



seit 1558

Friedrich-Schiller Universität Jena

Exakte Flussgleichungen im
dreidimensionalen Wess-Zumino-Modell

Diplomarbeit eingereicht am
Theoretisch-Physikalisches Institut
der Physikalisch-Astronomischen Fakultät

TOBIAS KIENZLER
geboren am 27.07.1984 in Villingen-Schwenningen

1. April 2010

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf (Universität Jena)
2. Gutachter: Prof. Dr. habil. Jan Pawlowski (Universität Heidelberg)

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Quantenfeldtheorien und die Funktionale Renormierungsgruppe	5
2.1	Pfadintegrale	5
2.1.1	Pfadintegralformalismus der Quantenmechanik	5
2.1.2	Euklidische Raumzeit	7
2.2	Bosonen	8
2.3	Fermionen	9
2.3.1	Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	9
2.3.2	Grassmann-Zahlen	10
2.3.3	Differentiation nach Grassmann-Variablen	10
2.3.4	Integration von Grassmann-Variablen	10
2.3.5	Dirac-Spinoren	11
2.3.6	Lagrangedichte eines Fermions	12
2.3.7	Ladungskonjugation	12
2.4	Zustandssumme und Schwinger-Funktional	13
2.5	Effektive Wirkung	14
3	Die funktionale Renormierungsgruppe	15
3.1	Die Wetterich-Gleichung	15
3.2	Störungstheorie	17
3.3	Die Ableitungsentwicklung	17
3.3.1	Local Potential Approximation	18
3.3.2	Next to leading order	18
3.3.3	Regulatorwahl in der Ableitungsentwicklung	18
3.4	Fixpunkte	19
4	Supersymmetrie	21
4.1	Kurzer Überblick über die Teilchenphysik	21
4.2	Das Coleman-Mandula-Theorem	22
4.3	Supersymmetrie	23
4.4	Der Superraumformalismus	24
4.4.1	Der Superraum	24
4.4.2	Superfunktionen und Super-Lagrangedichte	25
4.4.3	SUSY-Transformation und Superladungen	25
4.4.4	Super-kovariante Ableitung und chirales Superfeld	27

4.4.5	Supersymmetrische Lagrangedichte	28
4.4.6	Supersymmetrische Flussgleichung	28
4.5	Das Wess-Zumino-Modell	28
4.5.1	Das Wess-Zumino-Modell in vier Dimensionen	28
4.5.2	Das Wess-Zumino-Modell in drei Dimensionen	30
5	Susy-QM	31
5.1	Flussgleichung	31
5.2	Fixpunktanalyse	38
6	Das Wess-Zumino-Modell in 3D	45
6.1	Dimensionsreduktion des Wess-Zumino-Modells	45
6.2	Flussgleichung	48
6.3	1-loop-Störungsrechnung	52
6.4	Analytische Lösung	52
6.5	Masselose Theorie	53
6.6	Ergebnisse	54
7	Zusammenfassung und Ausblick	59
7.1	SUSY-QM	59
7.2	Wess-Zumino-Modell	59
7.3	Ausblick	60
A	Konventionen	61
B	Ausführlichere Rechnungen	63
B.1	Herleitung der Wetterich-Gleichung (3.1)	63
B.2	Nachweis der Supersymmetrie im 3D-Wess-Zumino-Modell	65
B.3	Fouriertransformationen	66
C	Gruppentheorie	69
C.1	Lie-Gruppen	69
C.2	Darstellungen	70
C.3	Generatoren, Lie-Algebren	71
D	Die Poincaré-Gruppe	73
D.1	Die Poincaré-Algebra	74
D.2	Irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe	75
D.3	Irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe	76

Wissen ist Nacht.
Prof. Dr. Abdul Nachtigaller

1 Einleitung

Symmetrien in der Natur begründen unser Verständnis von Ästhetik: So bewundern wir z.B. die Vollkommenheit des spiegelsymmetrischen Universalmenschen daVincis und empfinden punktsymmetrische Eisblumen an einer Fensterscheibe als schön.

Dieser Begriff der Symmetrie im Alltag wird in der Physik verallgemeinert und dient dann zur Beschreibung jeder (mathematischen) Transformation eines Systems, die keine wahrnehmbaren oder messbaren Veränderungen bewirkt. Eine dementsprechend entscheidende Rolle spielen Symmetrien auch in der Formulierung moderner physikalischer Theorien wie z.B. dem Standardmodell der Teilchenphysik. Symmetrien können kontinuierlich oder diskret sein. Eine kontinuierliche Symmetrie wird durch reelle Parameter beschrieben, Beispiele hierfür sind die Rotations- und die Translationssymmetrie. Im Gegensatz hierzu besitzen diskrete Symmetrien abzählbare Parameter, so z.B. die Raumspiegelung oder Kristallsymmetrien. Auch die CPT-Invarianz und die CP-Verletzung gehören in die Kategorie diskreter Symmetrien. Im Folgenden geht es jedoch vorrangig um kontinuierliche Symmetrien.

Einen herausragenden Beitrag für die Bedeutung der Symmetrie lieferte die Mathematikerin AMALIE „EMMY“ NOETHER mit dem nach ihr benannten Theorem [1]. Es besagt, dass es zu jeder kontinuierlichen Symmetrie in einem System genau eine Erhaltungsgröße gibt und umgekehrt. Beispiele hierfür sind die Erhaltung des Gesamtimpulses als Folge der Translationsinvarianz, die Erhaltung der Energie durch Zeitinvarianz und die Erhaltung des Spins durch Poincaré-Invarianz.

Von zunächst meist *globalen* Symmetrien, deren Parameter unabhängig von den Koordinaten sind, wird oft übergegangen zu *lokalen* Symmetrien mit koordinatenabhängigen Parametern. In diesem Fall treten in dynamischen Theorien durch Ableitungen der Parameter nach den Koordinaten zusätzliche Terme auf, welche durch das Einführen von *Eichfeldern* kompensiert werden. Diese Eichfelder können als Teilchen betrachtet werden, die in Eichtheorien neue Wechselwirkungen vermitteln. Das experimentell am genauesten bestätigte Beispiel einer Eichtheorie ist die durch die Symmetriegruppe $U(1)$ formulierte elektromagnetische Wechselwirkung durch Photonenaustausch in der Quantenelektrodynamik (QED) [2]. Hierbei beschreibt die $U(1)$ die Menge aller komplexen Phasentransformationen.

Auch das Prinzip der *spontanen Symmetriebrechung*, durch die der energetische Grundzustand des Systems im Gegensatz zum ungebrochenen Fall nicht mehr eindeutig ist, hat eine große Bedeutung: So kann z.B. im Standardmodell erst durch die als Higgs-Mechanismus bezeichnete spontanen Eichsymmetriebrechung die kurze Reichweite der Kernkräfte im Vergleich zum langreichweitigen Elektromagnetismus erklärt werden.

1 Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik widerspricht bis heute keinem einzigen Experiment und eignet sich daher hervorragend zur Beschreibung der Natur und ihrer Phänomene. Es lässt aber auch einige Fragen offen, z.B. warum es gerade drei Teilchengenerationen gibt, wie sich das Standardmodell mit der Allgemeinen Relativitätstheorie vereinigen lässt oder auch das Hierarchieproblem.

Für die Beantwortung vieler dieser Fragen gelten String-Theorien als ein vielversprechender Ansatz. Jedoch sind diese Theorien sehr komplex und erfordern die Bestimmung einer großen Menge von Parametern. Es ist aber wünschenswert, die Natur durch eine minimale Anzahl von Parametern bereits vollständig beschreiben zu können, was zu Kritik an den String-Theorien führt. Argumentiert wird, dass eine String-Theorie zwar durch geeignete Parameterwahl durchaus die Welt beschreiben kann, jedoch keine Erklärung für genau diese Parameterwahl liefert und schwer zu falsifizieren ist.

Die *Supersymmetrie* (SUSY), eine wichtige Komponente aller String-Theorien, findet auch in der Quantenmechanik und in Quantenfeldtheorien (QFT) Anwendung. Sie beschreibt die Invarianz einer solchen Theorie gegenüber Veränderungen des Spins, genauer dem Austausch der fermionischen Teilchen durch supersymmetrische Partnerbosonen und umgekehrt. Die ungebrochene SUSY, in der es genau einen energetischen Grundzustand gibt, beschreibt diese Partnerteilchen durch identische Massen. Da solche Partnerteilchen bisher aber experimentell nicht nachgewiesen wurden, muss sich die Masse des Partners von der des Teilchens unterscheiden. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die SUSY spontan gebrochen ist. Neben dem Higgs-Teilchen werden am Large Hadron Collider (LHC) am Cern in Genf auch SUSY-Partner gesucht. Doch bereits ohne experimentelle Untermauerung bietet die SUSY die Möglichkeit, einige der Probleme des Standardmodells zu lösen, z.B. mit Hilfe der Supergravitation. Außerdem können supersymmetrische Modelle möglicherweise die dunkle Energie erklären kann, da diese stets eine endliche Grundzustandsenergie besitzen.

Die einfachste SUSY-QFT in vier Dimensionen ($3 + 1$) wird durch das Wess-Zumino-Modell [3] beschrieben, welches zwei elektrisch neutrale Spin-0 Bosonen mit einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Majorana-Fermion verbindet. Ein Majorana-Fermion beschreibt hierbei ein elektrisch neutrales Teilchen, welches auch sein eigenes Antiteilchen ist.

Die meisten realistischen QFTs sind analytisch nicht exakt lösbar. Die störungstheoretische Behandlung ist zwar dank der Feynman-Diagramme recht übersichtlich, aber nur bei geringer Wechselwirkung gültig. Ein weiteres Problem ergibt sich aus Schleifendiagrammen, die teilweise divergierende Beiträge liefern. Da diese Beiträge aber Konstanten sind, können sie im Rahmen der Renormierungstheorie oft kompensiert werden. Stattdessen kann aber auch ein Fließen der klassischen Wirkung hin zur effektiven Wirkung, welche die Lösung einer QFT vollständig beschreibt, berechnet werden. Hierbei werden nach und nach skalenabhängige Quantenkorrekturen hinzuintegriert. Mathematisch wird dieser Fluss durch die Wetterich-Gleichung (FRG-Gleichung, functional renormalization group) beschrieben [4, 5], die zunächst eine exakte, partielle Funktionaldifferentialgleichung darstellt. Auch diese Flussgleichung ist im Allgemeinen nicht exakt lösbar, ermöglicht jedoch im Gegensatz zur Störungstheorie auch Näherungen, welche für starke

Wechselwirkungen, wie in der Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben, gültig sind.

Viele Näherungsverfahren brechen die SUSY. Da die Wetterich-Gleichung durch geeignete Regulatoren Symmetrien erhalten kann, stellt sie einen vielversprechenden Ansatz zur Lösung supersymmetrischer Theorien dar.

In dieser Arbeit soll daher die Anwendbarkeit dieser Flussgleichungen auf Supersymmetrische Modelle untersucht werden.

Untersuchungen der ungebrochenen SUSY-Quantenmechanik (SUSY-QM) [6] und des auf zwei Dimensionen reduzierten Wess-Zumino-Modells [7] bzw. dessen zweidimensionale Verallgemeinerung [8] waren hierbei bereits erfolgreich.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt:

- In Kapitel 2 werden Grundlagen der QFT wiederholt und in Kapitel 3 in die FRG eingeführt
- Kapitel 4 beschreibt die Supersymmetrie, wobei in Kapitel 5 die FRG auf die gebrochene SUSY-QM angewandt wird
- In Kapitel 6 wird mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen das auf drei Dimensionen reduzierte Wess-Zumino-Modell untersucht

1 Einleitung

2 Quantenfeldtheorien und die Funktionale Renormierungsgruppe

2.1 Pfadintegrale

Diese Zusammenfassung dient lediglich des Überblicks, für eine detaillierte Einführung wird auf entsprechende Lehrbücher wie [2, 9, 10] verwiesen. Es werden stets natürliche Einheiten (siehe Konventionen im Anhang A) verwendet, d. h. $\hbar = 1, c = 1$. Kenntnisse der in Anhang C zusammengefassten Gruppentheorie, insbesondere in Bezug auf die in Anhang D vertiefte Poincaré-Gruppe, werden vorausgesetzt.

2.1.1 Pfadintegralformalismus der Quantenmechanik

In natürlichen Einheiten lautet die Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustandvektors $|\Psi(t)\rangle$ in Abhängigkeit vom Hamilton-Operator \hat{H} . Dabei wird die *kanonische Quantisierung* genutzt, d. h. die klassischen Größen wie der Ort \vec{x} und die Hamiltonfunktion $H(\vec{x}, \vec{p})$ werden durch lineare Operatoren ersetzt. Die Schrödingergleichung setzt voraus, dass die klassische Hamiltonfunktion $H(\vec{x}, \vec{p})$ die Gesamtenergie des Systems beschreibt, und insbesondere die Existenz der Hamiltonfunktion selbst. Da aber z. B. in relativistisch invarianten Theorien durch das Aufstellen der Hamiltonfunktion explizit eine Zeitrichtung ausgezeichnet wird, ist die Schrödingergleichung für eine manifest invariante Formulierung ungeeignet.

Ein Formalismus, der dieses Problem nicht aufweist, da er zur Quantisierung die Lagrange-Funktion L verwendet, ist der Pfadintegralformalismus nach FEYNMAN [11] (siehe auch [12, 13, 14, 15, 16]). Dieser soll nun frei nach [17] aus der Schrödingergleichung eines einzelnen Teilchens hergeleitet und verallgemeinert werden:

Da $|\Psi(t)\rangle$ auch durch eine beliebige vollständige Basis^(2.1) von Zuständen $|\nu\rangle$ als

$$|\Psi(t)\rangle = \int d\nu \langle \nu | \Psi(t) \rangle |\nu\rangle$$

^(2.1) D.h. $\mathbb{1} = \int d\nu |\nu\rangle \langle \nu|$, es wird von einem kontinuierlichen Spektrum für $|\nu\rangle$ ausgegangen, ansonsten ist $\int d\nu$ um eine Summe über diskrete Anteile zu erweitern.

2 Quantenfeldtheorien und die Funktionale Renormierungsgruppe

dargestellt werden kann, genügt für die Beschreibung eines Systems die Berechnung der Übergangsamplituden $\langle \Psi(t) | \nu \rangle = (\langle \nu | \Psi(t) \rangle)^*$. Mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= |\Psi(0)\rangle + t\partial_\tau |\Psi(\tau)\rangle \Big|_{\tau=0} + \frac{t^2}{2!} \partial_\tau^2 |\Psi(\tau)\rangle \Big|_{\tau=0} + \dots \\ &= \exp(t\partial_\tau) |\Psi(\tau)\rangle \Big|_{\tau=0} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \exp(-it\hat{H}(\tau)) |\Psi(\tau)\rangle \Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

und der Betrachtung des Spezialfalls $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ lautet die Übergangsamplitude mit $|\nu\rangle = |x'\rangle$

$$\langle x' | \Psi(t) \rangle = \int d^s x \underbrace{\langle x' | \exp(-i\hat{H}t) | x \rangle}_{=: K(t, x', x)} \langle x | \Psi(0) \rangle. \quad (2.2)$$

Dabei wurde eine weitere Eins $\mathbb{1} = \int d^s x |x\rangle \langle x|$ in der Ortsdarstellung eingefügt, wobei s die Anzahl der raumartigen Richtungen angibt. Der *unitäre Zeitentwicklungskern* $K(t, x', x)$ beinhaltet nun die gesamte Dynamik des Systems. Das Betragsquadrat^(2.2) der Übergangsamplitude gibt die Wahrscheinlichkeit an, das im Zustand $|\Psi(0)\rangle$ präparierte System nach einer Zeit t im Zustand $|x'\rangle$ vorzufinden. Nun wird t in N gleichgroße Stücke $\delta t := \frac{t}{N}$ unterteilt und (da im betrachteten Spezialfall H und t vertauschen) die Exponentialfunktion aufgeteilt:

$$K(t, x', x) = \left[\exp(-i\hat{H}\delta t) \right]^N. \quad (2.3)$$

Zwischen jede Exponentialfunktion kann wieder die Eins eingefügt werden, also

$$\begin{aligned} K(t, x', x) &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int d^s x_j \right) \langle x' | \exp(-i\hat{H}\delta t) | x_{N-1} \rangle \cdots \\ &\cdots \langle x_1 | \exp(-i\hat{H}\delta t) | x \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aus den Multiplikatoren kann der Potentialanteil herausgezogen werden,

$$\langle x_{j+1} | \exp(-i\hat{H}\delta t) | x_j \rangle = \exp(-iV(x_j)\delta t) \langle x_{j+1} | \exp\left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t\right) | x_j \rangle, \quad (2.5)$$

und das Skalarprodukt lässt sich durch Einschieben der Impuls-Eins $\mathbb{1} = \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} |p\rangle \langle p|$

^(2.2) Bei nicht normierten Zuständen muss noch durch die quadrierte Norm geteilt werden.

und Verwenden von $\langle p | x_j \rangle = \exp(ipx_j)$ berechnen zu:

$$\begin{aligned}
 \left\langle x_{j+1} \left| \exp\left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t\right) \right| x_j \right\rangle &= \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} \left\langle x_{j+1} \left| \exp\left(-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t\right) \right| p \right\rangle \langle p | x_j \rangle \\
 &= \int \frac{d^s p}{(2\pi)^s} \exp\left(-i\delta t \left[\frac{p^2}{2m} - p \frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t} \right]\right) \\
 &= \underbrace{\left(-i\frac{2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{s}{2}}}_{=: \mathcal{N}_N} \exp\left(i\delta t \frac{1}{2}m \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei wurde im Gauss-Integral über den Faktor i hinweggesehen, worauf in Abschnitt 2.1.2 nochmals eingegangen wird. Der Zeitentwicklungskern lautet mit $x_0 := x, x_N := x'$ somit

$$\begin{aligned}
 K(t, x', x) &= \left(\prod_{j=1}^{N-1} \int d^s x_j \right) \mathcal{N}_N^N \exp\left(i\delta t \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t}\right)^2 - V(x_j) \right]\right) \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{x(0)=x}^{x(t)=x'} \mathcal{D}x \exp(-iS[x]) \quad \langle x_0 | 0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei wurde genutzt, dass $\frac{x_{j+1} - x_j}{\delta t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ und $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) = L$. Durch das *Pfadintegral* $\int \mathcal{D}x$ ist die Übergangsamplitude $\langle \nu | \Psi(t) \rangle$ also gegeben als die Integration über alle möglichen Pfade $x(t)$, gewichtet durch einen von der klassischen Wirkung $S[x(t)]$ abhängigen Phasenfaktor.

