partial_\vartheta \alpha^r = \alpha^\vartheta$ und $\partial_\varphi \alpha^r = \sin^2(\vartheta) \alpha^\varphi$ sowie Einsetzen der Definitionen von α^ϑ und α^φ folgen

$$\begin{aligned} [\hat{L}_1, \alpha^r] &= -i\alpha^3 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + i\alpha^2 \cos(\vartheta) = -[\hat{S}_1, \alpha^r] \\ [\hat{L}_2, \alpha^r] &= i\alpha^3 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - i\alpha^1 \cos(\vartheta) = -[\hat{S}_2, \alpha^r] \\ [\hat{L}_3, \alpha^r] &= -i\alpha^2 \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + i\alpha^1 \sin(\vartheta) \sin(\varphi) = -[\hat{S}_3, \alpha^r] \end{aligned}$$

- $[\hat{S}_k + \hat{L}_k, \hat{S}\hat{L}]$

Mit den Vertauschungsrelationen für Spin $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$ und Drehimpuls $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$ folgt

$$[\hat{S}_k + \hat{L}_k, \hat{S}_m \hat{L}_m] = i\varepsilon_{kmn} (\hat{S}_n \hat{L}_m + \hat{S}_m \hat{L}_n) = i\varepsilon_{kmn} (\hat{S}_n \hat{L}_m - \hat{S}_n \hat{L}_m) = 0$$

Der Gesamtdrehimpulsoperator \hat{J} vertauscht also mit dem Hamilton-Operator \hat{h} .

3.5 Herleitung der radialen Dirac-Gleichung

Da der Gesamtdrehimpuls mit dem Hamilton-Operator vertauscht, können gemeinsame Eigenfunktionen gewählt werden. Nach Wahl dieser Eigenfunktionen spalten erfahrungsgemäß die Winkelanteile nach anwenden des Hamilton-Operators ab und die Dirac-Gleichung wird zu einem System aus gekoppelten Differentialgleichungen bezüglich r .

3.5.1 Herleitung der Eigenfunktionen zur Separation

In diesem Abschnitt sollen die Eigenfunktionen durch Diagonalisierung der mit \hat{h} kommutierenden Operatoren hergeleitet werden, wie dies schon in [9] für das relativistische Zentralkraftproblem im flachen Raum durchgeführt wurde.

Wir definieren zunächst einen von Dirac eingeführten Operator \hat{k} [9][15], welcher die Parallelität von Spin und Drehimpuls misst

$$\hat{k} = \beta \left(\vec{\sigma} \frac{\hat{L}}{\hbar} + \mathbb{1} \right). \quad (95)$$

Zunächst bemerken wir, dass \hat{k} hermitisch ist, da β , \hat{L} , $\vec{\sigma}$ hermitisch sind und $[\beta, \vec{\sigma}] = 0$.

Wir setzen $\hbar = 1$. Quadrieren von \hat{k} ergibt

$$\hat{k}^2 = \hat{J}^2 + \frac{1}{4} \mathbb{1}_4,$$

wodurch für die Eigenwerte k von \hat{k} folgt

$$k^2 = j(j+1) + \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2} \right)^2, \\ j \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2} \implies k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Desweiteren vertauscht \hat{k} mit \hat{J} ,

$$[\hat{J}, \hat{k}] = 0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass \hat{k} mit \hat{h} vertauscht und betrachten dazu die Kommutatoren der einzelnen Terme:

- Da $[\hat{L}, f(r)] = 0$, vertauscht auch \hat{k} mit jeder radialsymmetrischen Funktion:

$$[\hat{k}, f(r)] = 0.$$

- Mit $[\vec{\sigma}, \beta] = 0$ folgt $[\hat{k}, \beta] = 0$ und es gilt

$$[\hat{k}, \hat{L}\vec{\sigma}] = 0.$$

- ∂_r ist drehinvariant und vertauscht mit \hat{L} und deshalb auch mit \hat{k} :

$$[\hat{k}, \partial_r] = 0.$$

- Als Letztes müssen wir noch $[\alpha^r, \hat{k}]$ betrachten. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \{\alpha^r, -\vec{\sigma}\hat{L}\} &= \{\alpha^r, \alpha^r \alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \alpha^r \alpha^\varphi \partial_\varphi\} \\ &= \alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \alpha^\varphi \partial_\varphi + (\alpha^r \alpha^\vartheta (\partial_\vartheta \alpha^r) + \alpha^r \alpha^\varphi (\partial_\varphi \alpha^r) + \alpha^r \alpha^\vartheta \alpha^r \partial_\vartheta + \alpha^r \alpha^\varphi \alpha^r \partial_\varphi) \\ &= \alpha^\vartheta \partial_\vartheta + \alpha^\varphi \partial_\varphi + (\alpha^r \alpha^\vartheta \alpha^\vartheta + \alpha^r \alpha^\varphi \sin^2(\vartheta) \alpha^\varphi - \alpha^\vartheta \partial_\vartheta - \alpha^\varphi \partial_\varphi) \\ &= 2\alpha^r. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} [\alpha^r, \hat{k}] &= [\alpha^r, \beta (\hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1})] \\ &= \alpha^r \beta (\hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1}) - \beta (\hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1}) \alpha^r \\ &= -\beta \alpha^r (\hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1}) - \beta (\hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1}) \alpha^r \\ &= -\beta \{\alpha^r, \hat{L}\vec{\sigma} + \mathbb{1}\} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass \hat{k} mit \hat{h} vertauscht.

Die Integrale mit den zugehörigen Eigenwerten in Involution sind also

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 &: j \in \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2} \\ \hat{J}_3 &: \mu \in \{-j, \dots, j\} \\ \hat{k} &: k = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \hat{h} &: \varepsilon_{j,\mu,k}. \end{aligned}$$

Die Energieeigenzustände von \hat{h} können als Eigenzustände von \hat{J}^2 , \hat{J}_3 und \hat{k} gewählt werden, sodass die Dirac-Gleichung zu einem System von gekoppelt Differentialgleichungen für die radialen Wellenfunktionen wird.

Wir bestimmen nun die gemeinsamen Eigenfunktionen $\psi_{j,\mu,k}$. Dazu werden \hat{J}_3 und \hat{k} (und damit automatisch \hat{J}^2 [9]) diagonalisiert.

Diagonalisierung von \hat{J}_3

Für \hat{J}_3 hat die Eigenwertgleichung die Form

$$\hat{J}_3 \psi_{j,\mu,k} = \begin{pmatrix} \hat{L}_3 + \frac{1}{2} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \hat{L}_3 + \frac{1}{2} \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix},$$

wodurch sich für die Komponenten der zweier-Spinoren Φ^i

$$\left(\hat{L}_3 + \frac{1}{2}\right) \Phi_1^i = \mu \Phi_1^i, \quad \left(\hat{L}_3 - \frac{1}{2}\right) \Phi_2^i = \mu \Phi_2^i$$

ergibt. Es folgt somit für die beiden zweier-Spinoren Φ^i

$$\Phi^1 = \begin{pmatrix} f_1(r) Y_{l,\mu-\frac{1}{2}} \\ f_2(r) Y_{l,\mu+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Phi^2 = \begin{pmatrix} g_1(r) Y_{l,\mu-\frac{1}{2}} \\ g_2(r) Y_{l,\mu+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Diagonalisierung von \hat{k}