2.1.2 Euklidische Raumzeit

Das in Gleichung (2.6) ausgeführte Gauss-Integral konvergiert tatsächlich nur, wenn $\Re(i\delta t) > 0$ ist, d. h. die Zeit t muss komplexwertig erweitert werden zu

$$t \rightarrow t - i\tau \text{ mit } \tau > 0.$$

Nun kann auch mit $\Re(t) = 0$, also $t \rightarrow -i\tau$ gerechnet werden. Dann wird τ als neue (imaginäre) Zeitkoordinate genutzt und am Schluss kann durch analytisches Fortsetzen wieder auf ein reelles t umgerechnet werden. Diese Prozedur wird als *Wick-Rotation* bezeichnet, sie ändert auch die Minkowski-Metrik $(+ - - -)$ um in $(- - - -)$, also bis auf ein globales Minus in die euklidische Metrik $(+ + + +)$. Die Wick-Rotation neutralisiert auch das i im Pfadintegral, welches übergeht in

$$\int \mathcal{D}x e^{-S[x]}.$$

Für dieses Pfadintegral ist auch das Konvergenzverhalten wohldefiniert, es wurde bereits vor FEYNMAN von WIENER zur Beschreibung der Brownschen Bewegung in der Statistischen Physik genutzt, daher hier auch die Bezeichnung *Wiener-Maß*.

Eine imaginäre Zeit τ scheint zunächst künstlich, doch geht durch die Wick-Rotation die Schrödingergleichung (2.1) eines freien Teilchens ($\hat{H} = -\frac{1}{2m}\Delta$ in der Ortsdarstellung) über in die *Diffusionsgleichung* der Thermodynamik. τ übernimmt hierbei die Rolle der inversen Temperatur, $\tau \hat{=} 1/(k_B T)$. Auch beim Pfadintegral ist diese Korrespondenz korrekt, es nimmt gerade die Form der thermodynamischen *Zustandssumme* Z an, wobei S dann als *Shannon-Entropie* identifiziert werden kann. Eine wichtige Konsequenz dieser Korrespondenz ist, dass τ für endliche Temperaturen nicht verschwinden kann, womit das Integral in (2.6) stets wohldefiniert bleibt, sobald die Temperatur berücksichtigt wird.

2.2 Bosonen

Quantentheorien, die die spezielle Relativitätstheorie berücksichtigen, müssen zwischen Bosonen und Fermionen unterscheiden, daher werden deren Charakteristika hier kurz aufgeführt:

Teilchen mit Spin 0 werden durch Lorentz-Skalare der Darstellung $(0,0)$ beschrieben (siehe Anhang D.2), Lorentz-invariante Ausdrücke ergeben sich damit durch das Produkt mit anderen Lorentz-Skalaren. Die freie Theorie eines solchen *Skalarteilchens* wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + m^2 |\phi|^2] \quad (2.8)$$

beschrieben, wobei ϕ^* das Feld des Antiteilchens beschreibt. Jeder reelle Freiheitsgrad entspricht einem Spin-0-Teilchen, die zwei reellen Freiheitsgrade von Teilchen und Antiteilchen lassen sich damit vereinfachend zu einem komplexen Freiheitsgrad zusammenfassen.

Für $\phi^* \neq \phi$ besitzt (2.8) eine globale $U(1)$ -Symmetrie, d. h. \mathcal{L} ist gegenüber der Transformation $\phi \rightarrow e^{iq\varphi} \phi$ invariant. Da die $U(1)$ in Eichtheorien die elektromagnetische Wechselwirkung beschreibt, bedeutet dies, dass das Skalarteilchen ϕ eine elektrische Ladung q tragen kann. Insbesondere trägt ϕ^* damit die Ladung $-q$, was gerade der Definition eines Antiteilchens entspricht. Für $\phi^* = \phi$ muss $q = 0$ sein, d. h. ein reelles Skalarteilchen, welches sein eigenes Antiteilchen ist, trägt keine elektrische Ladung. Die Umkehrung, elektrisch neutrale Elementarteilchen seien *immer* ihre eigenen Antiteilchen, trifft nicht zu: So setzt sich z. B. das *Kaon* $K^0 = d\bar{s}$ aus einem Down-Quark d und einem Anti-Strange-Quark \bar{s} zusammen, sein Antiteilchen ist damit $\bar{K}^0 = \bar{d}s \neq K^0$.

Als Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Prinzip stationärer Wirkung die *Klein-Gordon-Gleichung*^(2.3)

$$0 = \frac{\delta}{\delta \phi^*} \int d^d x \mathcal{L} = (\square + m^2)\phi. \quad (2.9)$$

^(2.3) Dabei ist $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ der *d'Alembert-Operator*

Das Standardmodell selbst beinhaltet keine Skalarteilchen als Elementarteilchen, alle bisher experimentell beobachteten Spin-0-Teilchen können dort als gebundene Zustände von Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen mit entgegengesetztem Spin beschrieben werden. Die einzige Ausnahme stellt das als Elementarskalar beschriebene Higgs-Boson dar, dessen experimenteller Nachweis am LHC derzeit noch aussteht. Theorien wie *Technicolor*, die über das Standardmodell hinausgehen sollen, führen andere Mechanismen ein, um diese Ausnahme zu unterbinden und sämtliche Skalarbosonen als gebundene Zustände zu beschreiben.

Bosonen mit Spin 1 werden durch Vektoren aus der Darstellung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ beschrieben und daher meist *Vektorbosonen* genannt. Im Standardmodell sind sie für die Vermittlung von Wechselwirkungen verantwortlich und werden durch *Eichtheorien* beschrieben. Elementarteilchen mit höherem Spin wurden bisher nicht beobachtet.

2.3 Fermionen

2.3.1 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ werden gemäß Gleichung (D.10) durch die beiden zweidimensionalen Fundamentaldarstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$ dargestellt. Ein zweikomponentiges Element $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$ wird als *linkshändiger Weyl-Spinor* bezeichnet, $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$ entsprechend als *rechtshändiger Weyl-Spinor*. In diesen Darstellungen sind die beiden Casimir-Operatoren $T_+^i = \frac{1}{2}\sigma_i$ und $T_- = 0$ bzw. umgekehrt (siehe Anhang D.2). Dabei sind die σ_i die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Das Transformationsverhalten von Weyl-Spinoren ist damit gegeben durch

$$\psi_{L,R} \rightarrow A_{L,R}\psi_{L,R} \quad (2.11)$$

$$\text{mit } A_L := U(\vec{\varphi}) \exp[\frac{1}{2}\vec{\nu}\vec{\sigma}] = (A_R^\dagger)^{-1}, \quad (2.12)$$

$$U(\vec{\varphi}) := \exp[-\frac{i}{2}\vec{\varphi}\sigma] \in SU(2), \quad (2.13)$$

$$\vec{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (2.14)$$

Es ergibt sich dann auch, dass $\sigma_2 A_L^* \sigma_2 = A_R$ ist, womit $\sigma_2 \psi_L^*$ wie ein rechtshändiger Spinor transformiert. Entsprechend ist die Zuordnung

$$\psi_R = -i\sigma_2 \psi_L^*, \quad \psi_L = i\sigma_2 \psi_R^* \quad (2.15)$$

zulässig. Sie besagt, dass $i\sigma_2$ die Rolle einer *Spinormetrik* zukommt. Lorentz-invariante Ausdrücke sind nun die Skalare $\phi_R^\dagger \psi_L$ und $\phi_L^\dagger \psi_R$ für beliebige Weyl-Spinoren ϕ, ψ . Insbesondere für $\phi = \psi =: (\psi_1, \psi_2)^T$ ergibt dies mit (2.15)

$$\psi_R^\dagger \psi_L = \psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1. \quad (2.16)$$

Wären die Komponenten $\psi_{1,2}$ des Weyl-Spinors gewöhnliche komplexe Zahlen, würde dieser Ausdruck einfach verschwinden und die Beschreibung eines damit Massenterms unmöglich. Daher müssen die ψ_i *antikommütierende Grassmann-Zahlen* sein.

2.3.2 Grassmann-Zahlen

Grassmann-Zahlen werden meist durch den Buchstaben θ dargestellt und erfüllen die *Grassmann-Algebra*

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0, \quad (2.17)$$

$$\text{wobei } \{a, b\} := ab + ba \quad (2.18)$$

den *Antikommutator* bezeichnet. Insbesondere impliziert (2.17) das Verschwinden von θ^2 , nicht aber das von $\theta^*\theta$ für komplexwertige Grassmannzahlen. Letztendlich folgt aus der Grassmann-Wertigkeit der Spinorkomponenten auch wieder das Pauli-Prinzip, also dass sich zwei oder mehr Fermionen niemals in einem identischen Zustand befinden können.

2.3.3 Differentiation nach Grassmann-Variablen

Im Gegensatz zur Ortsableitung ∂_μ , welche die Kommutatorrelation

$$[\partial_\mu, x^\nu] = \delta_\mu^\nu$$

erfüllt, gilt für die Ableitung $\partial_a := \partial_{\theta^a}$ nach einer Grassmann-Variablen eine Antikommutatorrelation

$$\{\vec{\partial}_a, \theta^b\} := \delta_a^b =: \{\theta^b, \overleftarrow{\partial}_a\}. \quad (2.19)$$

Daher muss zwischen der *Linksableitung* $\vec{\partial}_a$ und der *Rechtsableitung* $\overleftarrow{\partial}_a$ unterschieden werden.

2.3.4 Integration von Grassmann-Variablen

Für Grassmann-Variablen stimmen Integration und Differentiation überein,^(2.4) und auch bei der Integration ist darauf zu achten, von welcher Seite integriert wird, da das Differentialelement $d\theta^a$ mit den Grassmannzahlen antivertauscht, also

$$\int d\theta^a \theta^b := \vec{\partial}_a \theta^b = \delta_a^b =: - \int \theta^b d\theta^a. \quad (2.20)$$

^(2.4) Details zum *Berezin-Integral* $\int d\theta$ sind z.B. in [17] zu finden.

2.3.5 Dirac-Spinoren

Wie in Abschnitt D.2 erwähnt, transformieren linkshändige Spinoren unter der Paritäts-
transformation in rechtshändige Spinoren und umgekehrt. Um eine Paritäts-invariante
Theorie zu beschreiben, müssen daher Elemente aus dem Raum $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ genutzt
werden, die

$$\text{Dirac-Spinoren } \Psi := \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

also *Bispinoren*, bestehend aus zwei unabhängigen Weyl-Spinoren. Diese spezielle Dar-
stellung von Ψ wird *Weyl-Darstellung* oder *chirale Darstellung* genannt. Der sich aus dem
Spezialfall $\phi_{L,R} = \psi_{L,R}$ ergebende Spinor heißt *Majorana-Spinor*. Mögliche Lorentzskala-
re sind

$$\bar{\Phi}\Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Phi}\not{\partial}\Psi. \quad (2.22)$$

Dabei lautet die *Dirac-Konjugation* eines Spinors $\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \mathcal{A}$, wobei die unitäre Matrix
 \mathcal{A} proportional zum Produkt aller zu zeitartigen Dimensionen gehörenden Γ -Matrizen
ist, in $(3 + 1)$ Dimensionen also $\mathcal{A} = \Gamma^0$. Der *Feynman-Slash* kürzt häufig auftretende
Ausdrücke der Form $\Gamma^\mu p_\mu =: \not{p}$ ab, wobei die Γ -Matrizen 4×4 -Matrizen sind, welche die

$$\text{Clifford-Algebra} \quad \{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.23)$$

erfüllen. Eine oft nützliche Formel ist

$$\not{p}^2 = p^2. \quad (2.24)$$

Weitere Eigenschaften der Γ -Matrizen in beliebigen Raumzeitdimensionen sind z. B. in
[18] zu finden. In geradzahligen Dimensionen wird darüber hinaus die Matrix

$$\Gamma_* := \propto \Gamma^0 \cdots \Gamma^d \quad (2.25)$$

definiert. Durch Γ_* bilden die Projektionsoperatoren

$$P_{L,R} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} \mp \Gamma_*) \quad (2.26)$$

Spinoren auf links- bzw. rechtshändige Anteile ab. Bei der Definition von Γ_* wird als
Proportionalitätsfaktor diejenige Potenz von i gewählt, durch die ein Dirac-Spinor in der
Weyl-Darstellung gerade die Darstellung (2.21) besitzt. In $(3+1)$ Dimensionen lauten die
 Γ -Matrizen der Weyl-Darstellung

$$\Gamma^0 = \sigma_1 \otimes \mathbb{1}_2 = \mathcal{A}, \quad \Gamma^j = i\sigma_2 \otimes \sigma_j, \quad \Gamma_* = -\sigma_3 \otimes \mathbb{1}_2, \quad (2.27)$$

d. h. $P_{L,R}$ bildet gerade auf die erste oder zweite Bispinorkomponente ab. Weitere häufig
genutzte Darstellungen sind die *Dirac-Darstellung*, in der Γ^0 und Γ_* vertauscht werden,
sowie *Majorana-Darstellungen*, in denen alle Γ imaginär sind und Majorana-Spinoren
(Grassmann-)reell. Lorentz-invariante Ausdrücke sind immer darstellungsunabhängig, da
die Γ -Matrizen der verschiedenen Darstellungen durch unitäre Ähnlichkeitstransformatio-
nen $\Gamma \rightarrow U\Gamma U^\dagger$ miteinander verbunden sind, die durch entsprechende Transformationen
 $\Psi \rightarrow U\Psi$ der Spinoren kompensiert werden.

2.3.6 Lagrangedichte eines Fermions

Die Lagrangedichte eines freien Fermions lautet

$$\mathcal{L} = -i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi + m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.28)$$

und weist eine $U(1)$ -Symmetrie auf, d. h. auch Fermionen können eine elektrische Ladung tragen. Wie sich in der Majorana-Darstellung leicht überprüfen lässt, muss diese bei Majorana-Fermionen verschwinden, d. h. im Gegensatz zu Dirac-Spinoren beschreiben Majorana-Fermionen elektrisch neutrale Teilchen. Dennoch werden im Standardmodell auch elektrisch neutrale Teilchen wie das Neutrino durch Dirac-Spinoren dargestellt, da dort Neutrinos als rein linkshändige Teilchen beschrieben werden, was mit Majorana-Fermionen, wie in Abschnitt 2.3.7 erläutert, nicht möglich ist. In euklidischer Raumzeit verschwindet der Vorfaktor $-i$ in (2.28), wie auch in der Dimensionsreduktion in Abschnitt (6.1) zu sehen ist.

Als Bewegungsgleichung folgt aus (2.28) die *Dirac-Gleichung*

$$0 = \frac{\delta}{\delta\bar{\Psi}} \int d^4x \mathcal{L} = (-i\not{\partial} + m)\Psi. \quad (2.29)$$

Durch Multiplikation mit $(i\not{\partial} + m)$ von links wird aus (2.29) mit (2.24) Gleichung (2.9), d. h. Fermionen erfüllen automatisch auch die Klein-Gordon-Gleichung, wobei die Umkehrung i. A. nicht gilt. In der Weyl-Darstellung wird deutlich, dass der links- und rechtshändige Anteil im masselosen Fall voneinander unabhängige Bewegungsgleichungen erfüllen.

Durch direkte Produkte ließen sich auch Fermionen mit Spin $\frac{3}{2}$ und höher beschreiben. Solche Teilchen wurden bisher nicht experimentell beobachtet und sollen hier auch nicht weiter betrachtet werden.

2.3.7 Ladungskonjugation

Aus der Majorana-Darstellung ist ersichtlich, dass ein elektrisch entgegengesetzt geladenes Teilchen beschrieben wird durch den komplex konjugierten Spinor

$$\Psi_C = \begin{cases} \Psi^* = \overbrace{\mathcal{A}_M^*}^{=: \mathcal{C}_M} (\bar{\Psi})^T & \text{(Majorana-Darstellung)} \\ \mathcal{C}(\bar{\Psi})^T & \text{(allgemein)} \end{cases} \quad (2.30)$$

Der Index M soll die Abhängigkeit von der Majorana-Darstellung betonen. Da die Spinoren beim Übergang in eine andere Darstellung entsprechend transformieren und die *Ladungskonjugation* durch invariante Ausdrücke formuliert werden sollte, wird für den allgemeinen Fall die hermitesche Matrix \mathcal{C} eingeführt, sie erfüllt die Eigenschaften

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger = -\varepsilon\mathcal{C}^T, \quad (2.31)$$

$$\Gamma_\mu^T = -\eta\mathcal{C}^{-1}\Gamma_\mu\mathcal{C} \quad (2.32)$$

$$\text{mit } 1 = -\varepsilon\eta^t(-1)^{t(t+1)/2}. \quad (2.33)$$

(siehe [18] Gleichung (3.50)) Gleichung (2.33) ist hierbei eine Bedingung für die Existenz von Majorana-Spinoren. Im Minkowski-Raum ist diese Bedingung erfüllt und es gilt $\varepsilon = \eta = 1$. Majorana-Fermionen erfüllen damit darstellungsunabhängig die Bedingung $\Psi_C = \Psi$, was in der Weyl-Darstellung gleichbedeutend mit (2.15) ist. Bei Majorana-Fermionen besteht also zwingend ein Zusammenhang zwischen links- und rechtshändigem Anteil, womit ein *chiraler Spinor* (rein links- oder rechtshändig, $P_{L/R}\Psi = \Psi$) nicht gleichzeitig ein Majorana-Fermion sein kann. Aus diesem Grund beschreibt das Standardmodell auch Neutrinos durch Dirac-Spinoren. Wie bei der Dimensionsreduktion des Wess-Zumino-Modells in Abschnitt 6.1 noch gezeigt wird, kehrt die Ladungskonjugation in (3+0) Dimensionen neben der elektrischen Ladung auch die Chiralität eines 3D-Dirac-Spinors um.

2.4 Zustandssumme und Schwinger-Funktional

Im Folgenden wird immer in euklidischer Raumzeit gerechnet.

Zur Lösung einer Quantenfeldtheorie im Sinne von Wirkungsquerschnitten bei Streuprozessen genügt die Bestimmung der n -Punkt-Korrelationsfunktionen

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \exp\{-S[\varphi]\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\{-S[\varphi]\}},$$

die durch das erzeugende Funktional, die *Zustandssumme*

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\varphi \exp\{-S[\varphi] + J\varphi\} \quad \left(J\varphi := \int d^D x J(x)\varphi(x) \right), \quad (2.34)$$

zu

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (2.35)$$

berechnet werden können. Dabei stellt $J(x)$ einen Quellterm dar und S bezeichnet die euklidische Wirkung, die aus einer Wick-Rotation der Wirkung im Minkowski-Raum bestimmt werden kann. Das Pfadintegral $\int \mathcal{D}\varphi$ ist die Integration über alle möglichen Feldkonfigurationen von φ . In (2.34) wird auch die Analogie zur Zustandssumme Z der statistischen Physik deutlich. Das *Schwinger-Funktional* $W[J]$, welches die verbundenden Korrelationsfunktionen erzeugt,

$$W[J] := \ln Z[J], \quad (2.36)$$

kann genauso wie $Z[J]$ als Basis aller Berechnungen dienen. Es ist

$$\langle \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \rangle_c = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} W[J] \Big|_{J=0}, \quad (2.37)$$

insbesondere

$$\langle \varphi(x) \rangle_c = \langle \varphi(x) \rangle, \quad (2.38)$$

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle_c = \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle. \quad (2.39)$$

2.5 Effektive Wirkung

Ebenso kann auch die Legendre-Transformierte von $W[J]$,

$$\Gamma[\phi] := \sup_J (J\phi - W[J]), \quad (2.40)$$

für Berechnungen genutzt werden. Dabei bezeichnet \sup das Supremum, also die kleinste obere Schranke. ϕ ergibt sich aus der Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\delta}{\delta J} (J\phi - W[J]) \\ &= \phi - \underbrace{\frac{\delta}{\delta J} W[J]}_{=\langle\varphi\rangle_J} \Rightarrow \phi = \langle\varphi\rangle_J. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\langle\varphi\rangle_J \equiv \phi$ den Erwartungswert bei nicht verschwindender Quelle J , ϕ ist also ein makroskopisches Feld. Insbesondere gilt damit auch

$$J = \frac{\delta}{\delta\phi} \Gamma[\phi]. \quad (2.41)$$

Würde hier S anstelle von Γ stehen, entspräche dies der klassischen Bewegungsgleichung in Gegenwart einer Quelle J . Im Gegensatz zu S berücksichtigt Γ zusätzlich alle Quantenfeld-Korrekturen und wird daher *effektive Wirkung* genannt, Gleichung (2.41) ist also eine *Quantenbewegungsgleichung*.

Zusammengefasst lässt sich Γ durch S darstellen als

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -S[\phi + \varphi] + \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} \varphi \right\}, \quad (2.42)$$

also eine nichtlineare Funktionaldifferentialgleichung, deren exakte Lösung nur in seltenen Spezialfällen möglich ist.

Ein Lösungsansatz besteht nun in einer *Vertexentwicklung*

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \cdots d^d x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n), \quad (2.43)$$

welche in (2.42) eingesetzt durch Koeffizientenvergleich ein System unendlich vieler gekoppelter Integro-Differentialgleichungen liefert, die *Dyson-Schwinger-Gleichungen*. Durch Trunkierung können berechenbare Näherungen bestimmt werden, auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

3 Die funktionale Renormierungsgruppe

3.1 Die Wetterich-Gleichung

Einen anderen Lösungsansatz zur Bestimmung der effektiven Wirkung liefert die in Anhang B.1 hergeleitete *Wetterich-Gleichung* [19] (siehe auch [4, 5, 20])

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_k R_k \right]. \quad (3.1)$$

Sie verknüpft die klassische Wirkung $S \approx \Gamma_\Lambda$ bei einer UV-cut-off-Skala Λ mit der effektiven Wirkung $\Gamma = \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k$. Der von Λ nach 0 laufende Flussparameter k kann als die kleinste berücksichtigte physikalische Skala betrachtet werden, d. h. Γ_k berücksichtigt mit fallendem k in zunehmendem Maße Quanteneffekte. In (3.1) ist $(\Gamma_k^{(2)})_{i,j} = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^i} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^j}$ die sich aus den zweiten Funktionalableitungen^(3.1) nach den Feldern ergebende Matrix mit Φ als die Sammlung aller auftretenden Felder. In der Ortsdarstellung lautet $\Gamma^{(2)}$ z. B.

$$(\Gamma_k^{(2)}(x, y))_{ij} = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^i(x)} \Gamma_k[\Phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^j(y)}.$$

$\text{STr } A$ bezeichnet die *Superspur* eines Operators, bei der die Spur des fermionischen Anteils von A von der des bosonischen Anteils subtrahiert wird^(3.2). Der *Regulator* R_k muss in der Impulsdarstellung diagonal sein und folgende Bedingungen erfüllen:

$$R_k(q) > 0 \quad \text{für } q^2 \ll k^2, \quad (3.2)$$

$$R_k(q) \xrightarrow{q^2/k^2 \rightarrow 0} 0, \quad (3.3)$$

$$R_k(q) \xrightarrow{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} \infty \quad (3.4)$$

^(3.1) Dabei bezeichnen $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi^i}$ und $\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi^j}$ die Links- und Rechtsableitung wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben, d. h. bei der Ableitung nach fermionischen Freiheitsgraden ist auf das Auftreten von Vorzeichen beim Antivertauschen von Ableitung und Grassmann-Variablen zu achten.

^(3.2) Z.B. ist für $\Phi = (\phi, \psi)$ mit bosonischem Feld ϕ und fermionischem ψ

$$\text{STr } \Gamma^{(2)} = \text{Tr} \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi} \Gamma \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi} \right) - \text{Tr} \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi} \Gamma \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi} \right),$$

wobei Tr in der Impulsdarstellung $\text{Tr } A = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{tr} \langle p | \hat{A} | p \rangle$ ist.

3 Die funktionale Renormierungsgruppe

Der Term $\partial_k R_k$ in (3.1) sorgt für eine UV-Regularisierung, der Term R_k für eine IR-Regularisierung. Wie bereits erwähnt, stellt Λ einen UV-cut-off dar, ab dem die Quantenbeiträge vernachlässigt werden können. Die genaue Trajektorie von Γ_Λ nach Γ_0 variiert je nach gewähltem Regulator, lediglich die Endpunkte sind festgelegt, was in Abbildung 3.1 veranschaulicht wird. Eine Interpretation von Γ_k im Bereich $k \in (0, \Lambda)$ ist daher als Näherung einer effektiven Theorie für Messungen auf einer Energieskala k zu verstehen.

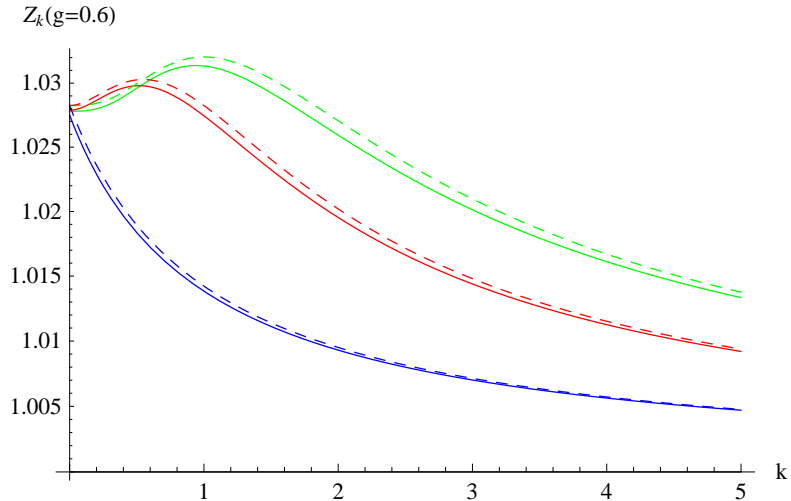


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Regulatorabhängigkeit der Wetterich-Gleichung (3.1). Z_k steht hierbei stellvertretend für einen Parameter der Theorie (s. Kapitel 6). Für $k = \Lambda \approx \infty$ beginnt der Fluss bei einem festen Wert (hier: 1), und sofern die Rechnung exakt oder hinreichend genau ist, enden alle Linien unabhängig von der Regulatorwahl (verschiedene Farben) in einem gemeinsamen Punkt bei $k = 0$.

Die Wetterich-Gleichung (3.1) besitzt die Struktur einer 1-loop-Struktur, dennoch ist sie exakt, d. h. sie hängt nicht von der klassischen Wirkung, sondern von der effektiven Wirkung ab. Jedoch ist die Gleichung im Allgemeinen nicht exakt lösbar. Neben der störungstheoretischen Behandlung ermöglicht die Wetterich-Gleichung andere Näherungen, die auch bei starker Kopplung gültig sind. Deren Ergebnisse sind mit numerischen Gittermethoden vergleichbar, können hier aber mit komplementärem Rechenaufwand gewonnen werden. D. h. oft können auf dem Gitter stark Rechenleistung beanspruchende Probleme durch die Wetterich-Gleichung vergleichsweise einfach gelöst werden, ebenso aber auch umgekehrt.

3.2 Störungstheorie

Wird in (3.1) auf der rechten Seite $\Gamma_k^{(2)}$ durch $S^{(2)}$ ersetzt, ist die Gleichung direkt integrierbar und liefert die 1-loop-Störungstheorie, welche so zu Vergleichszwecken herangezogen werden kann:

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k^{1\text{-loop}} &= \frac{1}{2} \text{STr} \left[\overbrace{\left(S^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_k R_k}^{=\partial_k \ln(S^{(2)} + R_k)} \right] \\ &\Rightarrow \Gamma^{1\text{-loop}} \stackrel{(3.2)-(3.4)}{=} S + \frac{1}{2} \text{STr} \ln S^{(2)} + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Ersetzung von $\Gamma_k^{(2)}$ durch die entsprechende n -loop-Wirkung liefert analog die $n+1$ -loop-Wirkung, so dass die Wetterich-Gleichung iterativ die gesamte Störungsrechnung reproduzieren kann. Auch die Vertexentwicklung (2.43) kann genutzt werden und führt zu den Dyson-Schwinger-Gleichungen ähnlichen, aber nicht identischen Gleichungen.

3.3 Die Ableitungsentwicklung

Für Γ_k kann auch eine Entwicklung in den Ableitungen durchgeführt werden, d. h.

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[V_k(\Phi) + \sum_j Z_{jk}^2(\Phi) T(D\Phi_j) + \mathcal{O}(D^2\Phi) \right], \quad (3.5)$$

wobei j über die Felder Φ_j der Theorie läuft^(3.3). Dabei bezeichnet $T(\Phi)$ den kinetischen Term

$$\begin{aligned} T(D\phi) &= \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 \quad \text{für ein bosonisches } \phi, \\ T(D\psi) &= \bar{\psi} \not{D} \psi \quad \text{für ein fermionisches } \psi \end{aligned}$$

mit kovarianter Ableitung D_μ , z.B. $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ in einer elektromagnetischen Theorie. Die Größe $Z_k(\Phi)$ mit $Z_\Lambda = 1$ wird als *Wellenfunktionsrenormierung* bezeichnet, $V_k(\Phi)$ für $k \rightarrow 0$ als *effektives Potential*. Näherungen sind nach Möglichkeit so zu wählen, dass Symmetrien des Systems erhalten bleiben. Dies ist nicht zwingend notwendig, stabilisiert den Fluss aber deutlich.

^(3.3) In der Literatur wird oft ein Faktor Z_k anstelle von Z_k^2 genutzt. Da dies bei der Reskalierung der Felder zum Auftreten von Wurzeln führt und die Supersymmetrie durch Z_k^2 einfacher beschrieben werden kann, wird hier der Übersichtlichkeit wegen von der Konvention abgewichen.

3.3.1 Local Potential Approximation

In nullter Ordnung wird in der Ableitungsentwicklung die Wellenfunktionsrenormierung konstant zu $\mathcal{Z}_k \equiv 1$ und Terme höherer Ordnung auf ihre klassischen Werte gesetzt, d. h.

$$\Gamma_k^{\text{LPA}} = \int d^d x \left[V_k(\Phi) + \sum_j T(D\Phi_j) \right]. \quad (3.6)$$

Diese Näherung wird *local potential approximation* (LPA) genannt. Die Flussgleichung (3.1) kann dann auf eine geschlossene partielle Differentialgleichung für das effektive Potential $V_k(\Phi)$ projiziert werden.

Das Potential kann als weitere Näherung auch in einer Taylorreihe

$$V_k = \sum_k |m_k \phi_k|^2 + \sum_l m_l \bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \mathcal{O}(\phi_k^4, (\bar{\psi}_l \psi_l)^2)$$

entwickelt werden, um durch Trunkierung ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten.

3.3.2 Next to leading order

Die nächsthöhere Ordnung, die *next to leading order* (NLO), berücksichtigt auch die Wellenfunktionsrenormierung \mathcal{Z}_k^2 . Diese bewirkt, um in Γ einen kanonischen kinetischen Term zu erhalten, eine Renormierung der Wellenfunktionen. Damit wird indirekt das effektive Potential bzw. Massen und Kopplungen beeinflusst:

Da der kinetische Term quadratisch in den Feldern ist, werden diese mit $1/\mathcal{Z}_k$ reskaliert. Für einen bosonischen Masseterm $m^2|\phi|^2$ bewirkt dies $m \rightarrow \mathcal{Z}_k m$, für einen fermionischen Massenterm $im\bar{\psi}\psi$ hingegen $m \rightarrow \mathcal{Z}_k^2 m$. Analog werden auch die anderen Kopplungskonstanten des Modells reskaliert.

3.3.3 Regulatorwahl in der Ableitungsentwicklung

Für den Regulator R_k , der die Wirkung um einen Zusatzterm

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \bar{\Phi} R_k \Phi \quad (3.7)$$

erweitert, kann ebenfalls eine Ableitungsentwicklung

$$R_k(D)\Phi = r_1(k, \mathcal{Z}_k) \mathcal{Z}_k^2 \Phi + r_2(k, \mathcal{Z}_k) \mathcal{Z}_k^2 T(D\Phi) + \mathcal{O}(D^2\Phi) \quad (3.8)$$

angesetzt werden. Aus der Herleitung der Wetterich-Gleichung in Anhang B.1 geht hervor, dass die r_i nicht von den Feldern abhängen dürfen, es spricht jedoch nichts gegen eine \mathcal{Z}_k -Abhängigkeit. R_k kann daher als extern vorgegebenes $\Gamma_k^{(2)}$ betrachtet werden. Insbesondere gewährleistet diese Wahl die manifeste Erhaltung aller vorhandenen Symmetrien.

3.4 Fixpunkte

Die Wahl des Regulators R_k hat (bei exakter Rechnung) keinen Einfluss auf den Endpunkt Γ_0 der Wetterich-Gleichung. Praktisch kann diese Wahl aber bei numerischer Behandlung über die Qualität des Ergebnisses entscheiden. Ein Kriterium für die numerische Stabilität ist hierbei gegeben durch die Fixpunkte der Flussgleichung. Dazu muss die Gleichung (3.1) zunächst in eine dimensionslose Form gebracht werden, d. h. die auftretenden Größen werden mit Potenzen von k reskaliert. Die in $t = \ln \frac{k}{\Lambda}$ konstanten Fixpunkte dieser skalenunabhängigen Flussgleichung erfüllen $\partial_t \tilde{\Gamma}^* = 0$. Nun wird eine kleine Störung $\delta\Gamma_t$ gegenüber Γ^* betrachtet, um eine Flussgleichung der Form

$$\partial_t \delta\Gamma_t = \alpha \delta\Gamma_t + \dots$$

zu erhalten. Da t von 0 nach $-\infty$ läuft, bedeutet ein *positiver* Realteil $\Re(\alpha) > 0$, dass es sich bei Γ_* um einen stabilen Fixpunkt handelt. Das Auftreten instabiler Fixpunkte ist ein Indikator für Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung, da hier eine exakte Feinabstimmung notwendig wird, um den Fixpunkt wirklich zu treffen. Zur Vertiefung in kritische Phänomene sei auf [21] verwiesen.

3 Die funktionale Renormierungsgruppe

4 Supersymmetrie

4.1 Kurzer Überblick über die Teilchenphysik

Im *Standardmodell der Teilchenphysik* werden alle Wechselwirkungen durch fünf Vektorbosonen (Spin 1) beschrieben, die sich aus Eichtheorien^(4.1) ergeben. Alle weiteren Elementarteilchen sind Spin $\frac{1}{2}$ -Fermionen, die unterteilt werden in sechs nicht stark-wechselwirkende *Leptonen* und sechs stark-wechselwirkende *Quarks*. Diese beinhalten jeweils drei *Generationen* einander ähnlicher Teilchen, wobei mit jeder Generation die Masse zunimmt. Alle Quarks (und Leptonen) unterscheiden sich jeweils in einer *flavour* genannten Eigenschaft voneinander^(4.2). Während Leptonen als freie Teilchen existieren und beobachtet werden können, existieren Quarks außerhalb von Teilchenbeschleunigern aufgrund eines *Confinement*^(4.3) genannten Effekts der QCD (welche die starke Wechselwirkung beschreibt) nur in gebundenen Zuständen, die als *Hadronen* bezeichnet werden. Alle bisher beobachteten Hadronen lassen sich unterteilen in *Mesonen*, die sich aus Quark-Antiquark-Paaren zusammensetzen und daher Spin 0 oder Spin 1 tragen, und *Baryonen*, die aus drei Quarks bestehen und damit Spin $\frac{1}{2}$ oder Spin $\frac{3}{2}$ tragen.

Der Weg zum Standardmodell war weit, zumal vor den Quarks zunächst unzählige Hadronen entdeckt wurden. Noch vor dem Quark-Modell entwickelte GELL-MANN den sogenannten *eighthfold way*, welcher nicht nur die Zusammenhänge zwischen den bereits entdeckten Hadronen beschrieb, sondern auch noch ein weiteres, erst später experimentell bestätigtes Hadron vorhersagte. Das Quark-Modell beschreibt lediglich die drei leichtesten Quarks (u,d,s), da die anderen Quarks erst nach dessen Formulierung entdeckt wurden. Diese drei Quarks können durch die Fundamentaldarstellungen der *flavour-SU(3)*-Symmetrie beschrieben werden (die aber nicht der QCD-*SU(3)* entspricht). Es können aber auch die beiden möglichen Gesamtspins der Hadronen mit einbezogen werden. Dazu

^(4.1) Vereinfacht ausgedrückt werden hier zunächst globale Symmetrien in lokale überführt, d.h. die Parameter der Symmetrietransformation werden ortsabhängig. Durch die *kovariante Ableitung* $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ mit einem *Eichfeld* A_μ anstelle von gewöhnlichen Ableitungstermen werden nachdifferenzierte Terme kompensiert. Darüber hinaus wird dem Eichfeld ein dynamischer Term der Form $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ für abelsche Eichtheorien) zugeordnet. Details hierzu und allgemeiner zu *Yang-Mills-Theorien* finden sich z. B. in [22, 23].

^(4.2) Es gibt bei den Quarks die flavours u,c,t und d,s,b, bei den Leptonen e, μ , τ und ν_e, ν_μ, ν_τ

^(4.3) Quarks besitzen eine als *Farbladung* bezeichnete Eigenschaft, welche die Werte rot, grün und blau (bzw. deren Komplementärfarben bei Antiquarks) annehmen kann. Das Confinement erfordert es, dass Quarks immer in gebundenen Zuständen auftreten, welche nach außen hin farbneutral (weiß) sind, wobei die Farbladungen additiv gemischt werden.