Für \hat{k} hat die Eigenwertgleichung die Form

$$\begin{aligned} \hat{k} \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{L}\vec{\sigma} + \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\hat{L}\vec{\sigma} - \sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \\ \implies \left(\hat{L}\vec{\sigma} + \sigma_0 \right) \Phi^i &= (-1)^{i+1} k \Phi^i. \end{aligned}$$

Für den zweier-Spinor Φ^1 folgt somit

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_3 + 1 & \hat{L}_1 - i\hat{L}_2 \\ \hat{L}_1 + i\hat{L}_2 & -\hat{L}_3 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \end{pmatrix}$$

Mit den Auf-/Absteigeoperator $\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$ wird die magnetische Quantenzahl erhöht bzw. verringert,

$$\hat{L}_\pm Y_{l,m} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l,m \pm 1}$$

und es folgt

$$\begin{pmatrix} \mu + \frac{1}{2} & ((l + \mu + \frac{1}{2})(l - \mu + \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}} \\ ((l - \mu + \frac{1}{2})(l + \mu + \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}} & -\mu + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Für nicht verschwindende Lösungen f_1, f_2 muss die Determinante von

$$\begin{pmatrix} \mu + \frac{1}{2} - k & ((l + \mu + \frac{1}{2})(l - \mu + \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}} \\ ((l - \mu + \frac{1}{2})(l + \mu + \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}} & -\mu + \frac{1}{2} - k \end{pmatrix}$$

null sein.

Dies führt auf die Lösungen

$$\begin{aligned} k = l + 1 > 0: f_2 &= \left(\frac{l - \mu + \frac{1}{2}}{l + \mu + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} f_1 \\ k = -l < 0: f_2 &= - \left(\frac{l + \mu + \frac{1}{2}}{l - \mu + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} f_1. \end{aligned}$$

Durch Ersetzen von l durch j und k , sowie der Normierung der numerischen Koeffizienten von Φ^1 und Φ^2 folgen, nach hinzufügen der analogen Resultate für die Komponenten von Φ^2 , die Eigenfunktionen

$$k = l + 1 > 0, j = l + \frac{1}{2}: \psi_{j,\mu,k} = \begin{pmatrix} f(r) \xi_{j\mu}^+ \\ g(r) \xi_{j\mu}^- \end{pmatrix} \quad (96)$$

$$k = -l < 0, j = l - \frac{1}{2}: \psi_{j,\mu,k} = \begin{pmatrix} f(r) \xi_{j\mu}^- \\ g(r) \xi_{j\mu}^+ \end{pmatrix}. \quad (97)$$

Mit $c_\mu^j = \sqrt{\frac{j+\mu}{2j}}$ sind die Spinor-Harmonischen $\xi_{j\mu}^\pm$ gegeben durch

$$\xi_{j\mu}^+ = \begin{pmatrix} c_\mu^j Y_{j-\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}} \\ c_{-\mu}^j Y_{j-\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \xi_{j\mu}^- = \begin{pmatrix} c_{-\mu}^{j+1} Y_{j+\frac{1}{2},\mu-\frac{1}{2}} \\ -c_\mu^{j+1} Y_{j+\frac{1}{2},\mu+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Wir müssen für das Anwenden des Hamilton-Operators (94) noch die Wirkung von α^r bzw. σ_r auf die Spinor-Harmonischen betrachten. Dazu sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [9]. Es gilt

$$\sigma_r \xi_{j\mu}^\pm = \xi_{j\mu}^\mp. \quad (99)$$

$\xi_{j\mu}^-$ wird in $\xi_{j\mu}^+$ abgebildet und umgekehrt. Mit diesen Erkenntnissen können wir nun die radiale Dirac-Gleichung herleiten.

3.5.2 Die radiale Dirac-Gleichung

Wir setzen in (94) den Operator \hat{k} ein

$$\hat{k} = \beta \left(\vec{\sigma} \hat{L} + \mathbb{1} \right) \implies \vec{\sigma} \hat{L} = \beta \hat{k} - \mathbb{1} \quad (100)$$

$$\hat{h} = \frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) + \frac{iR}{r} \alpha^r \beta \hat{k} + mR\beta \quad (101)$$

und erhalten die Dirac-Gleichung

$$i\partial_t \psi = \begin{pmatrix} mR & \sigma_r \left(\frac{R^2}{i} \partial_r + \frac{iR^2}{r} + \frac{r_s}{i4r^2} + \frac{i\hat{k}R}{r} \right) \\ \sigma_r \left(\frac{R^2}{i} \partial_r + \frac{R^2}{ir} + \frac{r_s}{i4r^2} + \frac{i\hat{k}R}{r} \right) & -mR \end{pmatrix} \psi, \quad (102)$$

mit der Definition

$$\hat{\kappa} := \vec{\sigma} \hat{L} + \mathbb{1}, \quad \hat{k} = \begin{pmatrix} \hat{\kappa} & 0 \\ 0 & -\hat{\kappa} \end{pmatrix}, \quad \hat{\kappa} \xi_{j\mu}^\pm = \pm k \xi_{j\mu}^\pm.$$

Wir machen nun für die Eigenfunktionen den Ansatz $\psi_\varepsilon = \psi_{j,\mu,k} e^{-i\varepsilon t}$ und erhalten die beiden gekoppelten linearen Differentialgleichungen

$$(mR - \varepsilon)f(r) + \frac{R^2}{i} \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) g(r) - \frac{ikR}{r} g(r) = 0 \quad (103)$$

$$-(mR + \varepsilon)g(r) + \frac{R^2}{i} \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) f(r) + \frac{ikR}{r} f(r) = 0. \quad (104)$$

Mit der Skalierung

$$f = \frac{1}{r\sqrt{R}} F \longrightarrow \frac{1}{r\sqrt{R}} F' = \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) f$$

$$g = \frac{1}{r\sqrt{R}} G \longrightarrow \frac{1}{r\sqrt{R}} G' = \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) g$$

folgen die Gleichungen für die radialen Funktionen

$$(mR - \varepsilon)F(r) + \frac{R^2}{i} G'(r) - \frac{ikR}{r} G(r) = 0 \quad (105)$$

$$-(mR + \varepsilon)G(r) + \frac{R^2}{i} F'(r) + \frac{ikR}{r} F(r) = 0. \quad (106)$$

Durch Substitution $G(r) \longrightarrow iG(r)$ Und Umbenennung der Funktionen deckt sich dieses Ergebnis mit [13].

3.6 Hermitizität des Hamilton-Operators

Wir wollen nun prüfen, ob der Hamilton-Operator

$$\hat{h} = \frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) + \frac{iR}{r} \alpha^r \beta \hat{k} + mR\beta$$

hermitisch ist.