4 Supersymmetrie

wird eine Näherungssymmetrie, die *spin-flavour-SU(6)*, zur Beschreibung genutzt, welche auch den Übergang zwischen den beiden Gesamtspins ermöglicht.

Das Quark-Modell ist nicht-relativistisch, doch der Ansatz, die *SU(6)*-Näherung der *flavour-SU(3)* auch auf die Beschreibung der relativistischen *QCD-SU(3)* anzuwenden, bot sich an.

Nach vielen Versuchen ohne den erhofften Erfolg wurde die Unmöglichkeit dieses Vorhabens durch immer strengere *no-go*-Theoreme nahegelegt, was schließlich 1967 im in Abschnitt 4.2 beschriebenen *Coleman-Mandula-Theorem* [24] in seiner allgemein gültigsten Form festgehalten wurde.

4.2 Das Coleman-Mandula-Theorem

Sei G eine verbundene Symmetriegruppe der S-Matrix, d. h. eine Gruppe deren Generatoren mit der S-Matrix vertauschen, und gleichzeitig die folgenden Annahmen erfüllt:

- G enthält eine Untergruppe, die lokal isomorph zur Poincaré-Gruppe ist.
- Alle Teilchenarten entsprechen Darstellungen der Poincaré-Gruppe mit positiver Energie. Für jede endliche Masse m gibt es nur endlich viele Teilchen mit einer geringeren Masse.
- Die elastischen Streuamplituden sind analytische Funktionen von Energie und Impulsübertrag für fast alle Energien und Impulse
- Seien $|p_i\rangle$, $i = 1, 2$ beliebige 1-Teilchen-Zustände und $|p_1 p_2\rangle$ der daraus gebildete 2-Teilchen-Zustand. Dann ist $S |p_1 p_2\rangle \neq |p_1 p_2\rangle$ für fast alle S .
- Die Generatoren von G besitzen Distributionen als Kern, wenn sie als Integraloperatoren im Impulsraum betrachtet werden.

Dann ist G lokal isomorph zum direkten Produkt einer inneren Symmetriegruppe und der Poincaré-Gruppe.

Eine innere Symmetrie ist hierbei eine Symmetrie, deren Generatoren mit allen Generatoren der Poincaré-Gruppe vertauschen.

Letztendlich bedeutet dieses Theorem, dass es keine Lie-Gruppe gibt, die gleichzeitig mit der Poincaré-Gruppe in Einklang zu bringen ist und durch die der Spin keine Erhaltungsgröße mehr ist.

4.3 Supersymmetrie

Das Coleman-Mandula-Theorem gilt nur für Lie-Gruppen, die Bosonen in Bosonen und Fermionen in Fermionen transformieren. Die einzige demzufolge nicht ausgeschlossene Möglichkeit Bosonen in Fermionen zu transformieren und umgekehrt, kennzeichnet die *Supersymmetrie* (SUSY).^(4.4)

Dem vollen Umfang der SUSY kann diese Arbeit nicht gerecht werden, es werden daher nur die für das wesentliche Verständnis des Wess-Zumino-Modells relevanten Aspekte erläutert. Zur Vertiefung muss auf Literatur wie [26,18,27,25] verwiesen werden.

Supersymmetrische Modelle besitzen folgende wichtige Eigenschaften:

- Die Anzahl fermionischer und bosonischer Freiheitsgrade stimmt *off-shell* (s. Abschnitt 4.4.1) überein.
- Es gibt eine SUSY-Transformation, die fermionische Freiheitsgrade in bosonische transformiert und umgekehrt und unter der das Modell invariant ist. Die so ineinander überführbaren Bosonen und Fermionen werden als *Superpartner* bezeichnet.
- Die Masse von Superpartnern ist identisch.
- Das Energiespektrum ist nicht negativ, der Grundzustand E_0 ist entweder nicht entartet und $E_0 = 0$, d. h. die SUSY ist *ungebrochen*, oder der Grundzustand ist entartet und $E_0 > 0$, die SUSY ist *gebrochen*.
- Die möglichen Divergenzen aus Schleifenkorrekturen der Störungsrechnung heben sich aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen bei Fermionen und Bosonen exakt auf, womit die Supersymmetrie eine mögliche Lösung des Finetuning Problems der kosmologischen Konstante darstellt.
- Supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells beschreiben durch Superpartner der bekannten Teilchen mögliche Kandidaten für die dunkle Materie.

^(4.4) Historisch gesehen ist dies eine starke Untertreibung. Die Supersymmetrie entwickelte sich tatsächlich zögerlich aus den String-Theorien, ohne dass explizit eine Lücke im Coleman-Mandula-Theorem gesucht wurde [25].

4.4 Der Superraumformalismus

Die Ursprünge der Supersymmetrie sind in der bereits genannten Literatur zu finden, 1974 entwickelten Salam und Strathdee den Superraumformalismus [28], durch den manifest supersymmetrische Modelle beschrieben werden konnten.

4.4.1 Der Superraum

Wird der d -dimensionale Raum \mathbb{R}^d um m reelle Grassmann-Variablen $(\tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^m)$ mit $\{\tilde{\theta}^a, \tilde{\theta}^b\} = 0$ erweitert, wird der sich daraus ergebende Raum als *Superraum* $\mathbb{R}^{d|m}$ bezeichnet. Produkte der Grassmann-Variablen sind nur nichtverschwindend, wenn jede Variable maximal einfach auftritt. Damit kann ein von den $\tilde{\theta}^a$ abhängiges Feld, bezeichnet als *Superfeld* Φ , in einer endlichen Taylorreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(x^1, \dots, x^n, \tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^m) &= \phi(x) + \tilde{\theta}^a \psi_a(x) + \frac{1}{2!} \tilde{\theta}^a \tilde{\theta}^b M_{ab}(x) + \dots \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \tilde{\theta}^{a_1} \dots \tilde{\theta}^{a_{m-1}} \epsilon_{a_1 \dots a_{m-1} b} F^b(x) + \tilde{\theta}^1 \dots \tilde{\theta}^m H(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Damit Φ ein Lorentzskalar ist, müssen die Komponentenfelder ϕ, M_{ab}, \dots zu gerader Grassmann-Variablen-Anzahl bosonisch und die ψ_a, \dots zu ungerader Anzahl fermionisch sein. Die Komponentenfelder sind darüber hinaus total antisymmetrisch in den Indizes. Es gibt $m + 1$ Komponentenfelder, das k -te Komponentefeld besitzt^(4.5) $\binom{m}{k-1}$ reelle Freiheitsgrade, so dass ein Superfeld für $m \geq 1$ stets genauso viele bosonische wie fermionische Freiheitsgrade besitzt^(4.6). Dies ist die *Boson-Fermion-Regel*, die jede supersymmetrische Theorie *off-shell* erfüllt. Off-shell bedeutet hierbei, dass die Theorie evtl. noch unphysikalische *Hilfsfelder* enthält, deren Bewegungsgleichung in Form einer algebraischen Gleichung direkt gelöst und in die Wirkung eingesetzt werden kann, um die *on-shell*-Wirkung zu erhalten. Beide Varianten besitzen Vor- und Nachteile, für manche nicht aus dem Superraum hergeleiteten supersymmetrischen Theorien ist derzeit noch keine off-shell-Wirkung bekannt. Im Folgenden wird die off-shell-Wirkung bevorzugt, da aus Hilfsfeldern die Flussgleichungen der Ableitungsentwicklung (s. Abschnitt 3.3) leichter bestimmt werden können.

Die Integration über alle m Grassmann-Variablen $\int d\tilde{\theta}^m \dots d\tilde{\theta}^1$ entspricht, wie in Abschnitt 2.3.4 beschrieben, der Differentiation nach selbigen. Somit projiziert das Ausintegrieren gerade auf das Komponentefeld der höchsten Ordnung,

$$\int d\tilde{\theta}^m \dots d\tilde{\theta}^1 \Phi = \Phi|_{\tilde{\theta}^1 \dots \tilde{\theta}^m}, \quad (4.2)$$

welches auch als *D-Term* bezeichnet wird.

^(4.5) Dabei bezeichnet $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ den Binomialkoeffizienten.

^(4.6) Die Komponenten beschreiben abwechselnd Bosonen und Fermionen, und durch den Binomialsatz $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ folgt mit $x=1, y=-1$, dass $\sum_r \binom{m}{2r} = \sum_r \binom{m}{2r+1}$ gilt.

4.4.2 Superfunktionen und Super-Lagrangedichte

Jede mindestens m -fach differenzierbare Funktion W eines Superfelds Φ , bezeichnet als *Superfunktion*, kann durch eine endliche Taylor-Entwicklung selbst als Superfeld beschrieben werden:

$$W(\Phi) = W(\phi) + \tilde{\theta}^a \psi_a W'(\phi) + \frac{1}{2!} \tilde{\theta}^a \tilde{\theta}^b (W'(\phi) M_{ab} - W''(\phi) \psi_a \psi_b) + \dots \quad (4.3)$$

Auch die Lagrangedichte kann entsprechend zu einer *Super-Lagrangedichte* $\mathcal{S}(x^1, \dots, \theta^m)$ verallgemeinert werden, aus der die normale Lagrangedichte $\mathcal{L}(x)$ durch Ausintegrieren der Grassmann-Variablen gewonnen werden kann, also durch den D-Term von \mathcal{S} .

4.4.3 Susy-Transformation und Superladungen

Wie bereits angedeutet, kann das Coleman-Mandula-Theorem umgangen werden, indem eine Transformation Fermionen in Bosonen umwandelt und umgekehrt. Dies bedeutet, dass die Generatoren \tilde{Q}_a der *SUSY-Transformation*, die als *Superladungen* bezeichnet werden, Grassmann-wertig sein müssen. Die erzeugte Transformation $\delta_{\tilde{\epsilon}}$ mit Parametern $\tilde{\epsilon}^a$ lautet in ihrer Wirkung auf ein Superfeld Φ :

$$\delta_{\tilde{\epsilon}} \Phi := i[\tilde{\epsilon}^a \tilde{Q}_a, \Phi] \quad (4.4)$$

Da die Transformation wieder in den Raum der komplexen Zahlen abbilden soll, müssen auch die Parameter $\tilde{\epsilon}^a$ Grassmann-Variablen sein.

Um physikalisch sinnvolle Transformationen zu bilden, müssen die Superladungen Spinoren sein. Für $d \not\equiv 2 \pmod{8}$ stellen Majorana-Spinoren das Minimum an Freiheitsgraden dar, es können^(4.7) jeweils $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ reelle Grassmann-Variablen zu einem Majorana-Spinor zusammengefasst werden. Die Anzahl \mathcal{N} aus $m = 2^{\lfloor d/2 \rfloor} \mathcal{N}$ der Superladungen dient als Unterscheidungsmerkmal verschiedener Modelle. Im Folgenden werden daher anstelle der reellen Grassmann-Variablen $\tilde{\theta}^a$, Superladungen \tilde{Q}_a und SUSY-Transformationsparameter $\tilde{\epsilon}^a$ mit $a = 1, \dots, m$ die Majorana-Spinoren θ^a , Q_a und ϵ^a mit $a = 1, \dots, \mathcal{N}$ verwendet. Insbesondere bilden damit die Komponentfelder ψ_a mit einem Index einen Majorana-Spinor, der direkt zur Beschreibung eines physikalischen Majorana-Fermions genutzt werden kann. Die SUSY-Transformation lautet dann

$$\delta_{\epsilon} \Phi = i[\epsilon^a Q_a, \Phi]. \quad (4.5)$$

Die SUSY-Transformation soll die Lagrangedichte bis auf einen Divergenzterm nicht ändern, also muss die Transformation des D-Terms eines Superfelds $\propto \partial_\mu$ sein. Da die Transformation die Poincaré-Invarianz nicht verletzen soll, dürfen die Q_a nicht von den Ortskoordinaten abhängen, und um keine Raumrichtung auszuzeichnen wird für Ortsableitungen der Lorentz-invariante Operator $\not{\partial}$ verwendet. Neben den Grassmann-Variablen

^(4.7) Mit $\lfloor x \rfloor := \min_{n \in \mathbb{N}} \{n \geq x\}$, d. h. die Nachkommastellen von x werden abgeschnitten.

4 Supersymmetrie

θ^a dürfen die Superladungen auch von den Ableitungen ∂_{θ^a} und den Dirac-konjugierten Termen abhängen. Die Grassmann-Wertigkeit wird erreicht durch die Forderung, dass in jedem Term der Taylor-Entwicklung die Summe der Anzahl von Grassmann-Variablen und Grassmann-Ableitungen ungerade ist. Die SUSY-Invarianz von D-Termen ist gewährleistet, wenn alle Terme mindestens $\propto \mathcal{O}(\not{\theta})$ sind oder mehr Grassmann-Ableitungen als -Variablen enthalten.

Da die Superladungen Majorana-Spinoren sind und keine Ortsabhängigkeit aufweisen sollen, lauten die Kommutatoren mit den Erzeugenden der Poincaré-Algebra:

$$[Q_a, P^\mu] = 0, \quad (4.6)$$

$$[Q_a, M^{\mu\nu}] = \Sigma^{\mu\nu} Q_a. \quad (4.7)$$

Da die Superladungen selbst Grassmann-wertig sind, ergibt eine Lie-Algebra für sie keinen Sinn. Stattdessen wird eine Antikommutatorrelation gefordert. Da der Antikommutator von Q_a und \bar{Q}_b in der $(0, 0) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellung der Poincaré-Gruppe transformiert, muss er proportional zum einzigen zu dieser Darstellung^(4.8) gehörenden Generator, P^μ , sein. Durch passende Definition der Q_a gilt die^(4.9)

$$\text{Super-Algebra } \{Q^a, \bar{Q}^b\} = 2\delta_{ab}\Gamma_\mu P^\mu. \quad (4.8)$$

Eine durch Antikommutatoren erweiterte Lie-Algebra wird als *graduierte Algebra* bezeichnet.

Im Folgenden soll nur noch $\mathcal{N} = 1$ behandelt werden. Dann ist die Superladung

$$Q = -i\partial_{\bar{\theta}} + \Gamma^\mu \theta \partial_\mu. \quad (4.9)$$

Die Ableitung nach einem Majorana-Spinor ist hierbei analog zu einer Vektorableitung zu verstehen, wobei die Komponenten aus der Ableitung nach einer Grassmann-Zahl gemäß Abschnitt 2.3.3 hervorgehen. Das Superfeld Φ lautet für $\mathcal{N} = 1$

$$\Phi = \phi + \bar{\theta}\psi + \bar{\theta}\theta H. \quad (4.10)$$

Die Anwendung der SUSY-Transformation auf ein Superfeld Φ lautet damit

$$\delta_\epsilon \Phi = \underbrace{-i\bar{\epsilon}\psi(x)}_{=\delta_\epsilon \phi(x)} + \bar{\theta} \underbrace{-(iH(x) + \not{\theta}\phi(x))\epsilon}_{=\delta_\epsilon \psi(x)} + \bar{\theta}\theta \underbrace{\not{\theta}\psi\epsilon}_{=\delta_\epsilon H(x)}, \quad (4.11)$$

Die Transformation bosonischer Komponentenfelder ist damit wie in Abschnitt 4.3 angekündigt proportional zu fermionischen Feldern und umgekehrt. Insbesondere ist

$$\delta_\epsilon H(x) \propto \not{\theta}\psi(x),$$

^(4.8) Darüber hinaus sind auch Lorentzskalare Z_{ab} , die *Zentralladungen*, möglich, die jedoch in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

^(4.9) Dabei ist $\{\Psi, \bar{\Phi}\} = \Psi\bar{\Phi} + (\bar{\Phi})^T \Psi^T$ zu verstehen.

also einem Divergenzterm. Daher stammt auch die Bezeichnung des Komponentenfelds zur maximalen Anzahl Grassmann-Variablen als D-Term.

Aus der SUSY-Algebra (4.8) folgt auch

$$\{\delta_a, \delta_b\} \propto -2i\delta_{ab}, \quad (4.12)$$

d. h. die Hintereinanderausführung zweier SUSY-Transformationen erzeugt eine Translation. Diese Eigenschaft bietet Ansatzpunkte für eine Theorie mit lokaler Poincaré-Invarianz an, also einer mit der allgemeinen Relativitätstheorie gut zu vereinbarenden QFT.

4.4.4 Super-kovariante Ableitung und chirales Superfeld

Ein allgemeines Superfeld ist keine irreduzible Darstellung der Supersymmetrie. Um eine solche zu erhalten, muss eine Lorentz-invariante Bedingung an das Superfeld Φ gestellt werden. Hierfür eignet sich eine supersymmetrische Erweiterung der Divergenzfreiheit, so dass durch eine *super-kovariante Ableitung* $D = i\partial_\theta + \Gamma^\mu \theta \partial_m$, die mit der Superladung antivertauscht, ein

$$\text{(links-)chirales Superfeld: } D\Phi = 0 \quad \text{bzw. ein} \quad (4.13)$$

$$\text{rechts- oder antichirales Superfeld: } \bar{D}\bar{\Phi} = 0 \quad (4.14)$$

definiert wird. Für ein chirales Superfeld Φ ergibt sich ein antichirales Superfeld Φ^\dagger und umgekehrt. Durch diese Bedingung wird die Hälfte der Grassmann-Variablen eliminiert, der höchste noch verbleibende Term eines (anti)chiralen Felds wird *F-Term* genannt und transformiert unter der SUSY-Transformation so wie der D-Term eines Superfelds in eine Divergenz. Das einzige sowohl chirale als auch antichirale Superfeld ist konstant, durch hermitesche Konjugation wird ein chirales in ein antichirales Superfeld überführt und umgekehrt. Das Produkt zweier chiraler Superfeld ist erneut chiral, analog für antichirale Superfelder. Das Produkt aus chiralem und antichiralem Superfeld ist hingegen weder chiral noch antichiral und wird als *Vektorfeld* bezeichnet. Ein chirales Feld lautet in vier Dimensionen mit $\theta = (\alpha^T, \beta^T)^T$:

$$\Phi(x, \alpha, \beta) = \exp(-i\alpha\sigma^\mu\bar{\beta}\partial_\mu) \Phi(x, \theta), \quad (4.15)$$

was gerade einer Translation $x^\mu \rightarrow x^\mu - i\alpha\sigma^\mu\bar{\beta}$ in $\Phi(x, \alpha)$ entspricht. Auch diese Translation kann nach α, β in einer endlichen Taylorreihe entwickelt werden. Der D-Term von $\Phi^\dagger\Phi$ mit (anti)chiralem Φ liefert dadurch gerade einen kinetischen Term für die Lagrangefunktion.

4.4.5 Supersymmetrische Lagrangedichte

Da der D-Term eines Superfeldes unter der SUSY-Transformation in einen Divergenzterm transformiert, kann er als SUSY-invariante Lagrangedichte \mathcal{L} angesetzt werden. Da einerseits \mathcal{L} reellwertig sein soll und andererseits die Bewegungsgleichung eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermions durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben sein soll, ist ein geeigneter kinetischer Term durch den D-Term von $\Phi^\dagger\Phi$ mit chiraalem Superfeld Φ gegeben. Die Wechselwirkung kann durch den Realteil des D-Terms des Superpotentials $W(\Phi)$ beschrieben werden, also

$$\mathcal{L} = \left(\Phi^\dagger\Phi + 2\Re(W(\Phi)) \right) |_{\theta^1 \dots \theta^N}. \quad (4.16)$$

Dadurch liefert der Superraumformalismus ein manifest supersymmetrisches Modell.

4.4.6 Supersymmetrische Flussgleichung

Wie in Abschnitt 3.3.3 beschrieben, bleibt die manifeste Supersymmetrie erhalten, wenn die super-kovariante Ableitung D in der Ableitungsentwicklung verwendet wird. Die Wetterich-Gleichung (3.1) kann also ohne Modifikationen verwendet werden.

4.5 Das Wess-Zumino-Modell

4.5.1 Das Wess-Zumino-Modell in vier Dimensionen

Das *Wess-Zumino-Modell* [3] ist ein vierdimensionales $\mathcal{N} = 1$ -Modell, die entsprechende Lagrangedichte ergibt sich aus (4.16) und dem Superpotential

$$W'(\phi) = m\phi + g\phi^2. \quad (4.17)$$

Im Minkowski-Raum lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [|\partial_\mu\phi|^2 + |H|^2 + i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi] + \Re(H^*W'(\phi)) - \frac{1}{2}\bar{\Psi} [\Re(W''(\phi)) - i\Gamma_*\Im W''(\phi)] \Psi. \quad (4.18)$$

Dabei sind ϕ und H komplexe Skalarfelder^(4.10) und Ψ ein Majorana-Spinor – daher auch der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ im kinetischen Term. Eine $U(1)$ -Symmetrie ist für $W'' \neq 0$ nicht möglich, d. h. das Wess-Zumino-Modell beschreibt ausschließlich elektrisch neutrale Teilchen. Das Modell besitzt genausoviele bosonische wie fermionische Freiheitsgrade, erfüllt also die

^(4.10) In der Literatur werden meist reelle Felder A, B, F, G mit $\phi = A + iB$ und $H = F + iG$ genutzt, jedoch ist die komplexe Darstellung für die noch folgende Dimensionsreduktion übersichtlicher.

Boson-Fermion-Regel. Das Feld H besitzt mangels eines kinetischen Terms eine rein algebraische Bewegungsgleichung, die sofort lösbar ist:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{\delta H^*} \int d^4x \mathcal{L} = H + \frac{1}{2} W'(\phi). \quad (4.19)$$

H wird als *Hilfsfeld* bezeichnet, da es keine echten Teilchen beschreibt. H kann aus \mathcal{L} eliminiert werden und man erhält einen durch das Einsetzen von H in \mathcal{L} definierten *on-shell-Lagrangian*, im Gegensatz zum *off-shell-Lagrangian* (4.18). Dadurch geht aber das Gleichgewicht der Freiheitsgrade verloren und auch aufgrund der leichteren Berechenbarkeit der Flussgleichungen mit den Hilfsfeldern ist die off-shell-Formulierung hier vorzuziehen. Die on-shell-Formulierung ist allerdings hilfreich, um festzustellen, dass die beiden Teilchen ϕ und Ψ die gleiche Masse besitzen. Sie werden unter anderem deswegen als *Superpartner* bezeichnet. Auch diese gemeinsame Masse ist eine allgemeine Eigenschaft supersymmetrischer Modelle.^(4.11) Auch der off-shell-Formalismus hat Schwächen, insbesondere ist die Suche nach diesem bei vielen Modellen noch Gegenstand aktueller Forschung.

Das Wess-Zumino-Modell ist nicht renormierbar. Dies bedeutet, dass die Störungstheorie unendlich viele divergierende Terme erzeugt, so dass unendlich viele Gegenterme erforderlich wären um diese zu kompensieren. Supersymmetrische Theorien bieten jedoch den Vorteil, dass die durch Bosonen erzeugten Divergenzen von den durch Fermionen erzeugten Divergenzen exakt kompensiert werden, so dass die Theorie endlich bleibt.

Wie bereits erwähnt, transformiert die SUSY die bosonischen Freiheitsgrade in fermionische und umgekehrt. Im Wess-Zumino-Modell lauten diese Transformationen off-shell und parametrisiert durch den Majorana-Spinor α :

$$\delta_\alpha \phi = 2\bar{\alpha}\psi_L, \quad \delta_\alpha H = -2i\bar{\alpha}\not{\partial}\Psi_R, \quad (4.20)$$

$$\delta_\alpha \Psi_L = -i\not{\partial}\phi\alpha_R + H^*\alpha_L, \quad (4.21)$$

$$\delta_\alpha \Psi_R = -i\not{\partial}\phi^*\alpha_L + H\alpha_R. \quad (4.22)$$

Diese Transformationen^(4.12) könnten durch Eliminieren von H ebenfalls on-shell betrachtet werden, doch würde dann die Modellunabhängigkeit verloren gehen, da dann das Superpotential die Transformationen beeinflusst. Der Lagrangian (4.18) ist unter diesen

^(4.11) Zu beachten ist hierbei, dass es sich um *nackte Massen* handelt, d. h. nach der Quantisierung können die Massen durch spontane Symmetriebrechung zu unterschiedlichen Werten laufen. Dieser Effekt ist auch notwendig, da zu allen bisher entdeckten Teilchen keine gleich schweren Superpartner entdeckt wurden.

^(4.12) Durch die rellen Felder ausgedrückt lauten die SUSY-Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\alpha}\Psi, & \delta B &= i\bar{\alpha}\Gamma_*\Psi, \\ \delta \Psi &= -i\not{\partial}(A + i\Gamma_*B)\alpha + (F + i\Gamma_*G)\alpha, \\ \delta F &= -i\bar{\alpha}\not{\partial}\Psi, & \delta G &= \bar{\alpha}\Gamma_*\not{\partial}\Psi \end{aligned}$$

4 Supersymmetrie

Transformationen bis auf einen Divergenzterm invariant, und zwar jeweils einzeln im kinetischen Term, Massenterm ($\propto m$) und Kopplungsterm ($\propto g$) [18]. On-shell würde auch diese termweise Symmetrie verloren gehen, lediglich der gesamte on-shell-Lagrangian bleibt SUSY-invariant. Der Generator δ_α der infinitesimalen SUSY-Transformation erfüllt die SUSY-Algebra

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = -2i(\bar{\beta}\Gamma^\mu\alpha)\partial_\mu. \quad (4.23)$$

4.5.2 Das Wess-Zumino-Modell in drei Dimensionen

Das Wess-Zumino-Modell verwendet Majorana-Fermionen, deren Verhalten bei Wick-Rotationen Gegenstand aktueller Forschungen ist. Bisher wurden noch keine eindeutigen Ergebnisse veröffentlicht. Daher wird der Renormierungsgruppenfluss-Formalismus stattdessen auf das auf 3 Dimensionen reduzierte Wess-Zumino-Modell angewandt, da dort anstelle von Majorana-Spinoren Weyl-Spinoren auftreten.

Aus der im Abschnitt 6.1 durchgeführten *Dimensionsreduktion* ergibt sich für das *euklidische* Wess-Zumino-Modell in (3+0) Dimensionen mit positiver Metrik (+ + +) der Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [|\partial_k\phi|^2 - |H|^2 + 2\bar{\psi}\not{\partial}\psi] - \Re[H^*W'(\phi)] + \Re[\bar{\psi}W''(\phi)\psi_c]. \quad (4.24)$$

Dabei ist ψ ein Weyl-Spinor und ψ_c dessen ladungskonjugierter Spinor. Wie in Abschnitt 2.3.7 bereits erwähnt, ist hierbei nicht nur die elektrische Ladung, sondern auch die Chiralität invertiert. Wie im 4D-Wess-Zumino-Modell besitzt das Modell für $W'' \neq 0$ keine $U(1)$ -Symmetrie und beschreibt daher auch in 3 Dimensionen elektrisch neutrale Teilchen. Der wechselwirkungs- und sogar masselose Fall $W'' = 0$ bildet hierbei einen trivialen und daher irrelevanten Spezialfall.

5 Susy-QM

5.1 Flussgleichung

Die euklidische Quantenmechanik stellt eine eindimensionale QFT dar, d. h. Dirac-Spinoren entsprechen komplexen Grassmann-Zahlen und Majorana-Spinoren reellen Grassmann-Zahlen. Die Dirac-Konjugation entspricht der komplexen Konjugation. Die euklidische supersymmetrische Quantenmechanik lässt sich aus dem euklidischen Superfeld

$$\Phi(\tau, \theta, \bar{\theta}) = \phi(\tau) + \bar{\theta}\psi(\tau) + \bar{\psi}\theta(\tau) + \bar{\theta}\theta F(\tau) \quad (5.1)$$

mit der komplexen Grassmann-Variablen θ herleiten (welche auch als zwei reelle Grassmann-Variablen θ_1, θ_2 mit $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ behandelt werden kann). Dabei ist ϕ ein reelles Skalarfeld, ψ ein 1D-Spinor dargestellt durch eine komplexe Grassmann-Zahl und F ein reelles Hilfsfeld. Die Superladung und ihre Konjugation lauten

$$Q = i\partial_{\bar{\theta}} + \theta\partial_{\tau}, \quad (5.2)$$

$$\bar{Q} = i\partial_{\theta} + \bar{\theta}\partial_{\tau}, \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow \{Q, \bar{Q}\} = 2i\partial_{\tau}. \quad (5.4)$$

Die SUSY-Algebra ist also erfüllt, es handelt sich um eine $\mathcal{N}=2$ -Supersymmetrie. Der Generator der infinitesimalen SUSY-Transformation lautet damit

$$\delta_{\epsilon} = \bar{\epsilon}Q - \epsilon\bar{Q}. \quad (5.5)$$

Die kovarianten Ableitungen sind

$$D = i\partial_{\bar{\theta}} - \theta\partial_{\tau}, \quad (5.6)$$

$$\bar{D} = i\partial_{\theta} - \bar{\theta}\partial_{\tau}, \quad (5.7)$$

$$\Rightarrow \{D, D\} = 0, \quad \{\bar{D}, \bar{D}\} = 0, \quad \{D, \bar{D}\} = -2i\partial_{\tau}. \quad (5.8)$$

Sie vertauschen mit ∂_{τ} und antivertauschen mit den Superladungen. Ein reellwertiger kinetischer Term kann dann mit dem kinetischen Operator

$$K := \frac{1}{2}[D, \bar{D}] \quad (5.9)$$

5 SUSY-QM

erzeugt werden, zusammen mit einem Superpotential für die Wechselwirkung lautet die euklidische *off-shell* Wirkung der SUSY-QM somit

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \Phi K \Phi + iW(\Phi) \right] \Big|_{\bar{\theta}\theta} \quad (5.10)$$

$$= \int d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - i\bar{\psi}\dot{\psi} + iFW'(\phi) - i\bar{\psi}W''(\phi)\psi + \frac{1}{2}F^2 \right]. \quad (5.11)$$

Die SUSY-QM kann aus der Dimensionsreduktion des 2d- $\mathcal{N}=1$ -Wess-Zumino Modells auf (0+1) Dimensionen erhalten werden, so wie auch die Quantenmechanik allgemein eine (0+1)-dimensionale QFT darstellt. Als Ansatz für Γ_k bietet sich damit in der LPA ein skalenabhängiges Superpotential an, $W \rightarrow W_k$, also

$$\Gamma_k = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - i\bar{\psi}\dot{\psi} + iFW'_k(\phi) - i\bar{\psi}W''_k(\phi)\psi + \frac{1}{2}F^2 \right]. \quad (5.12)$$

Die Flussgleichung für W_k wurde bereits in [6] hergeleitet und mit der Regulatorzerlegung nach (3.8),

$$R_k = \begin{pmatrix} R_k^B & 0 \\ 0 & R_k^F \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$R_k^B = \begin{pmatrix} p^2 r_2 & i r_1 \\ i r_1 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$R_k^F = \begin{pmatrix} 0 & p r_2 + i r_1 \\ p r_2 - i r_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

lautet sie:

$$(5.16)$$

$$\partial_k W_k(\phi) = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{h \partial_k r_1 - \partial_k r_2 \mathcal{W}''(\phi)}{h^2 p^2 + \mathcal{W}''(\phi)} \quad (5.17)$$

$$\text{mit } h = 1 + r_2, \quad \mathcal{W}'' = r_1 + W''_k. \quad (5.18)$$

In [6] wurden nur Superpotentiale der Form

$$W_\Lambda(\phi) = e\phi + \frac{m}{2}\phi^2 + \frac{g}{3}\phi^3 + \frac{a}{4}\phi^4 \quad (5.19)$$

mit ungebrochener Symmetrie ($a \neq 0$) betrachtet, für welche $r_2 = 0$ bei geeignetem r_1 gewählt werden kann. Beispielsweise folgt aus $r_1 = k$, einem Callan-Symanzik-artigen Regulator (CS), die Flussgleichung

$$\partial_k W_k(\phi) = \frac{1}{4}(k + W''_k)^{-1}. \quad (5.20)$$

Die Energie des ersten angeregten Zustands kann auch durch eine numerische Diagonalisierung des Hamiltonians bestimmt werden und wird als Vergleichsgröße herangezogen.

Diese Energie ergibt sich aus der Krümmung des effektiven Potentials $V_0(\phi) = \frac{1}{2}(W'_0(\phi))^2$ an dessen Minimum zu

$$\Delta E = \sqrt{V''_0(\phi_{\min})} \quad \text{mit } V_0(\phi_{\min}) = \min_{\phi} V_0(\phi). \quad (5.21)$$

Im ungebrochenen Fall konnte diese in [6] bis auf 10% genau bestimmt werden, mit einer Wellenfunktionsrenormierung sogar bis auf 1%.

Nun soll auch der gebrochene Fall ($a = 0$) betrachtet werden. Hier muss $r_2 \neq 0$ gewählt werden, da ansonsten numerische Instabilitäten auftreten: Bei oben genanntem CS-Regulator könnte z. B. das Vorzeichen von $\partial_k W_k$ ständig wechseln, obwohl es monoton gegen 0 konvergieren sollte. Da r_1 eine für diesen Fall irrelevante Verschiebung des Potentialminimums darstellt, kann $r_1 = 0$ gewählt werden. Ein numerisch stabiler Regulator r_2 ist

$$r_2 = \left(\sqrt{\left| \frac{k}{p} \right|} - 1 \right) \cdot \theta \left(1 - \left(\frac{p}{k} \right)^2 \right), \quad (5.22)$$

$$\Rightarrow \partial_k r_2 = \frac{\text{sgn}(pk)}{2\sqrt{|pk|}} \cdot \theta \left(1 - \left(\frac{p}{k} \right)^2 \right). \quad (5.23)$$

Damit ergibt sich die Flussgleichung^(5.1)

$$\partial_k W_k = \frac{1}{2\pi k} \arctan \frac{W''_k}{k} \quad (5.24)$$

$$\text{bzw. } \partial_k W'_k = \frac{1}{2\pi} \frac{W'''_k}{k^2 + W''_k}. \quad (5.25)$$

Die numerische Behandlung von (5.20) bei gegebenem Koeffizienten von W_Λ in (5.19) konnte für $a \neq 0$ mit vergleichsweise geringem Recheraufwand erfolgen, z. B. mittels Mathematica. (5.24) kann von diesem Programm hingegen nicht gelöst werden, und selbst die physikalisch relevantere Flussgleichung (5.25) erfordert bei der gleichen Koeffizientenwahl deutlich mehr Rechenzeit, kann nur für kleine k statt $k \rightarrow 0$ berechnet werden und erreicht nur eine Genauigkeit von 20%, wie in Tabelle 5.1 zu sehen ist. Es zeigt sich auch eine starke Abhängigkeit der Qualität der Ergebnisse von den numerischen Parametern, wie in Abbildung 5.1 zu sehen ist.

Daher wird die detaillierte Behandlung der SUSY-Quantenmechanik zugunsten der des Wess-Zumino-Modells zurückgestellt und hier der Schwerpunkt auf die Suche nach der Ursache dieser Problematik gelegt.

Zum Vergleich sind die Superpotentiale und effektiven Potentiale für die beiden Regulatoren bei verschiedenen Kopplungen in den Abbildungen 5.2-5.4 dargestellt. Die entgegengesetzte Flussrichtung des Superpotentials für die beiden Regulatoren resultiert in unterschiedlichen Lagen der Minima des effektiven Potentials, was eine Erklärung für die unterschiedlichen Krümmungen liefert.

^(5.1) Es wurde hierbei im Gegensatz zu [6] zu (5.17) noch ein bezüglich φ konstanter Term addiert, welcher für $W_k = 0$ auch $\partial_k W_k = 0$ impliziert.

g	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
CS	2.203	2.137	2.062	1.979	1.890	1.798	1.710	1.633	1.584	1.590
exp	2.195	2.130	2.055	1.972	1.884	1.791	1.701	1.622	1.569	1.684
θ	2.197	2.132	2.058	1.975	1.888	1.794	1.705	1.626	1.576	1.581
CS+wfr	2.089	2.131	1.961	1.879	1.788	1.690	1.589	1.489	1.402	1.341
exakt	2.022	1.970	1.905	1.827	1.738	1.639	1.534	1.426	1.323	1.235
$r_2 \neq 0$	2.397	2.285	2.181	2.092	2.026	2.000	2.034	2.154	2.382	2.736

Tabelle 5.1: Energien des ersten angeregten Zustands für verschiedene Kopplungen g mit $e = m = a = 1$ für die Regulatoren CS, exp und θ sowie die exakten Ergebnissen aus [6] zum Vergleich mit den Ergebnissen des hier verwendeten $r_2 \neq 0$. CS+wfr steht hierbei für das Ergebnis aus [6] unter Berücksichtigung der Wellenfunktionsrenormierung.