Mit der Hermitizität von \hat{k} , α^r und β und deren Vertauschungsrelationen, (wie in Unterunterabschnitt 3.5.1 berechnet)

$$[\alpha^r, \hat{k}] = 0, \quad [\beta, \hat{k}] = 0, \quad \{\alpha^r, \hat{k}\} = 0,$$

folgt

$$\left(\frac{iR}{r} \alpha^r \beta \hat{k} + mR\beta \right)^\dagger = \frac{iR}{r} \alpha^r \beta \hat{k} + mR\beta. \quad (107)$$

Nun zum radialen Term des Hamilton-Operators. Seien ψ und χ zwei vierkomponentige Spinoren und ψ^\dagger der adjungierte Spinor von ψ . Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im gekrümmten Raum ist definiert durch [3], [16]

$$\langle \psi, \chi \rangle = \int \psi^\dagger \chi \sqrt{h} d^3x, \quad h = -\det(g_{ij}) = -\det(g_{\mu\nu} g^{00}). \quad (108)$$

Für die Schwarzschild-Metrik in Schwarzschild-Koordinaten (75) folgt

$$\sqrt{h} = \frac{r^2}{R} \sin(\vartheta).$$

Sei $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle \psi, -iR^2 \alpha^r \partial_r \chi \rangle &= \int_{\Omega} \int_{r_s}^{\infty} \psi^\dagger (-iR^2) \alpha^r (\partial_r \chi) \sqrt{h} dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_{\Omega} \psi^\dagger (-i\sqrt{h}R^2) \alpha^r \chi \Big|_{r_s}^{\infty} d\vartheta d\varphi + \int_{\Omega} \int_{r_s}^{\infty} ((-iR^2) \alpha^r (\partial_r \psi))^\dagger \chi \sqrt{h} dr d\vartheta d\varphi \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_{r_s}^{\infty} \psi^\dagger \chi \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_r (-i\sqrt{h}R^2) \sqrt{h} dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_{\Omega} \psi^\dagger (-i\sqrt{h}R^2) \alpha^r \chi \Big|_{r_s}^{\infty} d\vartheta d\varphi + \langle (-iR^2) \alpha^r \partial_r \psi, \chi \rangle - \langle \psi, \sqrt{h}^{-1} \partial_r (-i\sqrt{h}R^2) \chi \rangle \end{aligned}$$

und fordern

$$-\psi^\dagger i\sqrt{h}R^2 \alpha^r \chi \Big|_{r_s}^{\infty} = 0.$$

Dann folgt

$$\left(\frac{R^2}{i} \alpha^r \partial_r \right)^\dagger = \frac{R^2}{i} \alpha^r \partial_r + \frac{1}{i\sqrt{h}} \partial_r (\sqrt{h}R^2)$$

und mit

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_r (\sqrt{h}R^2) = \frac{R}{r^2} \partial_r (r^2 R) = \frac{R}{r^2} \left(2rR + \frac{r_s}{2R} \right) = \frac{2R^2}{r} + \frac{r_s}{2r^2}$$

resultiert

$$\left(\frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right) \right)^\dagger = \frac{R^2}{i} \alpha^r \left(\partial_r + \frac{1}{r} + \frac{r_s}{4r^2 R^2} \right), \quad (109)$$

wodurch die Hermitizität von \hat{h} gezeigt ist.

Mit der Forderung

$$\frac{\sqrt{\hbar} R^2}{i} \psi^\dagger \alpha^r \chi \Big|_{r_s}^\infty = 0 \quad (110)$$

ist eine Bedingung an die Spinoren gegeben, welche den Definitionsbereich D von \hat{h} bilden. Randterme sollen wie üblich verschwinden, weshalb noch

$$r^2 R \psi^\dagger \alpha^r \chi \Big|_{r_s} = 0$$

zu betrachten ist.

Für Spinoren Ψ und Φ , welche bei $r = r_s$ beschränkt sind folgt

$$r^2 R \Psi^\dagger \alpha^r \Phi \Big|_{r_s} = 0 \quad \text{da} \quad R = 1 - \frac{r_s}{r},$$

sodass diese im Definitionsbereich von \hat{h} liegen.

Betrachten wir noch Spinoren der Form

$$\psi^\dagger = \frac{1}{r\sqrt{R}} \Psi$$

muss also $\Psi^\dagger \alpha^r \Phi \Big|_{r_s} = 0$ sein. Um eine Forderung an die Spinoren zu formulieren, verlangen wir

$$\Psi \Big|_{r_s} = B \Phi \Big|_{r_s}.$$

Es gilt dann bei $r = r_s$:

$$\Psi^\dagger \alpha^r \Phi = \Psi^\dagger B^\dagger \alpha^r B \Phi.$$

Finden wir ein B mit

$$B^\dagger \alpha^r B = \lambda \alpha^r, \quad \lambda \neq 1$$

folgt

$$\Psi^\dagger \alpha^r \Phi = 0.$$

Für $B = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ folgt $\lambda = 1$.

Für $B = \gamma^0 = \beta$ folgt $\lambda = -1$.

Bei $r = r_s$ muss dann für die beiden Bi-Spinoren des Vierer-Spinors Ψ gelten:

$$\begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix},$$

die beiden Komponenten von Ψ^2 müssen also bei $r = r_s$ verschwinden. Im Definitionsbereich von \hat{h} sind also auch alle Vierer-Spinoren, deren dritte und vierte Komponente bei $r = r_s$ verschwinden.

Weitere explizite Beispiele für B sind α^j und α^φ mit $\lambda = -1$. Die Konsequenz an die Eigenfunktionen bei $r = r_s$ wurde jedoch aus Gründen des Umfangs nicht weiter betrachtet. Eine ausführliche Betrachtung der Hermitizität des Hamiltonoperators im gekrümmten Raum wurde in [16] durchgeführt, worauf an dieser Stelle verwiesen sein soll.

3.7 Lösung der Radialgleichung

Im Folgenden soll eine Näherungslösung für die radialen Dirac-Gleichungen für den Grundzustand $k = 1$, $j = 1/2$ erarbeitet werden. Zunächst werden wir die gekoppelten Radialgleichungen für F und G in die Form der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für bringen. Dazu verfolgen wir den Weg von [10].

Zunächst addieren/subtrahieren wir die Gleichungen (105) und (106) und erhalten die radialen Gleichung wie in [10]:

$$R^2 \left(\frac{d}{dr} - i \frac{\varepsilon}{R^2} \right) P(r) = \frac{R}{r} (1 - imr) Q(r) \quad (111)$$

$$R^2 \left(\frac{d}{dr} + i \frac{\varepsilon}{R^2} \right) Q(r) = \frac{R}{r} (1 + imr) P(r), \quad (112)$$

$$P(r) := F(r) + G(r), \quad Q(r) := F(r) - G(r). \quad (113)$$

Um die koordinatenabhängige Singularität bei $r = r_s$ zu umgehen (und damit wohldefinierte Lösungen zu erhalten), wird ein Wechsel in logarithmische Koordinaten² durchgeführt

$$u = r + r_s \log |r - r_s|, \quad r > r_s$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{du}{dr} \frac{d}{du} = \frac{1}{R^2} \frac{d}{du}.$$

Der Ereignishorizont ist nach $u = -\infty$ verschoben.

Der Einfachheit halber lassen wir ab jetzt die Argumente der jeweiligen Funktionen weg. Es folgt durch Einsetzen in (111) und (112)

$$\left(\frac{d}{du} - i\varepsilon \right) P = \frac{R}{r} (1 - imr) Q \quad (114)$$

$$\left(\frac{d}{du} + i\varepsilon \right) Q = \frac{R}{r} (1 + imr) P. \quad (115)$$

Wir definieren

$$\vartheta = \arctan(mr), \quad \cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 r^2}}, \quad \sin(\vartheta) = \frac{mr}{\sqrt{1 + m^2 r^2}},$$

$$\implies 1 \pm imr = e^{\pm i\vartheta} \sqrt{1 + m^2 r^2},$$

$$P = S e^{-\frac{i}{2}\vartheta}, \quad Q = T e^{+\frac{i}{2}\vartheta}, \quad \frac{d}{du} e^{\pm \frac{i}{2}\vartheta} = \pm \frac{i}{2} R^2 \frac{mr}{1 + m^2 r^2} e^{\pm \frac{i}{2}\vartheta}$$

und erhalten nach Einsetzen in (114) und (115)

$$\left(\frac{d}{du} - i\varepsilon \left(1 + \frac{R^2}{2\varepsilon} \frac{m}{1 + m^2 r^2} \right) \right) S = \frac{R}{r} \sqrt{1 + m^2 r^2} T \quad (116)$$

$$\left(\frac{d}{du} + i\varepsilon \left(1 + \frac{R^2}{2\varepsilon} \frac{m}{1 + m^2 r^2} \right) \right) T = \frac{R}{r} \sqrt{1 + m^2 r^2} S. \quad (117)$$