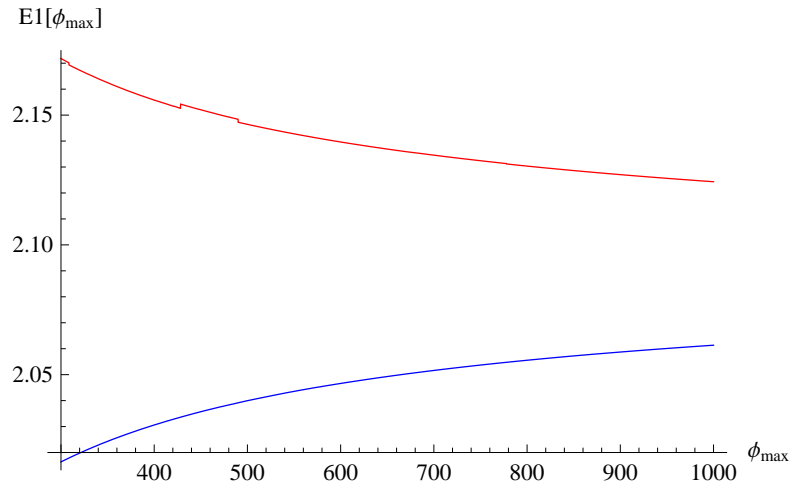


Abbildung 5.1: Veranschaulichung der numerischen Instabilität: Während beim CS-Regulator mit enger werdendem Intervall $[-\phi_{\max}, \phi_{\max}]$ die Anregungsenergie abnimmt (bis etwa $\phi_{\max} \approx 15$) und sich der tatsächlichen Energie annähert, muss für $r_2 \neq 0$ ein immer größeres Intervall betrachtet werden, was den Rechenaufwand bei gleichbleibender Diskretisierungslänge entsprechend stark anwachsen lässt ($e = m = a = 1, g = 0.6$).

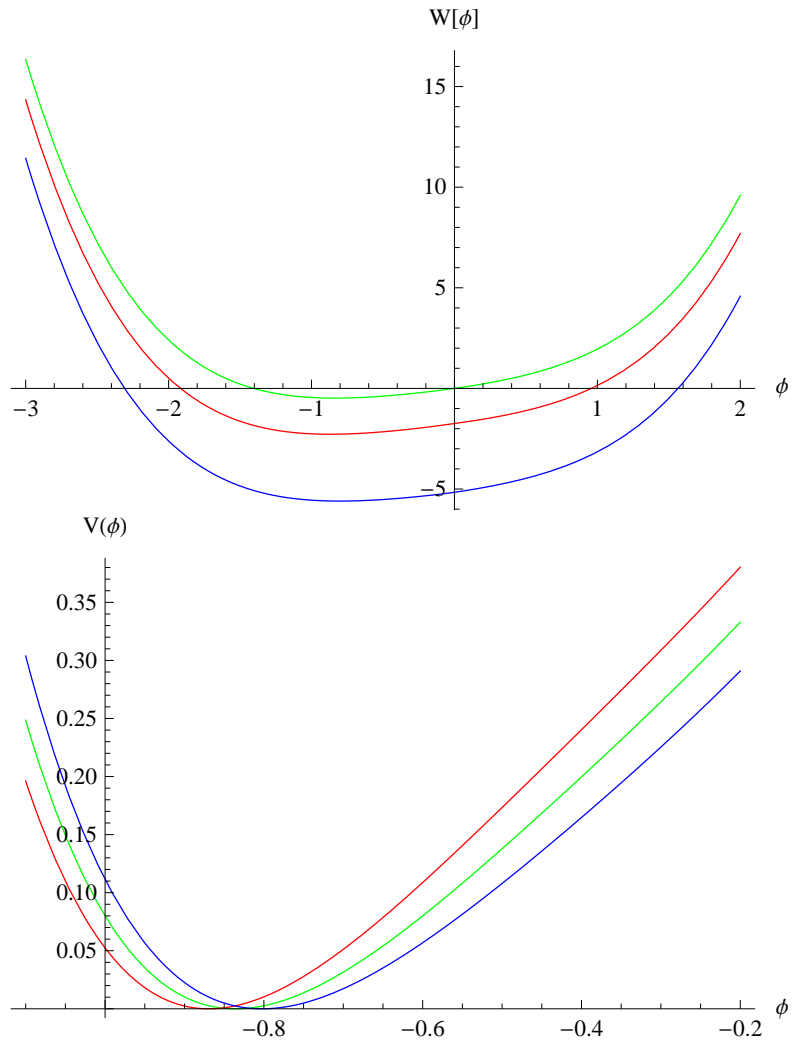


Abbildung 5.2: Superpotential (oben) und effektives Potential (unten) für $k = \Lambda$ (grün) und $k \approx 0$ mit CS-Regulator (blau) bzw. Regulator (5.22) (rot) mit $(a, g) = (1.0, 0.6)$.

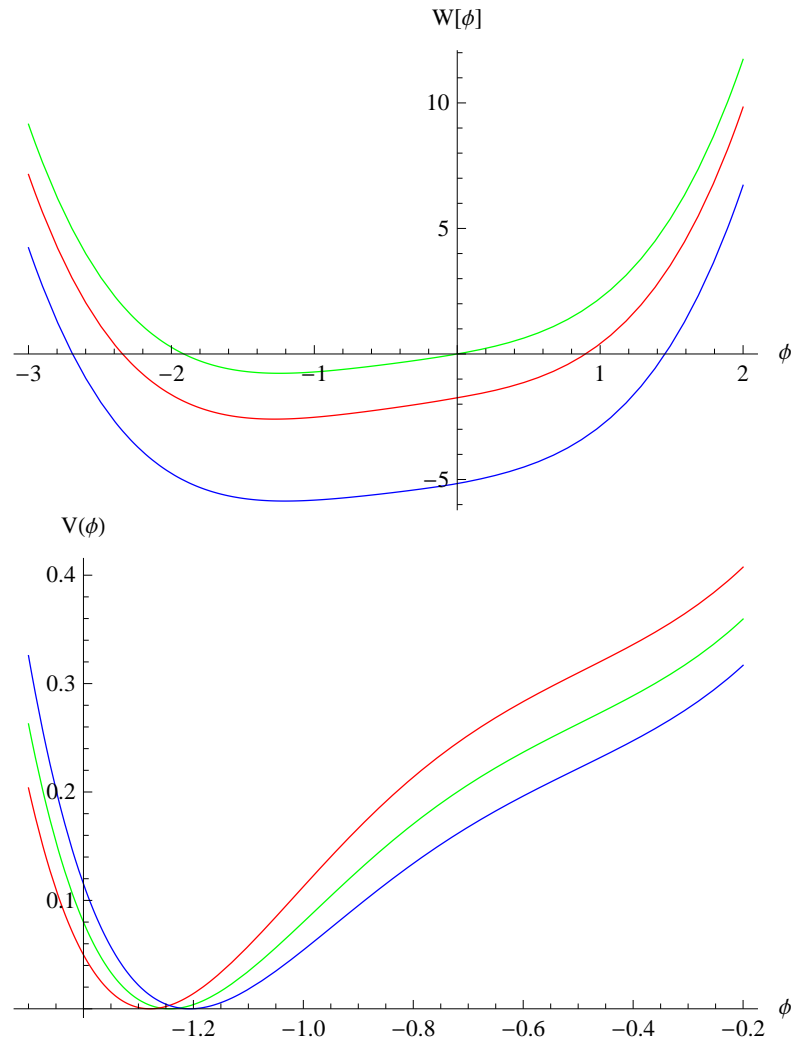


Abbildung 5.3: Superpotential (oben) und effektives Potential (unten) für $k = \Lambda$ (grün) und $k \approx 0$ mit CS-Regulator (blau) bzw. Regulator (5.22) (rot) mit $(a, g) = (1.0, 1.4)$.

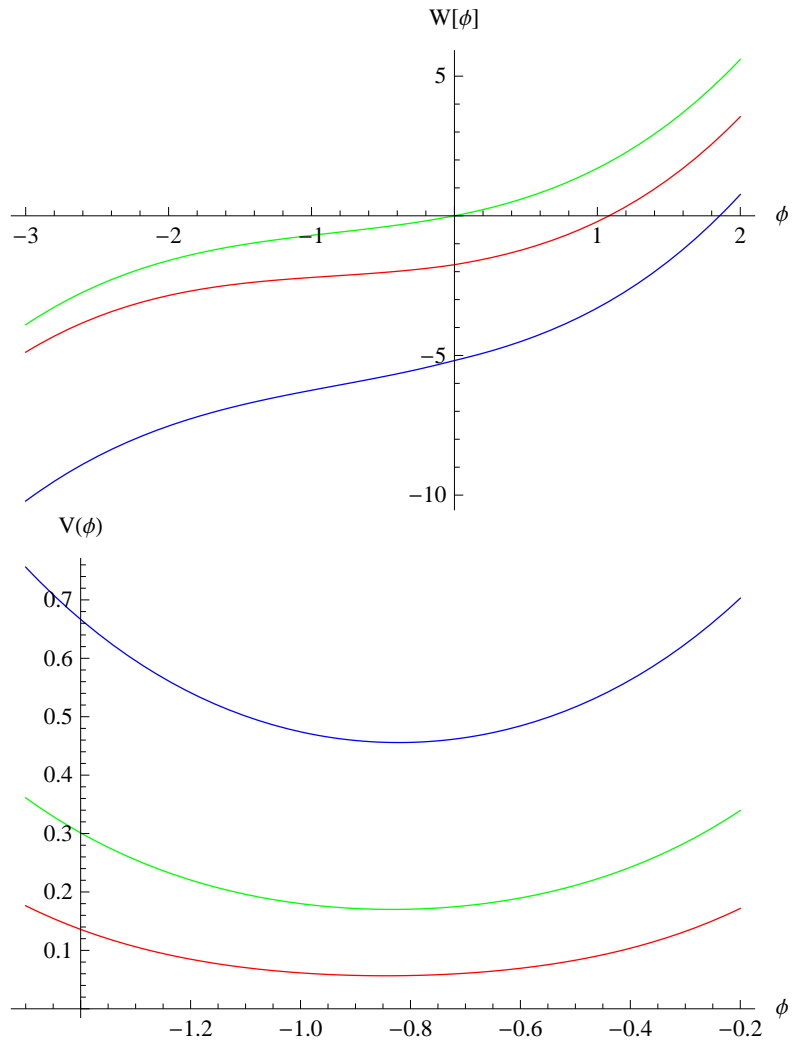


Abbildung 5.4: Superpotential (oben) und effektives Potential (unten) für $k = \Lambda$ (grün) und $k \approx 0$ mit CS-Regulator (blau) bzw. Regulator (5.22) (rot) mit $(a, g) = (0.0, 0.6)$.

5.2 Fixpunktanalyse

Zur Analyse der numerischen Stabilität sollen die Fixpunktlösungen W_* der dimensionslosen Form der Flussgleichung (5.24) analysiert werden. Die Dimensionen lassen sich direkt aus (5.24) ablesen und lauten

$$[W] = 1, \quad [k] = [\varphi]^{-2}. \quad (5.26)$$

Dabei wird, wie auch im Folgenden, der Index k von W_k weggelassen. Der Übergang zu dimensionlosen Variablen

$$x := \sqrt{k}\varphi, \quad t := \ln \frac{k}{\Lambda} \quad (5.27)$$

liefert dann mit

$$\partial_t W = \underbrace{\partial_t k|_x}_{=k} \partial_k W + \underbrace{\partial_t \varphi|_x}_{=-\varphi} \partial_\varphi W, \quad (5.28)$$

$$\partial_\varphi W = \underbrace{\partial_\varphi x|_k}_{=\sqrt{k}} \partial_x W + \underbrace{\partial_\varphi t|_k}_{=0} \partial_t W$$

$$\partial_\varphi^2 W = \underbrace{(\partial_\varphi x)^2}_{=k} \partial_x^2 W + \underbrace{(\partial_\varphi^2 x)}_{=0} \partial_x W \quad (5.29)$$

die dimensionslose Flussgleichung

$$(5.30)$$

$$\partial_t W = \frac{1}{2\pi} \arctan(W'') - xW'. \quad (5.31)$$

Die dimensionslose Fixpunktgleichung mit $\partial_t W_* \equiv 0$ lautet somit

$$W_*'' = \tan(2\pi x W_*'). \quad (5.32)$$

Die Striche bezeichnen hier und im Folgenden die partielle Ableitung nach x .

Die Singularität der rechten Seite dieser gewöhnlichen Differentialgleichung für ungerade $4xW_*' = (2k+1)$ schränkt den Bereich, in dem eine reelle Lösung existiert, ein. Dies kann gezeigt werden, indem in (5.32) die Partialbruchzerlegung des Tangens,

$$\tan u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(\frac{1}{2} + k) - u},$$

um $4xW'_* \approx (2k+1)$, $x \approx x_c$ herum entwickelt wird:

$$\begin{aligned}
 W''_* &\approx \frac{2}{\pi((2k+1) - 4xW'_*)} \quad \Big| \quad u := 4xW'_* - 2k, \\
 \Rightarrow u' &\approx \frac{u+2k}{x} + \frac{8x}{\pi(1-u)} = \frac{\pi(u+2k)(1-4u) + 8x^2}{\pi x(1-u)} \\
 &\stackrel{u \approx 1}{\approx} \frac{8x}{\pi(1-u)} \\
 \Rightarrow \pi(1-u)du &\approx 8x dx \\
 \Rightarrow \pi u - \frac{\pi}{2}u^2 &\approx 4(x^2 - x_c^2) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \approx 1 \pm \sqrt{\frac{8}{\pi}(x_c^2 - x^2)} \\
 \Rightarrow W'_* &\approx 2k + \frac{1}{4x} \pm \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_c^2}{x^2} - 1 \right)}.
 \end{aligned}$$

Für $x > x_c$ wird W'_* damit komplexwertig, d. h. es gibt keine global reellwertige Fixpunkt-
 lösung ^(5.2). Als einzige Alternative kann eine zweiwertige reelle Funktion im Intervall
 $[-x_c, x_c]$ betrachtet werden, die in $\pm x_c$ glatt verzweigt, wie Abbildung 5.5 verdeutlicht.

Das effektive Potential $V = \frac{1}{2}(\partial_\varphi^2 W)^2 = \frac{k}{2}W'^2$ der Fixpunkt-
 lösung wird minimal für

$$0 \stackrel{!}{=} V'|_{x_m} = k^{3/2}W'W''|_{x_m}. \quad (5.33)$$

Da $W' = 0$ den Trivialfall $V = 0$ beschreibt, wird $W''|_{x_m} = 0$ betrachtet. Damit ist

$$0 = \tan(2\pi W')|_{x_m} \Rightarrow 2x_m W'|_{x_m} \in \mathbb{Z}, \quad (5.34)$$

$$W^{(3)}|_{x_m} \stackrel{(5.32)}{=} (1 + W'')(2\pi x W')'|_{x_m} \quad (5.35)$$

$$= 2\pi W'|_{x_m}, \quad (5.36)$$

und die Energiedifferenz zwischen Grundzustand und erstem angeregtem Zustand lautet
 also:

$$\Delta E = \sqrt{\partial_\varphi^2 V}|_{x_m} = k\sqrt{W''^2 + W'W^{(3)}}|_{x_m} \quad (5.37)$$

$$= \sqrt{2\pi k}W'|_{x_m} \quad (5.38)$$

^(5.2) Im Gegensatz hierzu besitzt die Flussgleichung (5.20) mit CS-Regulator die dimensionslose Form

$$\partial_t W = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + W''} - xW',$$

womit die Fixpunktgleichung in diesem Fall

$$W'' = \frac{1 - 4xW'}{4xW'}$$

lautet und nur bei $xW' = 0$ singular werden könnte. Analog zur vorangehenden Rechnung lässt
 sich diese Fixpunktgleichung um $u := xW' \approx 0$ herum entwickeln, womit sich die Lösung $W' \approx$
 $\frac{W'_0}{x} \exp(\frac{1}{8}x^2)$ ergibt, insbesondere existieren in diesem Fall global reellwertige Fixpunkt-
 lösungen.

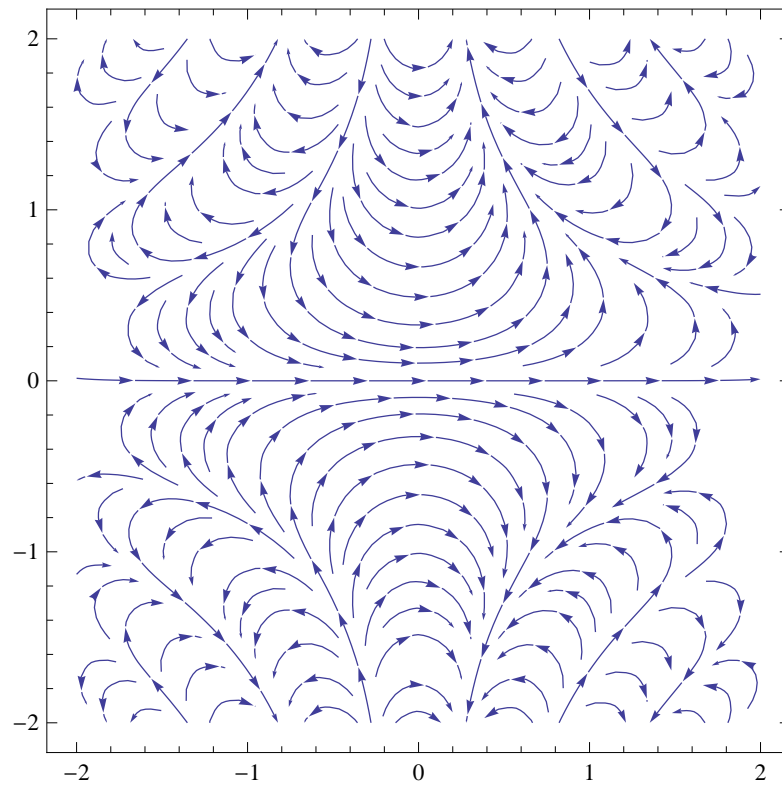


Abbildung 5.5: Die Fixpunktgleichung (5.32) kann auch als parametrisierte Gleichung $\cos(2\pi x W'_*) dW'_* = \sin(2\pi x W'_*) dx$ umgeschrieben und als Fluss der Parameter $(W'_*(t), x(t))$ dargestellt werden. In diesem Fall kehrt die Lösung an einer kritischen Stelle um.

Insbesondere verschwindet ΔE für $k \rightarrow 0$, womit eine Entartung des Grundzustands vorliegt, die SUSY wird also von der Fixpunktlösung gebrochen.