Mit der Variablentransformation

$$x = u + \frac{1}{2\varepsilon} \arctan(mr), \quad \frac{d}{du} = \frac{dx}{du} \frac{d}{dx} = \left(1 + \frac{R^2}{2\varepsilon} \frac{m}{1 + m^2 r^2} \right) \frac{d}{dx}$$

folgen die Gleichungen

$$\left(\frac{d}{dx} - i\varepsilon \right) S = WT \quad (118)$$

$$\left(\frac{d}{du} + i\varepsilon \right) T = WS, \quad (119)$$

²im angelsächsischen "tortoise coordinates"

wobei

$$W = \left(1 + \frac{R^2}{2\varepsilon} \frac{m}{1 + m^2 r^2}\right)^{-1} \frac{R}{r} \sqrt{1 + m^2 r^2} = \frac{rR(1 + m^2 r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1 + m^2 r^2) + \frac{r^2 R^2 m}{2\varepsilon}}$$

definiert wurde.

Durch addieren/subtrahieren von (118) und (119) ergeben sich

$$\left(\frac{d}{dx} - W\right) Z_+ = i\varepsilon Z_- \quad (120)$$

$$\left(\frac{d}{du} + W\right) Z_- = i\varepsilon Z_+, \quad Z_{\pm} = S \pm T. \quad (121)$$

Nach Einsetzen folgen die entkoppelten eindimensionalen Schrödinger-Gleichungen

$$-\frac{d^2 Z_{\pm}}{dx^2} + V_{\pm} Z_{\pm} = \varepsilon^2 Z_{\pm} \quad V_{\pm} = W^2 \pm \frac{dW}{dx}, \quad (122)$$

$$Z_+ = 2F \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + i2G \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad Z_- = 2G \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + i2F \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right).$$

3.7.1 Eigenschaften von V_{\pm}

Wir wollen zunächst die Potentiale $V_{\pm}(r, \varepsilon, m) = W^2 \pm \frac{dW}{dx}$ näher beleuchten. Diese berechnen sich zu [10]

$$V_{\pm} = \frac{rR(1+m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{\left[r^2(1+m^2r^2) + \frac{mr^2R^2}{2\varepsilon}\right]^2} \left[rR(1+m^2r^2)^{\frac{3}{2}} \pm \left((r - \frac{r_s}{2})(1+m^2r^2) + 3m^2r^3R^2 \right) \right] \quad (123)$$

$$\pm \frac{r^3R^3(1+m^2r^2)^{\frac{5}{2}}}{\left[r^2(1+m^2r^2) + \frac{mr^2R^2}{2\varepsilon}\right]^3} \left[2r(1+m^2r^2) + 2m^2r^3 + m \frac{(r - \frac{r_s}{2})}{\varepsilon} \right]. \quad (124)$$

Der Verlauf von V_+ und V_- ist in Abbildung 1 beispielhaft dargestellt.

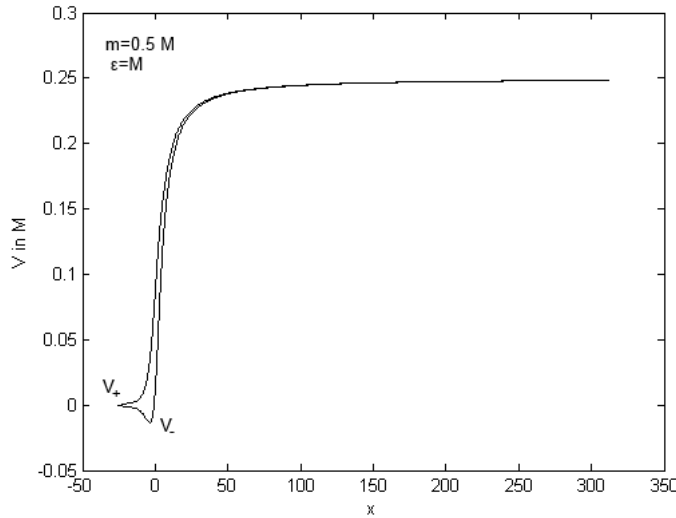


Abbildung 1: Verlauf der Potentiale in Einheiten von M für die Parameter $m = 0,5$, $\varepsilon = M$.

Die beiden Potentiale V_{\pm} hängen neben der Radialkoordinate x (bzw. r) noch von den Parametern ε , m und M ab. Wir beschränken uns hier auf Bereiche, in denen der Schwarzschildradius und reduzierte Compton-Wellenlänge in der gleichen Größenordnung liegen:

$$\frac{2GM}{c^2} \sim \frac{\hbar}{mc} \implies m \sim (2M)^{-1}. \quad (125)$$

In diesem Bereich sollte eine Wechselwirkung zwischen Teilchen und schwarzem Loch stattfinden.

Desweiteren sei erwähnt, dass die Energie ε des Teilchens immer größer als seine Ruheenergie m sein muss.

V_+ und V_- sind supersymmetrische Partner, erzeugt durch das Super-Potential W [17]. Als supersymmetrische Partner besitzen V_+ und V_- das gleiche diskrete und kontinuierliche Spektrum [18]. Im Folgenden werden wir nur $V_+ \equiv V$ betrachten.

V zeigt das asymptotische Verhalten

$$V(x \rightarrow \infty) = m^2, \quad V(x \rightarrow -\infty) = 0.$$

3.7 Lösung der Radialgleichung

Die Abhängigkeit von V bezüglich der Parameter ε und m soll durch Abbildung 2 und Abbildung 3 verdeutlicht werden.

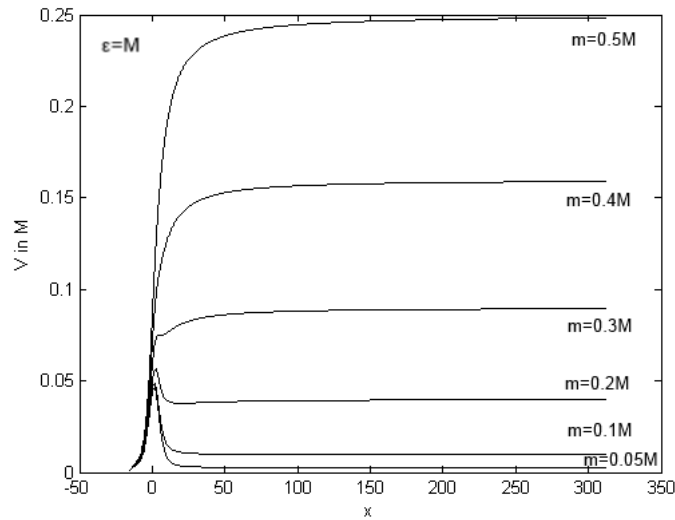


Abbildung 2: Verlauf von V für unterschiedliche Teilchenmassen bei $\varepsilon = M$

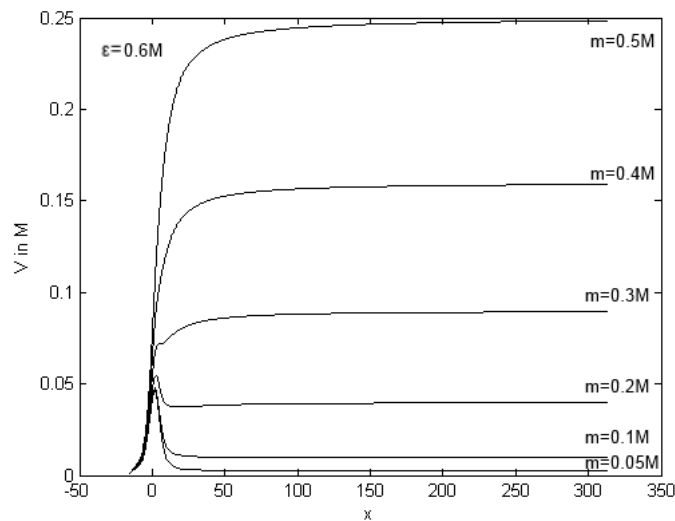


Abbildung 3: Verlauf von V für unterschiedliche Teilchenmassen bei $\varepsilon = 0.6 M$

Zunächst zeigt sich, dass die Variation der Energie des Teilchens keine signifikante Änderung am Potentialverlauf hervorruft. Die Variation der Teilchenmasse m ändert die Form von V deutlich. Für große Werte ergibt sich eine Stufenform. Nach Absenken bildet sich eine Stufe aus, welche aber noch nicht den asymptotischen Wert von $V(x \rightarrow \infty) = m^2$ überschreitet. Durch weiteres Absenken von m wird das Potential letztendlich stufenförmig.

Wir bezeichnen das Maximum von V an der Stelle $x = x_{max}$ als V_{max} . Desweiteren schreiben wir für Ortsableitungen d/dx abkürzend $'$.

Ist also $\varepsilon \gg V_{max}$, dann kann das Potential stufenförmig oder eine Barriere sein. Wird ε in den Bereich $\varepsilon \approx V_{max}$ verkleinert, deckt die Betrachtung einer Potentialbarriere die meisten Parameterkonstellationen ab. Für den Fall $\varepsilon \ll V_{max}$ ist V für alle $m < \varepsilon$ eine Barriere.

3.7.2 Approximation der Lösung mittels WKB-Näherung

Wir haben also die eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V\psi(x) = \varepsilon^2\psi(x), \quad V = W^2 + \frac{dW}{dx} \quad (126)$$

zu lösen. Für diese Gleichung lässt sich, aufgrund des Potentials, keine analytische Lösung finden. Um dennoch sinnvolle Lösungen zu erhalten, muss entweder über numerische Verfahren Gleichung (126) schrittweise gelöst werden oder, wie in dieser Arbeit, eine Näherungsmethode verwendet werden, wie bereits in [18] und [19].

Zunächst gilt es, physikalisch sinnvolle Randbedingungen zu wählen. Wir betrachten dazu eine von $x = \infty$ nach links laufende Welle. Es soll gelten [10]

$$\psi(x \rightarrow \infty) = e^{-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}x} + \mathbf{R}e^{+i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}x} \quad (127)$$

$$\psi(x \rightarrow -\infty) = \mathbf{T}e^{-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}x}, \quad (128)$$

das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen am Ereignishorizont reflektiert wird, ist null gesetzt. \mathbf{T} und \mathbf{R} bezeichnen hierbei die Amplituden der transmittierten beziehungsweise reflektierten Welle.

Die Transmissions- und Reflektionswahrscheinlichkeit sind dann über die Beträge der Quotienten der Stromdichten³ gegeben

$$\mathcal{T} = \left| \frac{j_{trans}}{j_{inf}} \right| = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - m^2}} |\mathbf{T}|^2, \quad \mathcal{R} = \left| \frac{j_{refl}}{j_{inf}} \right| = |\mathbf{R}|^2 \quad (129)$$

mit $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$.

Die Lösung wird in WKB-Näherung gegeben. Damit diese eine gute Näherungslösung darstellt, muss die Gültigkeitsvoraussetzung⁴

$$\left| \frac{V'}{2p^3} \right| \ll 1, \quad p(x) = \sqrt{\varepsilon^2 - V(x)} \quad (130)$$

erfüllt sein.

Wir betrachten deshalb (ähnlich zu [18]) die drei Fälle $\varepsilon^2 \gg V_{max}$, $\varepsilon^2 \approx V_{max}$ und $\varepsilon^2 \ll V_{max}$.

³Diese berechnet sich, wie in der nicht-relativistischen Quantentheorie üblich, gemäß $j = \frac{1}{2im} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right)$.

⁴bezüglich der Schrödinger-Gleichung (126)

$$\underline{\varepsilon^2 \gg V_{max}}$$

Das Quadrat der Energie des Teilchens ist wesentlich größer als das Maximum von V . Mit Hilfe eines fixierten Punktes $x_0 \in (-\infty, \infty)$ ist die Lösung dann gegeben durch

$$\psi(x) = C_+ \psi_+(x) + C_- \psi_-(x), \quad \psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm i \int_{x_0}^x p(t) dt}, \quad (131)$$

solange (130) erfüllt ist.

Mit Hilfe der Randbedingungen (127) und (128) bestimmen sich die Konstanten C_{\pm} zu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}x} = C_- \psi_-(x \rightarrow \infty) &= \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon^2 - m^2}} e^{-i \int_{x_0}^{\infty} p(t) dt} \\ \implies C_- &= \sqrt[4]{\varepsilon^2 - m^2} e^{-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}x_0} e^{i \int_{x_0}^{\infty} (p(t) - \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}) dt} \\ C_+ \psi_+(x \rightarrow -\infty) = 0 &\implies C_+ = 0 \end{aligned}$$

und für die Transmissions- und Reflektionsamplituden folgt

$$\begin{aligned} R &= 0 \\ T &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon^2}} e^{i\varepsilon x} e^{-i \int_{x_0}^x p(t) dt} = \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon^2}} e^{i\varepsilon x_0} e^{i \int_{-\infty}^{x_0} (p(t) - \varepsilon) dt} \\ \implies |T| &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - m^2}{\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Mit (129) folgt $\mathcal{T} = 1$. Dieses Ergebnis ist klassisch gesehen verständlich, da das Teilchen Richtung Ereignishorizont läuft ohne reflektiert zu werden. Quantenmechanisch gibt es jedoch immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass eine Reflektion am Potential auftritt, auch wenn die Energie wesentlich größer als das Potentialmaximum ist. Daher wird die allgemeine Lösung (131) dahingehend modifiziert, dass die Konstanten ortsabhängig sind [20]

$$\psi(x) = C_+(x) \psi_+(x) + C_-(x) \psi_-(x). \quad (132)$$

$C_+(x)$ und $C_-(x)$ sind langsam variierende Funktionen, welche die lokale Reflektion beschreiben sollen. Wir setzen⁵

$$C'_+(x) \psi_+(x) + C'_-(x) \psi_-(x) = 0,$$

sodass

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= C_+(x) \psi'_+(x) + C_-(x) \psi'_-(x), \\ \psi''(x) &= C'_+(x) \psi'_+(x) + C'_-(x) \psi'_-(x) + C_+(x) \psi''_+(x) + C_-(x) \psi''_-(x) \end{aligned}$$

und berechnen mit $\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm i \int_{x_0}^x p(t) dt}$:

$$\begin{aligned} \psi'_{\pm}(x) &= \left(\pm i \sqrt{p(x)} - \frac{p'(x)}{2p(x)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{\pm i \int_{x_0}^x p(t) dt}, \\ \psi''_{\pm}(x) &= \left(\pm i \frac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}} - \frac{p''(x)}{2p(x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4} \frac{p'(x)^2}{2p(x)^{\frac{5}{2}}} \right) e^{\pm i \int_{x_0}^x p(t) dt} + \left(\pm i \sqrt{p(x)} - \frac{p'(x)}{2p(x)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\pm i p(x) e^{\pm i \int_{x_0}^x p(t) dt} \right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (126) folgt die Gleichung

$$i \left(C'_+(x) e^{+i \int_{x_0}^x p(t) dt} - C'_-(x) e^{-i \int_{x_0}^x p(t) dt} \right) = \left(C_+(x) e^{+i \int_{x_0}^x p(t) dt} - C_-(x) e^{-i \int_{x_0}^x p(t) dt} \right) \left(\frac{p''(x)}{2p(x)^2} - \frac{3}{4} \frac{p'(x)^2}{p(x)^3} \right),$$