Darüber hinaus ist es hilfreich, die Stabilität der Fixpunktlösung zu betrachten. Dazu wird W' in einer Taylorreihe um das Minimum bei $x_m(t)$ entwickelt:

$$W'(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{n+1}(t) \frac{(x - x_m(t))^n}{n!} \quad (5.39)$$

Da um das Minimum von W' entwickelt wird, muss

$$W_2 \equiv 0 \quad (5.40)$$

sein. Die dimensionslose Flussgleichung (5.31) ergibt damit ein gekoppeltes System unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen für die $W_n(t)$. Die Stabilität der Fixpunktlösung ist dann gegeben durch die Eigenwerte der *Stabilitätsmatrix*

$$S_{ij} = \left. \frac{\partial \dot{W}_i}{\partial W_j} \right|_f \quad (i, j = 0, 1, \dots). \quad (5.41)$$

Dabei bezeichnet der Punkt die Ableitung nach t , also $\dot{W}_j := \partial_t W_j$. Die dritte Zeile und Spalte ($i, j = 2$) der Stabilitätsmatrix verschwinden aufgrund der Entwicklung um das konstante x_m und können daher weggelassen werden. Für W_0 ergibt sich die Differentialgleichung

$$\dot{W}_0 = -x_m W_1.$$

Die rechte Seite der Flussgleichung (5.31) hängt somit nicht von W ab, so dass die Flussgleichung für W_0 von den anderen W_n entkoppelt ist. Es sind $S_{0j} = -x_m|_f \cdot \delta_{j1}$ und $S_{i0} = 0$. Dies ergibt einen Eigenwert 0 bezüglich der Variation von W_0 , über die Stabilität in Abhängigkeit von W_0 kann daher keine Aussage getroffen werden. Da das effektive Potential von W_0 unabhängig ist, ist dies auch keine relevante Frage. Die Zeile und Spalte zu $i, j = 0$ können also ebenfalls aus der Stabilitätsmatrix entfallen, und es bleiben die Einträge zu $i, j = 1, 3, 4, 5, \dots$ übrig.

Die Abbildungen 5.6 und 5.7 stellen die Abhängigkeit der Eigenwerte von der Stabilitätsmatrix von u_1 und der Trunkierungsordnung dar. Es deutet sich ein Trend zu Eigenwerten mit negativem Realteil an, mit einer positiven Ausnahme, d. h. entsprechend Abschnitt 3.4 ist die Fixpunktlösung bis auf eine stabile Richtung hochgradig instabil.

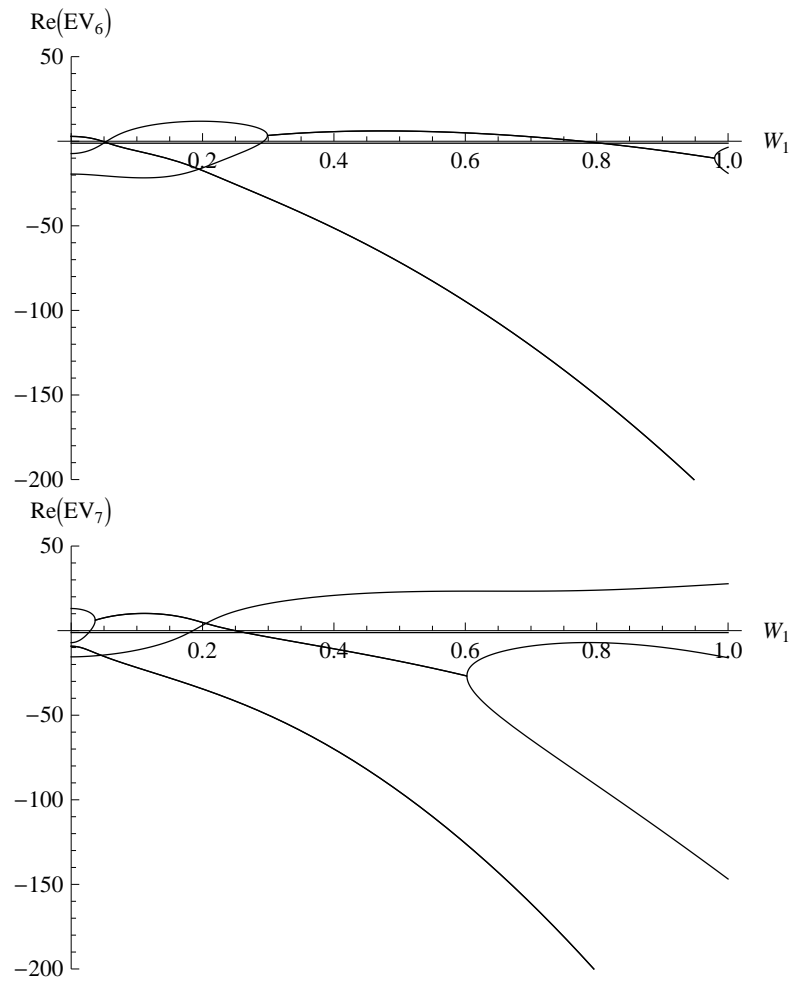


Abbildung 5.6: Realteil der Eigenwerte der Stabilitätsmatrix bei Trunkierung nach der 6. bzw. 7. Ordnung in Abhängigkeit von u_1 .

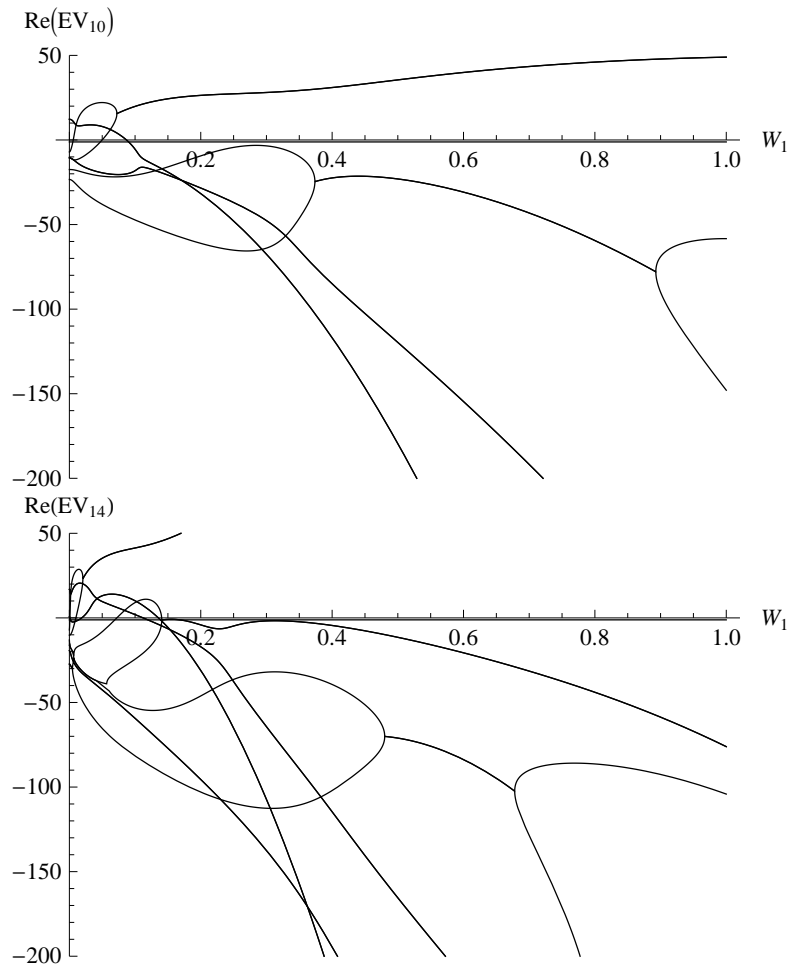


Abbildung 5.7: Realteil der Eigenwerte der Stabilitätsmatrix bei Trunkierung nach der 10. bzw. 14. Ordnung in Abhängigkeit von u_1 .

6 Das Wess-Zumino-Modell in 3D

6.1 Dimensionsreduktion des Wess-Zumino-Modells

Die Dimensionsreduktion soll von (3+1) Dimensionen mit Metrik (+ - - -) hin zu 3 Dimensionen mit Metrik (+ + +) erfolgen. Dazu wird die Zeitkoordinate durch eine Dimensionsreduktion entfernt und die Raumkoordinaten werden Wick-rotiert, also

$$x^\mu \rightarrow x^j \rightarrow -ix^j, \quad (6.1)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_j \rightarrow i\partial_j \quad (6.2)$$

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^j = -\partial_j \rightarrow -i\partial_j = -i\partial^j, \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow |\partial_\mu \phi|^2 = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) \rightarrow (-i\partial_j \phi)^* (i\partial^j \phi) = -|\nabla \phi|^2. \quad (6.4)$$

Damit bleibt der bosonische Anteil der Lagrangians unverändert, nur der kinetische Term wechselt das Vorzeichen, welches durch eine globale Multiplikation von \mathcal{L} mit -1 ausgeglichen wird. Wie in den Konventionen in Anhang A erläutert, läuft der Index μ hier und im Folgenden von 0 bis 3, der Index j hingegen von 1 bis 3.

Die Bedingung (2.33) zur Existenz einer Majorana-Darstellung ist in 3 raumartigen Dimensionen nicht möglich, zur Dimensionsreduktion eignet sich daher auch in 3+1 Dimensionen die Weyl-Darstellung (2.27) besser. Die Pauli-Matrizen, welche in 3 Dimensionen gerade die Rolle der γ -Matrizen innehaben, werden dabei entsprechend verallgemeinert,

$$\Gamma^0 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2, \quad \Gamma^j = i\sigma_2 \otimes \gamma^j \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow \Gamma_* = i\Gamma^0\Gamma^1\Gamma^2\Gamma^3 = -\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2, \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow -i\cancel{\partial}_4 = -i\Gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow i\sigma_2 \otimes \cancel{\partial}. \quad (6.7)$$

Das Vorzeichen von Γ_* wird hierbei so gewählt, dass die Projektionsoperatoren eine Diagonalstruktur besitzen und $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \Gamma_*)$ lauten. Die Dirac-Konjugation eines 3D-Spinors ψ und die eines 4D-Spinors

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$

lauten

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \quad (6.8)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma_0 = (\phi^\dagger, \chi^\dagger) = (\bar{\phi}, \bar{\chi}), \quad (6.9)$$

6 Das Wess-Zumino-Modell in 3D

wobei hier und im Folgenden die Indizes bezüglich der Chiralität der Übersichtlichkeit wegen weggelassen werden.

Die Bedingungen (2.32) an die unitäre Ladungskonjugationsmatrix \mathcal{C} sind in 3D nur für $\eta = +1$ erfüllbar und in der Darstellung $\gamma_j = \sigma_j$ ist $\mathcal{C} = i\sigma_2$ (bis auf eine komplexe Phase), wohingegen die 4-dimensionale Ladungskonjugation nach [18], Gleichung (3.46)

$$\mathcal{C}_4 = \sigma_3 \otimes i\sigma_2 = \sigma_3 \otimes \mathcal{C},$$

lautet. D. h. die Ladungskonjugation von Spinoren ist gegeben durch

$$\psi_c = \mathcal{C}\bar{\psi}^T = i\sigma_2\psi^* \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}_c = -\psi^T i\sigma_2, \quad (6.11)$$

$$\Psi_c = \mathcal{C}_4\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \phi_c \\ -\chi_c \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Inbesondere entspricht die Ladungskonjugation in 3D damit bis auf ein Vorzeichen gerade der chiralen Transformation (2.15), d.h. die dreidimensionale Ladungskonjugation kehrt nicht nur die elektrische Ladung, sondern auch die Chiralität um. Da σ_2 rein imaginär ist, erzeugt die zweifache Ladungskonjugation in 3D ein zusätzliches Minuszeichen,

$$(\psi_c)_c = -\psi. \quad (6.13)$$

In der Weyl-Darstellung lautet die Bedingung an einen Majorana-Spinor Ψ_m ($\Psi_c = \Psi$) für die Bispinorkomponenten $\chi = \phi_c$, d. h.

$$\Psi_m = \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_m = (\bar{\psi}, \bar{\psi}_c) \quad (6.14)$$

wobei $\psi =: \chi$ als ein 3D-Dirac-Spinor aufgefasst werden kann (auch wenn andere Linearkombinationen von χ und χ_c ebenso verwendet werden könnten – die Wahl $\psi = \chi$ erzeugt einen kanonischen kinetischen Term, wodurch eine direkte Identifikation von ψ als Fermion möglich ist).

Mit (2.32) und der Antikommutation von Spinoren lässt sich zeigen, dass

$$\bar{\psi}_c\chi_c = \psi^T\chi^* = -\bar{\chi}\psi, \quad (6.15)$$

$$\bar{\psi}_c\gamma_j\chi_c \stackrel{(2.32)}{=} -\psi^T\gamma_j^T\chi^* = \bar{\chi}\gamma_j\psi, \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}_c\cancel{\partial}\chi_c = -\bar{\chi}\cancel{\partial}\psi, \quad (6.17)$$

wobei in der letzten Gleichung eine partielle Integration durchgeführt und der Randterm als verschwindend angenommen wurde. Die erste Gleichheit hat hierbei nicht das Verschwinden eines Terms wie $\bar{\psi}_c\psi$ zur Folge, siehe (6.13).

6.1 Dimensionsreduktion des Wess-Zumino-Modells

Mögliche Lorentz-Skalare bestehend aus 4D-Majorana-Spinoren mit

$$H := \begin{pmatrix} \chi_c \\ \chi \end{pmatrix}$$

sind

$$\bar{\Psi}H = \bar{\psi}\chi_c + \overbrace{\bar{\psi}_c\chi}^{=(\bar{\psi}\chi_c)^\dagger} = 2\Re(\bar{\psi}\chi_c), \quad (6.18)$$

$$-i\bar{\Psi}\not{\partial}H = \bar{\psi}\not{\partial}\chi - \bar{\psi}_c\not{\partial}\chi_c \stackrel{(6.17)}{=} 2\Re(\bar{\psi}\not{\partial}\chi), \quad (6.19)$$

$$i\bar{\Psi}\Gamma_*H = -i(\bar{\psi}\chi_c - \bar{\psi}_c\chi) = 2\Im(\bar{\psi}\chi_c), \quad (6.20)$$

$$\bar{\Psi}\Gamma_*\not{\partial}H = -i(\bar{\psi}\not{\partial}\chi + \bar{\psi}_c\not{\partial}\chi_c) = 2\Im(\bar{\psi}\not{\partial}\chi), \quad (6.21)$$

wobei \Re und \Im als Real- und Imaginärteil bezüglich hermitescher Konjugation zu verstehen sind, d.h. $\Re(x) = \frac{1}{2}(x + x^\dagger)$, $\Im(x) = \frac{1}{2i}(x - x^\dagger)$.

Dadurch können die fermionischen Elemente des (3+1)D-Lagrangians des Wess-Zumino-Modells durch 3D-Dirac-Spinoren ausgedrückt werden:

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{\psi}\psi_c + \bar{\psi}_c\psi = 2\Re(\bar{\psi}\psi_c), \quad (6.22)$$

$$-i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi = \bar{\psi}\not{\partial}\psi - \bar{\psi}_c\not{\partial}\psi_c \stackrel{(6.17)}{=} 2\bar{\psi}\not{\partial}\psi, \quad (6.23)$$

$$i\bar{\Psi}\Gamma_*\Psi = -i(\bar{\psi}\psi_c + \bar{\psi}_c\psi) = 2\Im(\bar{\psi}\psi_c) = -2\Re(i\bar{\psi}\psi_c) \quad (6.24)$$

$$\bar{\Psi}\Gamma_*\not{\partial}\Psi \stackrel{(6.23)}{=} 0 \quad (6.25)$$

Damit reduziert sich der off-shell Lagrangian (4.18) (wobei ein globales Minus in die Metrik $d^3x \rightarrow -id^3x$ absorbiert wird) zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_j\phi\partial^j\phi^* + 2\bar{\psi}\not{\partial}\psi - |H|^2) - \Re(H^*W'(\phi)) + \Re(\bar{\psi}W''(\phi)\psi_c). \quad (4.24)$$

Die Supersymmetrie dieses Modells wird in Anhang B.2 nachgewiesen.

Interessant ist hier, dass der Massenterm $\bar{\psi}_c\psi$ eine elektrische Ladung unmöglich macht. Es gibt auch keine andere Linearkombination von χ und χ_c , durch die ein gewöhnlicher Massenterm $\bar{\psi}\psi$ erzeugt werden kann. Damit stellt sich natürlich die Frage, ob ein dreidimensionales $\mathcal{N}=2$ -SUSY-Modell überhaupt elektrisch geladene Teilchen beschreiben kann.