⁵Diese Bedingung ist eine Konsequenz der geforderten langsamen Veränderlichkeit. In erster Näherung sind $C_{\pm}(x)$ konstant, sodass die Gleichung erfüllt ist [21].

welche auf die Differentialgleichungen für C_{\pm} führt

$$C'_{\pm}(x) = \mp \frac{i}{2} \left(C_{\pm}(x) + C_{\mp}(x) e^{\mp 2i \int_{x_0}^x p(t) dt} \right) \left(\frac{p''(x)}{2p(x)^2} - \frac{3p'(x)^2}{4p(x)^3} \right).$$

Mit den Randbedingungen (127) und (128) folgt

$$\begin{aligned} C_+(-\infty) &= 0 \\ C_-(\infty) &= \sqrt[4]{\varepsilon^2 - m^2} e^{-i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2} x_0} e^{i \int_{x_0}^{\infty} (p(t) - \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}) dt}, \end{aligned}$$

sodass die Differentialgleichungen in Integralgleichungen umgeschrieben werden können

$$\begin{aligned} C_+(x) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^x \left(C_+(t) + C_-(t) e^{-2i \int_{x_0}^t p(s) ds} \right) \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt \\ C_-(x) &= C_-(\infty) - \frac{i}{2} \int_x^{\infty} \left(C_-(t) + C_+(t) e^{2i \int_{x_0}^t p(s) ds} \right) \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt. \end{aligned}$$

Eine näherungsweise Lösung wird erhalten, wenn die Randwerte $C_+(-\infty)$ und $C_-(\infty)$ auf der rechten Seite eingesetzt werden, sodass die Gleichungen entkoppeln [18]

$$\begin{aligned} C_+(x) &\approx -\frac{i}{2} C_-(\infty) \int_{-\infty}^x e^{-2i \int_{x_0}^t p(s) ds} \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt \\ C_-(x) &\approx C_-(\infty) \left(1 - \frac{i}{2} \int_x^{\infty} \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt \right). \end{aligned}$$

Für die Amplitude der reflektierten Welle folgt in dieser Näherung

$$\mathbf{R} = \frac{C_+(-\infty)}{\sqrt[4]{\varepsilon^2 - m^2}} e^{i\sqrt{\varepsilon^2 - m^2} x_0} e^{i \int_{x_0}^{\infty} (p(t) - \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}) dt}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind dann mit (129) gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i \int_{x_0}^t p(s) ds} \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt \right|^2 \\ \mathcal{T} &= 1 - \mathcal{R} = 1 - \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i \int_{x_0}^t p(s) ds} \left(\frac{p''(t)}{2p(t)^2} - \frac{3p'(t)^2}{4p(t)^3} \right) dt \right|^2. \end{aligned}$$

$$\underline{\varepsilon^2 \approx V_{max}}$$

Ist die Energie des Teilchens in dem Bereich $\varepsilon^2 \lesssim V_{max}$, dann ist Bedingung (130) nicht im gesamten Definitionsbereich erfüllt. In der Nähe der klassischen Umkehrpunkte $p = 0$, $x = x_{max}$ muss das Potential genähert werden. Im Falle einer Potentialbarriere bietet es sich aufgrund der Form des Potentials an, dieses parabolisch zu nähern. In den Bereichen neben dem Maximum, wo (130) erfüllt ist, kann die Standard-WKB-Lösung angesetzt werden. Durch stetige Übergangsbedingungen an den Überlappungsstellen der Teilbereichslösungen wird die Lösung für alle $x \in (-\infty, \infty)$ erhalten.

Wir nähern zunächst das Potential im Bereich um x_{max}

$$V(x) \approx V_{max} + \frac{1}{2} V''(x_{max})(x - x_{max})^2. \quad (133)$$

Damit folgt

$$\varepsilon^2 - V(x) \approx \varepsilon^2 - V_{max} - \frac{1}{2} V''(x_{max})(x - x_{max})^2.$$

Mit den Definitionen und Substitutionen

$$\begin{aligned}\lambda &:= -\frac{1}{2}V''(x_{max}), \\ \xi &:= |\varepsilon^2 - V_{max}|^{\frac{1}{2}}, \\ z &= \lambda^{\frac{1}{4}}(x - x_{max}), \\ \frac{d}{dx} &= \lambda^{\frac{1}{4}} \frac{d}{dz}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 - V(x) &\approx \sqrt{\lambda}(z^2 + \xi^2), \quad \varepsilon^2 > V_{max} \\ &\sqrt{\lambda}(z^2 - \xi^2), \quad \varepsilon^2 < V_{max}.\end{aligned}$$

Falls $\varepsilon^2 < V_{max}$, so gilt $V(\pm\xi) = \varepsilon^2$, welches die klassischen Umkehrpunkte sind. Wir unterteilen die x-Achse in drei Regionen: I: $x > x_1$, II: $x_1 > x > x_2$ und III: $x_2 > x$. Dabei werden x_1 und x_2 zum einen weit genug entfernt von den klassischen Umkehrpunkten gewählt, sodass in I und III die Gültigkeitsvoraussetzung (130) weiterhin erfüllt ist, zum anderen nicht zu weit von x_{max} entfernt gewählt, damit die parabolische Näherung noch Gültigkeit besitzt. In den Bereichen I und III kann dann die Standardlösungen der WKB-Näherung verwendet werden

$$\psi_I(x) = A_+\psi_+(x) + A_-\psi_-(x) \quad (134)$$

$$\psi_{III}(x) = C_-(x)\psi_-(x). \quad (135)$$

In II wird das parabolisch genäherte Potential verwendet. Es folgt für die Schrödinger-Gleichung (126)

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2} = (z^2 \pm \xi^2)\psi.$$

Mit $y = \sqrt{2}z$ folgt die Gleichung (vgl. [22], Gl. 19.1.3)

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{4}y^2\psi - a_j\psi = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{2}\xi^2, \quad a_2 = \frac{1}{2}\xi^2, \quad (136)$$

dessen allgemeine Lösungen ([22], Gl. 19.3.1) durch die linear unabhängigen, parabolischen Zylinderfunktionen

$$D_{ia_j - \frac{1}{2}}(ye^{i\frac{\pi}{4}}), \quad D_{ia_j - \frac{1}{2}}(-ye^{i\frac{\pi}{4}})$$

gegeben sind.

Es resultiert somit als Lösung für den Bereich II eine Linearkombination der beiden parabolischen Zylinderfunktionen

$$\psi_{II}^{\pm} = B_1 D_{\mp i\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}}(\sqrt{2}ze^{i\frac{\pi}{4}}) + B_2 D_{\mp i\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}}(-\sqrt{2}ze^{i\frac{\pi}{4}}), \quad (137)$$

wobei ψ_{II}^+ für $\varepsilon^2 > V_{max}$ und ψ_{II}^- für $\varepsilon^2 < V_{max}$ gilt.

Mit Hilfe der Forderung des stetigen Übergangs der einzelnen Lösungen in den Überlappungsbereichen $x \approx x_1$ und $x \approx x_2$ und mit den Randbedingungen können dann die Konstanten A_+ , A_- , B_1 , B_2 und C_- bestimmt werden.

Für die Transmissionswahrscheinlichkeit folgt dann [18]

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\pi(V_{max} - \varepsilon^2)}{\sqrt{\lambda}}\right)} \quad (138)$$

und die Reflektionswahrscheinlichkeit berechnet sich zu

$$\mathcal{R} = \frac{\exp\left(\frac{\pi(V_{max} - \varepsilon^2)}{\sqrt{\lambda}}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\pi(V_{max} - \varepsilon^2)}{\sqrt{\lambda}}\right)}. \quad (139)$$

$$\varepsilon^2 \ll V_{max}$$

Bei noch kleineren Teilchenenergien (und damit Teilchenmassen) wird der Abstand zwischen den beiden Punkten x_1 und x_2 (mit $V(x_1) = V(x_2) = \varepsilon^2$) immer größer und eine parabolische Näherung verliert die Gültigkeit. Stattdessen wird das Potential in den Bereichen um x_1 und x_2 linear genähert, sodass die x-Achse in fünf Bereiche geteilt werden kann: I: $x \gg x_2$, II: $x \approx x_2$, III: $x_2 \gg x \gg x_1$, IV: $x \approx x_1$ und V: $x_1 \gg x$.

In den Bereichen I, III und V können die Standard-WKB-Lösungen angesetzt werden, falls (130) weiterhin erfüllt ist:

$$\psi_I = A_+ \psi_+(x) + A_- \psi_-(x) \quad (140)$$

$$\psi_{III} = C_+ \psi_+(x) + C_- \psi_-(x) \quad (141)$$

$$\psi_V = E_- \psi_-(x). \quad (142)$$

In Bereich III hat, wegen $\varepsilon^2 < V(x)$, die Standardlösung die Form

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\mp \int_{x_1}^x |p(t)| dt}.$$

Dabei muss beachtet werden, dass die exponentiell anwachsende Lösung unphysikalisch ist und die entsprechende Konstante zu null deklariert wird.

In den Bereichen II und IV wird das Potential linearisiert.

Im Bereich II gilt:

$$\begin{aligned} V(x) &\approx V(x_1) + V'(x_1)(x - x_1) \\ \varepsilon^2 - V(x) &\approx -V'(x_1)(x - x_1). \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= -V'(x_1) \\ z_1 &:= \lambda_1^{\frac{1}{3}}(x - x_1) \end{aligned}$$

folgt für die Schrödinger-Gleichung (126)

$$\frac{d^2\psi}{dz_1^2} + z_1\psi = 0. \quad (143)$$

Diese wird durch ein Paar von linear unabhängigen Airy-Funktionen⁶ $\text{Ai}(-z_1)$, $\text{Bi}(-z_1)$ gelöst ([22], Gl. 10.4.1), sodass für Bereich II die Lösung

$$\psi_{II} = B_1 \text{Ai}(-z_1) + B_2 \text{Bi}(-z_1) \quad (144)$$

resultiert.

Analog ergibt sich im Bereich IV:

$$\begin{aligned} V(x) &\approx V(x_2) + V'(x_2)(x - x_2) \\ \varepsilon^2 - V(x) &\approx -V'(x_2)(x - x_2). \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \lambda_2 &:= V'(x_2) \\ z_2 &:= \lambda_2^{\frac{1}{3}}(x - x_2) \end{aligned}$$

⁶Je nachdem ob das Argument größer oder kleiner als Null ist, bestehen die Airy-Funktionen aus Linearkombinationen der sphärischen Bessel-Funktionen erster Gattung oder aus Linearkombinationen der modifizierten sphärischen Bessel-Funktionen erster Gattung (vgl. [22]).

und erhalten für die Schrödinger-Gleichung (126)

$$\frac{d^2\psi}{dz_2^2} - z_2\psi = 0, \quad (145)$$

weshalb sich als allgemeine Lösung für diesen Bereich

$$\psi_{IV} = D_1\text{Ai}(z_2) + D_2\text{Bi}(z_2) \quad (146)$$

ergibt.

Die Konstanten bestimmen sich erneut mittels Randbedingungen sowie mit den Übergangsbedingungen der Bereichslösungen an den Überlappungsstellen.

Für die Transmissionswahrscheinlichkeit folgt

$$\mathcal{T} = \exp\left(-2 \int_{x_2}^{x_1} p(t) dt\right) \quad (147)$$

und damit ergibt sich die Reflektionswahrscheinlichkeit

$$\mathcal{R} = 1 - \exp\left(-2 \int_{x_2}^{x_1} p(t) dt\right). \quad (148)$$

Durch analoges Betrachten von (122) für V_- ist die näherungsweise Lösung der Radialen Dirac-Gleichungen (105) und (106) für die meisten Parameterkonstellationen (ε , m , M) vollständig. Die Diskussion der Transmissionswahrscheinlichkeit wurde aus Gründen des Umfangs in dieser Arbeit nicht betrachtet.

4 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die freie Dirac-Gleichung für ein schwarzes Loch vom Schwarzschildtyp zu diskutieren. Dazu wurde zunächst die freie Dirac-Gleichung im flachen Raum eingeführt und wesentliche Eigenschaften der mathematischen Objekte gezeigt. Desweiteren wurden die Lorentz-Transformationen beleuchtet, welche das Linienelement des Minkowski-Raums invariant lassen. Die eigentliche-orthochrone Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow enthält alle Lorentz-Transformationen Λ , welche zukunftsgerichtete, zeitartige Vektoren zukunftsgerichtet und zeitartig lassen und erhält den mathematisch positiven Drehsinn. Da diese Lorentz-Transformationen aus infinitesimalen Drehungen aufgebaut werden können, ließ sich die Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung leichter zeigen. Als Bedingung an die Invarianz bezüglich Lorentz-Transformationen folgte das Transformationsverhalten der Spinoren. Dadurch ergab sich die Bestimmungsgleichung für die Spinor-Transformation $S(\Lambda)$. Jedem Λ kann so ein $S(\Lambda)$ zugeordnet werden, welches den entsprechenden Spinor transformiert. Mit Hilfe einer räumlichen Drehung konnte so der Gesamtdrehimpulsoperator für beliebige Darstellungen der Dirac-Matrizen gefunden werden. Als nächstes wurde die freie Dirac-Gleichung auf den gekrümmten Raum verallgemeinert. Die Beschreibung der Spinoren wird dabei mit den Tetraden bewerkstelligt, welchen jeden Punkt der Raumzeit in eine lokale Minkowski-Raumzeit überführen. Dies eröffnet die Möglichkeit lokale Lorentz-Transformationen durchzuführen, welche eine zusätzliche Symmetrie darstellen. Deshalb bedurfte es der Einführung einer neuen kovarianten Ableitung, welche diesen Umstand berücksichtigt. Dabei sichert der Spin-Zusammenhang, dass Lorentz-Tensoren nach Ableiten Lorentz-Tensoren bleiben. Zuletzt wurde dann die freie Dirac-Gleichung für die Schwarzschildmetrik untersucht. Zunächst musste der Spinzusammenhang berechnet werden, wodurch die kovariante Ableitung gefolgert werden konnte. Zur weiteren Untersuchung wurde der Hamiltonoperator \hat{h} identifiziert und gezeigt, dass der Gesamtdrehimpuls des Teilchens erhalten bleibt. Durch Diagonalisierung der mit \hat{h} kommutierenden Operatoren \hat{J}_2 , \hat{J}_3 und \hat{k} wurden die Eigenfunktionen von \hat{h} hergeleitet. Nach Anwenden von \hat{h} spalteten die Winkelanteile ab und es entstand ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die radialen Funktionen. Die entstandene Quantenzahl k wurde eins gesetzt, was dem Grundzustand mit verschwindendem Drehimpuls entspricht. Die Differentialgleichungen wurden entkoppelt und in die Form der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung gebracht. Da die Schrödinger-Gleichung aufgrund der Form des Potentials nicht analytisch lösbar ist, wurde auf die WKB-Näherungsmethode zurückgegriffen, wie dies schon in [18] und [19] betrachtet wurde. Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass in [23] andere Randbedingungen gewählt wurden, sodass gebundene Zustände berechnet werden konnten, wobei eine verschwindende Diracsche Stromdichte für r , ϑ und φ am Ereignishorizont gefordert wurde.

Durch Variation der im Potential vorhandenen Parameter (Masse des schwarzen Lochs M , Teilchenenergie ε und Teilchenmasse m) wurde der Verlauf diskutiert. Es zeigte sich, dass das Potential entweder stufenförmig ist oder eine Barrierenform hat. Zur Berechnung wurde eine aus dem unendlichen nach links einlaufende Welle betrachtet. Als physikalisch sinnvolle Randbedingung folgte, dass keine Wellen am Ereignishorizont reflektiert werden, also der nach rechts laufende Anteil in der Gesamtwellenfunktion bei $r = r_s$ verschwindet. Zur übersichtlicheren Lösung für die unterschiedlichen Parameterwahlen und Gültigkeitsvoraussetzung der WKB-Näherung wurde in die drei Fälle $\varepsilon^2 \gg V_{max}$, $\varepsilon^2 \approx V_{max}$ und $\varepsilon^2 \ll V_{max}$ unterschieden. Ist das Quadrat der Teilchenenergie wesentlich größer als das Maximum des Potentials, so kann die Standard-WKB-Lösung angesetzt werden, falls die Gültigkeitsvoraussetzung erfüllt ist. Es wurde eine Modifizierung durchgeführt, welche die Tatsache berücksichtigt, dass immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit der Reflexion am Potential besteht. Für den Fall, dass das Energiequadrat im Bereich des Potentialmaximums liegt, wurde das Potential im Bereich des Maximums parabolisch genähert und die entsprechende Schrödinger-Gleichung exakt gelöst. In den Bereichen um das Maximum wurde die Standard-WKB-Lösung verwendet. Durch stetige Übergangsbedingungen an den Überlappungsstellen ist somit die Gesamtwellenfunktion für den gesamten Definitionsbereich gegeben. Für Quadrate der Teilchenenergie, die wesentlich kleiner als das Potentialmaximum sind, wurde das Potential an den Stellen der klassischen Umkehrpunkte linear genähert, und in den umliegenden Bereichen konnte die Standard-WKB-Lösung verwendet werden, solange die Gültigkeitsvoraussetzung erfüllt ist. Durch erneutes Fordern von stetigem Übergang an den Überlappungsstellen ist damit die Gesamtwellenfunktion überall gegeben.

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] Resag, J.: *Die Entdeckung des Unteilbaren: Quanten, Quarks und der LHC*. Spektrum, 2010
- [2] Müller, A.: *Schwarze Löcher: Die dunklen Fallen der Raumzeit*. Spektrum, 2010
- [3] Wipf, A.: *Quantum Fields near Black Holes*. 1998 <http://arxiv.org/abs/hep-th/9801025v1>
- [4] Flügge, S.: *Lehrbuch der theoretischen Physik: Band IV Quantentheorie I*. Springer 1964
- [5] Schlattmann, R.: *Die Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit*. Bachelorarbeit, Freie Universität Berlin, 2010
- [6] Wachter, A.: *Relativistische Quantenmechanik*. Springer, 2005
- [7] Greiner, W.: *Theoretische Physik: Band 6 Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen*. 2. Auflage, Harri Deutsch, 1987
- [8] Wipf, A.: *Quantenmechanik I*. Vorlesungsskript, FSU Jena, WS 2005/2006
- [9] Wipf, A.: *Quantenmechanik II*. Vorlesungsskript, FSU Jena, SS 2006
- [10] Chandrasekhar, S.: *The Mathematical Theory Of Black Holes*. Oxford Clarendon Press, 2006
- [11] Wipf, A.: *Selected Topics of Quantum Field Theory*. FSU Jena, 1997
- [12] Rebhan, E.: *Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie*. Springer Verlag, 2010
- [13] Brill, D. ; Wheeler, J. A.: *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields*. In: Rev. Mod. Phys. 29 (1957), S. 465-479
- [14] Hermann, A.: *Statische kugelsymmetrische Lösungen der Einstein-Dirac-Gleichungen mit Äquator*. Diplomarbeit, Universität Regensburg, 2007
- [15] Dirac, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. 4. Auflage, Oxford University Press, 1958
- [16] Arminjon, M. ; Reifler, F.: *Basic quantum mechanics for three Dirac equations in a curved spacetime*. In: Braz. J. Phys. vol.40 (2010), Nr. 2, S. 242-255
<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332010000200020>
- [17] Cooper, F. ; Khare, A. ; Sukhatme, U.: *Supersymmetry and Quantum Mechanics*. In: Phys. Rept. 251 (1995), S. 267-385 <http://arxiv.org/abs/hep-th/9405029>
- [18] Cho, H. T. ; Lin, Y.-C.: *WKB Analysis of the Scattering of Massive Dirac Fields in Schwarzschild Black Hole Spacetimes*. In: Class. Quant. Grav. 22 (2005), S. 775-790
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0411090v1>
- [19] Mukhopadhyay, B. ; Chakrabarti, S.: *Semi-analytical solution of Dirac equation in Schwarzschild geometry*. In: Class. Quantum Grav. 16 (1999), Nr. 10, 3165
<http://iopscience.iop.org/0264-9381/16/10/309/>
- [20] Berry, M. ; Mount, K.: *Semiclassical approximations in wave mechanics*. In: Rep. Prog. Phys. 35 (1972), S. 315-398 <http://iopscience.iop.org/0034-4885/35/1/306/>
- [21] Boyce, W. ; DiPrima, R.: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 8. Auflage, 2004
- [22] Abramowitz, M. ; Stegun, I.: *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1972
- [23] Vronsky, M.A. ; Gorbatenko, M.V. ; Kolesnikov, N.S. ; Neznamov, V.P. ; Popov, E.Yu. ; Safronov, I.I.: *Stationary Bound States of Dirac Particles in the Schwarzschild Gravitational Field*. In: 1301.7595 (2013) <http://arxiv.org/abs/1301.7595>
- [24] Schrödinger, E.: *Diracsches Elektron im Schwerfeld I*. In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse (1932), S. 105-128
- [25] Moss, I.: *Quantum Theory, Black Holes and Inflation*. John Wiley and Sons Ltd, 1996
- [26] Frolov, V. ; Zelnikov, A.: *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford University Press, 2011

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet sowie Zitate und gedankliche Übernahmen kenntlich gemacht habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 20. September 2013

Andreas Schoepe