6.2 Flussgleichung

Für Γ_k wird die in Abschnitt 3.1 beschriebene NLO verwendet und in die Impulsraumdarstellung^(6.1) übergegangen:

$$\Gamma_k = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (|\mathcal{Z}_k(\partial_l)\partial_j\phi|^2 + 2(\mathcal{Z}_k\bar{\psi})\not{\partial}(\mathcal{Z}_k\psi) - |\mathcal{Z}_k H|^2) - \Re[H^*W'_k(\phi)] + \Re[\bar{\psi}W''_k(\phi)\psi_c] \right\} \quad (6.26)$$

$$= \int \frac{d^3q}{\Omega} \left\{ \frac{\mathcal{Z}_k(q)^2}{2} (q^2|\phi(q)|^2 + 2i\bar{\psi}(q)\not{p}\psi(q) - |H(q)|^2) - \Re[H^*(q)W'_k(q)] + \int \frac{d^3q'}{\Omega} \Re[\bar{\psi}(q)W''_k(q+q')\psi_c(q')] \right\} \quad (6.27)$$

Mit $W_k^{(n)}(p)$ sind die Fouriertransformationen von $W_k^{(n)}(\phi(x))$ gemeint,

$$W_k^{(n)}(p) := \int d^3x W_k^{(n)}(\phi(x)) e^{ipx} \quad (6.28)$$

insbesondere gilt

$$\frac{\delta}{\delta\phi(q)} W_k^{(n)}(p) = W_k^{(n+1)}(p) \Omega \delta(p-q).$$

Da Γ_k reellwertig ist, sind $\frac{\delta}{\delta\phi^*}\Gamma = \left(\frac{\delta}{\delta\phi}\Gamma\right)^*$ und $\Gamma\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} = \overline{\left(\frac{\delta}{\delta\psi}\Gamma\right)}$. Damit genügt die Berechnung von

$$\frac{\delta}{\delta\phi(p)}\Gamma = \frac{\mathcal{Z}_k(p)^2}{2} p^2 \phi^*(p) - \frac{1}{2} H^*(p) W''_k(p) + \frac{1}{2} (\bar{\psi} * \psi_c)(p) W''_k(p), \quad (6.29)$$

$$\frac{\delta}{\delta H(p)}\Gamma = -\frac{\mathcal{Z}_k(p)^2}{2} H^*(p) - \frac{1}{2} W'_k(p), \quad (6.30)$$

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(p)}\Gamma = \mathcal{Z}_k(p)^2 i\not{p}\psi(p) + (W''_k * \psi_c)(p). \quad (6.31)$$

Hier bezeichnet $*$ die Faltung $(a * b)(p) := \int a(q)b(p-q) d^3q/\Omega$. Der Fluss von \mathcal{Z}_k^2 und W'_k kann damit aus den Hilfsfeldern durch

$$\partial_k \mathcal{Z}_k^2(p) = -2 \int \frac{d^3q}{\Omega} \frac{\delta^2(\partial_k\Gamma)}{\delta H(p)\delta H^*(q)} \Big|_{H,\psi=0}, \quad (6.32)$$

$$\partial_k W'_k(p) = -2 \frac{\delta(\partial_k\Gamma)}{\delta H^*(p)} \Big|_{H,\psi=0} \quad (6.33)$$

^(6.1) Das Phasenraumvolumen Ω wird hierbei der Fouriertransformation in den Ortsraum angerechnet, d.h. $f(p) = \int d^3x f(x) e^{-ipx}$ und $f(x) = \int \frac{d^3p}{\Omega} f(p) e^{ipx}$. Da über den gesamten \mathbb{R}^3 integriert wird, ist $\Omega = (2\pi)^3$. Weitere Details der Umrechnung in den Impulsraum sind in Anhang B.3 zu finden.

bestimmt werden. Aus $\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(q)}\frac{1}{2}(\bar{\psi} * \psi_c)(p) = \psi_c(p - q)$ folgt dann

$$\Gamma^{(2)}(p, q) =: \underbrace{\begin{pmatrix} A & B & | & 0 \\ B^T & D & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & E \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{B}} + \underbrace{\begin{pmatrix} F(\psi, \bar{\psi}) & 0 & | & C(\psi, \bar{\psi}) \\ 0 & 0 & | & 0 \\ \hline -C^T & 0 & | & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{F}} \quad (6.34)$$

wobei $\Gamma^{(2)}$ in einen bosonischen Anteil \mathcal{B} und einen (spinorabhängigen) fermionischen Anteil \mathcal{F} aufgeteilt wird mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q) \begin{pmatrix} -H^*(p)W_k'''(p) & \mathcal{Z}_k(p)^2 p^2 \\ \mathcal{Z}_k(p)^2 p^2 & -H(p)(W_k'''(p))^* \end{pmatrix}, \\ B &= \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q) \begin{pmatrix} 0 & -W_k''(p) \\ -(W_k'')^*(p) & 0 \end{pmatrix}, \\ D &= \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q) \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{Z}_k(p)^2 \\ -\mathcal{Z}_k(p)^2 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{Z}_k(p)^2 \sigma_1 \cdot \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q), \\ E &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (W_k''(p - q))^* \mathcal{C}^\dagger & i\mathcal{Z}_k(p)^2 \not{p} \cdot \tilde{\delta}(p - q) \\ -i\mathcal{Z}_k(p)^2 \not{p} \cdot \tilde{\delta}(p - q) & W_k''(p - q)\mathcal{C} \end{pmatrix}, \\ F &= \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q) \begin{pmatrix} (\bar{\psi} * \psi_c)W_k^{(4)} & 0 \\ 0 & (\bar{\psi}_c * \psi)(W_k^{(4)})^* \end{pmatrix}(p), \\ C &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \psi_c^T(p - q)W_k'''(p) \\ -\bar{\psi}_c(p - q)(W_k'''(p))^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

wobei die Abkürzung $\tilde{\delta}(p) := \Omega \cdot \delta(p)$ eingeführt wurde.

Der Regulator R_k soll die Supersymmetrie nicht brechen. Dies kann, wie in Abschnitt 4.4.6 erläutert, dadurch bewirkt werden, dass der Regulator die Masse $m = W''|_{\phi=0}$ und die Wellenfunktionsrenormierung verschiebt. Also ist

$$R_k = \begin{pmatrix} R_B(k, p) & 0 \\ 0 & R_F(k, p) \end{pmatrix} \mathcal{Z}_k(p)^2, \quad (6.35)$$

$$R_B = \frac{1}{2}\tilde{\delta}(p - q) \begin{pmatrix} p^2 r_2(k, p) & r_1(k, p) \\ r_1(k, p) & r_2(k, p) \end{pmatrix} \otimes \sigma_1, \quad (6.36)$$

$$R_F = \begin{pmatrix} r_1(k, p - q)\mathcal{C}^\dagger & i r_2(k, p)\not{p} \cdot \tilde{\delta}(p - q) \\ -i r_2(k, p)\not{p} \cdot \tilde{\delta}(p - q) & r_1(k, p - q)\mathcal{C} \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

und die Inverse zu $\Gamma^{(2)} + R_k$ kann durch die Inverse von $\Gamma^{(2)}$ gefolgt von der Substitution $\mathcal{Z}_k^2 \rightarrow \mathcal{Z}_k^2(1 + r_2)$ und $W'' \rightarrow W'' + \mathcal{Z}_k^2 r_1$ berechnet werden.

6 Das Wess-Zumino-Modell in 3D

Die vollständige Flussgleichung für Γ_k könnte von Hand berechnet werden^(6.2). Da aber lediglich Flussgleichungen für \mathcal{Z}_k^2 und W_k' zur Beschreibung der NLO notwendig sind, die aus den Projektionen (6.32) und (6.33) durch die Hilfsfelder bei verschwindendem Fermionenfeld ψ bestimmt werden können, genügt die Bestimmung von $(\Gamma^{(2)} + R_k)^{-1}|_{\psi=0}$. Für $\psi = 0$ ist $\mathcal{F}|_{\psi=0} = 0$, sodass die Blockdiagonalstruktur von \mathcal{B} zur Invertierung genutzt werden kann. Die Superspur vereinfacht sich dann zu

$$\text{STr} \left[(\Gamma^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_k R_k \right] |_{\psi=0} = \text{Tr} \left[(Q + R_B)^{-1} \partial_k R_B \right] - \text{Tr} \left[(E + R_F)^{-1} \partial_k R_F \right]$$

Da $(Q + R_B)(q, q') \propto \tilde{\delta}(q - q')$ ist, müssen in der folgenden Rechnung die Impulsabhängigkeiten nicht explizit angegeben werden, der einzusetzende Impuls ist immer q . Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} M &:= W_k''(q) + r_1(k, q) \mathcal{Z}_k(q)^2, & \tilde{\mathcal{Z}}_k(q)^2 &:= (1 + r_2) \mathcal{Z}_k^2, & P &:= \tilde{\mathcal{Z}}_k(q) q \\ M_{\pm}^2 &:= M^2 \pm \tilde{\mathcal{Z}}_k(q)^4 q^2, & H_k &:= H(q) \tilde{\mathcal{Z}}_k(q)^2, & g_k &:= W_k(q)''' \end{aligned} \quad (6.38)$$

ergeben sich:

$$2(Q + R_B) = \begin{pmatrix} P^2 & -M \\ -M & -\tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \end{pmatrix} \otimes \sigma_1 - g_k \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} H^* & \\ & H \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

$$2 \det(Q + R_B) = \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 (M_+^4 - g^2 |H_k|^2) =: \frac{\tilde{\mathcal{Z}}_k}{d_B} \quad (6.40)$$

$$\Rightarrow (Q + R_B)^{-1} = 2d_B \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 & -M \\ -M & M^2/\tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} gH_k & M_+^2 \\ M_+^2 & gH_k^* \end{pmatrix} - \frac{1}{M^2} \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_1}_{=: \mathcal{H}} \quad (6.41)$$

Da für den Fluss aus den Hilfsfeldern nur H -abhängige Terme beitragen können, ist die

^(6.2) Die Formel

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix},$$

zur Invertierung blockstrukturierter Matrizen ist gültig für alle invertierbaren quadratischen Matrizen A und D , und die Neumann-Reihe

$$(\mathcal{B} + \mathcal{F})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathcal{B}^{-1}\mathcal{F})^k \mathcal{B}^{-1}$$

ist eine endliche Summe, da \mathcal{F} ausschließlich aus Grassmann-wertigen Spinoren besteht, d.h. \mathcal{F} ist eine nilpotente Matrix. Somit kann die Inversion von $\Gamma^{(2)}$ in kleinere Schritte aufgespalten werden.

Inversion von $(E + R_F)$ überflüssig, mit $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr} A \cdot \text{Tr} B$ gilt

$$\frac{\delta}{\delta H^*(p)} \partial_k \Gamma_k = \frac{\delta}{\delta H^*(p)} d_B \text{Tr} [\mathcal{H} \partial_k R_B] \quad (6.42)$$

$$= \frac{\delta}{\delta H^*(p)} d_B \text{Tr} \begin{pmatrix} M \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) + P^2 \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2) & -\tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) + M \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2) \\ -M^2 / \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) - M \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2) & M \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) - M^2 / \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2) \end{pmatrix} \\ \cdot \text{Tr} \begin{pmatrix} M_+^2 & g_k H_k \\ g_k H_k^* & M_+^2 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

$$= \int \frac{d^3 q}{\Omega} 2M_+^2 [2M \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) + \underbrace{(P^2 - M^2 / \tilde{\mathcal{Z}}_k^2)}_{=-M_-^2 / \tilde{\mathcal{Z}}_k^2} \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2)](p) \underbrace{\frac{\delta}{\delta H^*(p)}}_{=\tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \frac{\delta}{\delta H_k^*(p)}} d_B \quad (6.44)$$

$$= 2M_+^2 (2M \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) - M_-^2 \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2)) g_k^2 d_B^2 H_k|_p. \quad (6.45)$$

Für $H = 0$ verschwindet dieser Term, womit die Flussgleichung des Superpotentials

$$\partial_k W_k(\phi) = 0 \quad (6.46)$$

lautet. Diese Eigenschaft kann zu jeder beliebigen Ordnung der Ableitungsentwicklung gezeigt werden und gilt somit in der exakten Theorie. Dieses Ergebnis entspricht gerade der Nicht-Renormierbarkeit des Modells.

Mit

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta H_k^*} d_B \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta H_k} = g^2 d_B^2 + 2g^4 d_B^3 |H_k|^2$$

ergibt sich für die Wellenfunktionsrenormierung der Fluss

$$\partial_k \mathcal{Z}_k^2|_p = -4g^2 \underbrace{d_B^2|_{H=0}}_{=1/M_+^8} M_+^2 (2M \tilde{\mathcal{Z}}_k^2 \partial_k (r_1 \mathcal{Z}_k^2) - M_-^2 \partial_k (r_2 \mathcal{Z}_k^2))|_p \quad (6.47)$$

Nun wird eine im Ortsraum konstante Wellenfunktionsrenormierung angesetzt, d.h.

$$\mathcal{Z}_k^2(p) = \mathcal{Z}_k^2 \cdot \tilde{\delta}(p).$$

Die Flussgleichung für \mathcal{Z}_k^2 ergibt sich dann aus Gleichung (6.47) durch Integration über alle Impulse. Aufgrund der Richtungsunabhängigkeit der Regulatoren kann das Impulsintegral in Kugelkoordinaten zu $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2$ vereinfacht werden.

Im Folgenden werden drei Regulatoren genutzt:

$$\text{CS: } r_1 = k, \quad r_2 = 0 \quad (6.48)$$

$$\text{KP: } r_1 = 0, \quad r_2 = \left| \frac{k}{p} - 1 \right| \cdot \theta \left(\frac{k^2}{p^2} - 1 \right) \quad (6.49)$$

$$\text{KS: } r_1 = 0, \quad r_2 = \left(\frac{k^2}{p^2} - 1 \right) \cdot \theta \left(\frac{k^2}{p^2} - 1 \right) \quad (6.50)$$

Für die ersten beiden Regulatoren ergibt sich:

$$\text{CS: } \partial_k \mathcal{Z}_k^2 = -\frac{g^2}{2\pi} \frac{\partial_k(k\mathcal{Z}_k^2)}{\mathcal{Z}_k^2 (k\mathcal{Z}_k^2 + m)^2}, \quad (6.51)$$

$$\text{KP: } \partial_k \mathcal{Z}_k^2 = -\frac{4g^2}{\pi^2} \frac{k^2 \mathcal{Z}_k^3 (k^2 \mathcal{Z}_k^4 - m^2) \partial_k(k\mathcal{Z}_k)}{(k^2 \mathcal{Z}_k^4 + m^2)^3} \quad (6.52)$$

Die *anomale Dimension* $\eta = -(\partial_t \mathcal{Z}_k^2)/\mathcal{Z}_k^2 = -k(\partial_k \mathcal{Z}_k^2)/\mathcal{Z}_k^2$ kann für $k = 0$, $\mathcal{Z}_k^2 \neq \infty$ analytisch bestimmt werden und ergibt sich zu $\eta = 0$, d. h. die Wellenfunktionsrenormierung friert für $k \rightarrow 0$ ein. Für $m \neq 0$ kann durch die Reskalierung $g \rightarrow \sqrt{m} g$ und $k \rightarrow m k$ zu massenunabhängigen Flussgleichungen übergegangen werden, so dass im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $m = 1$ gerechnet werden kann.

6.3 1-loop-Störungsrechnung

Die 1-loop-Störungstheorie ergibt sich nach Abschnitt 3.2 durch die Ersetzung $\mathcal{Z}_k = 1$ auf den rechten Seiten der Flussgleichungen. Für den CS-Regulator ergibt dies

$$\partial_k \left(\mathcal{Z}_k^{(1\text{-loop})} \right)^2 = -\frac{g^2}{2\pi} \frac{1}{(k+1)^2} \quad (6.53)$$

$$\Rightarrow \left(\mathcal{Z}_k^{(1\text{-loop})} \right)^2 = 1 - \frac{g^2}{2\pi(k+1)} \Big|_{k=0}^\Lambda \quad (6.54)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}_0^{(1\text{-loop})} \stackrel{\Lambda \rightarrow \infty}{=} \sqrt{1 + \frac{g^2}{2\pi}} \stackrel{g \approx 0}{\approx} 1 + \frac{1}{4\pi} g^2 - \frac{1}{8\pi} g^4 + \mathcal{O}(g^6). \quad (6.55)$$

Auch für die anderen beiden Regulatoren ergibt sich für $\Lambda \rightarrow \infty$ dasselbe $\mathcal{Z}_0^{(1\text{-loop})}$.

6.4 Analytische Lösung

Für den Callan-Symanzik-Regulator (6.48) kann die Flussgleichung (6.51)

$$\Rightarrow \partial_k \mathcal{Z}_k = -\frac{g^2 \mathcal{Z}_k}{4\pi \mathcal{Z}_k^2 + (2g^2 + 8\pi \mathcal{Z}_k^4)k + 4\pi k^2 \mathcal{Z}_k^6} \quad (6.56)$$

analytisch gelöst werden. Hierzu wird zunächst die Differentialgleichung der Umkehrfunktion $k(\mathcal{Z})$ aufgestellt,

$$k'(\mathcal{Z}) = -\frac{2}{g^2 \mathcal{Z}} (2\pi \mathcal{Z}^6 k(\mathcal{Z})^2 + (g^2 + 4\pi \mathcal{Z}^4)k(\mathcal{Z}) + 2\pi \mathcal{Z}^2), \quad (6.57)$$

welche eine *Riccati-Differentialgleichung* ist. Deren Lösung zur Anfangsbedingung $\mathcal{Z}_\Lambda = 1 \Rightarrow k(1) = \Lambda$ lautet

$$k(\mathcal{Z}) = \frac{g^2 \Lambda - \pi(\Lambda + 1)(\mathcal{Z}^4 - 1)}{\mathcal{Z}^2 (g^2 + \pi(\Lambda + 1)(\mathcal{Z}^4 - 1))} \quad (6.58)$$

und lässt sich für $\mathcal{Z} > 0$ eindeutig invertieren. Für $k = 0$ ergibt dies

$$\mathcal{Z}_0 = \sqrt[4]{1 + \frac{g^2}{\pi} \frac{\Lambda}{1+\Lambda}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \sqrt[4]{1 + \frac{g^2}{\pi}} \stackrel{g \approx 0}{\approx} 1 + \frac{1}{4\pi} g^2 - \frac{3}{16\pi} g^4 + \mathcal{O}(g^6). \quad (6.59)$$

6.5 Masselose Theorie

Für den Sonderfall $m = 0$ ergeben sich für alle drei Regulatoren Flussgleichungen der Form

$$\partial \mathcal{Z}_k = -\frac{g^2 \mathcal{Z}_k}{a g^2 k + b k^2 \mathcal{Z}_k^6}. \quad (6.60)$$

Auch diese kann wieder durch die Umkehrfunktion gelöst werden, es ergibt sich

$$k(\mathcal{Z}_k) = \frac{(a - 6)g^2}{b(\mathcal{Z}_k^a - \mathcal{Z}_k^6)}. \quad (6.61)$$

Für $a \neq 6$ ist $k = 0 \Leftrightarrow |\mathcal{Z}_k| = \infty$, d. h. in der masselosen Theorie divergiert die Wellenfunktionsrenormierung.

Ein interessanter Lösungsansatz folgt aus der Skalierung von g mit m :

Aus der Lösung für jede noch so kleine nichtverschwindende Masse $m > 0$ kann die Lösung zu einer beliebig großen Masse bestimmt werden. Durch Linearisierung der Flussgleichung der Umkehrfunktion $k(\mathcal{Z}_k)$ in m kann für den CS-Regulator eine analytische Näherungslösung für $k(\mathcal{Z}_k)$ bestimmt werden. Wird diese erneut in m linearisiert so ergibt sich für $k = 0$ exakt die analytische Lösung. Möglicherweise kann dieser Ansatz auch für andere Regulatoren verfolgt werden. Die Flussgleichung aus dem KP-Regulator besitzt kein in m lineares Glied, es muss also bis $\mathcal{O}(m^2)$ entwickelt werden. Auch hier ist (mit Mathematica) eine analytische Näherungslösung möglich, die jedoch aus mehreren Besselfunktionen besteht. Eine Entwicklung bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in m mit anschließender Invertierung nach \mathcal{Z}_0^2 steht daher aus Zeitgründen noch aus. Mögliche Fehler der so erhaltenen Lösung sind möglicherweise durch $m \rightarrow 1$ und anschließend $g^2 \rightarrow g^2/m$ kompensierbar.

6.6 Ergebnisse

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 wird der Fluss der Wellenfunktionsrenormierung für die drei Regulatoren (6.48)-(6.50) zusammen mit der 1-loop-Störungsrechnung für unterschiedliche Kopplungen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Endpunkt \mathcal{Z}_0 fast unabhängig von der Regulatorwahl ist und die 1-loop-Störungstheorie mit wachsender Kopplung stärker vom tatsächlichen Fluss abweicht. Dies macht Abbildung 6.3 deutlich, welche $\mathcal{Z}_0(g)$ für $k = 0$ zeigt. Die regulatorabhängige Abweichung mit zunehmender Kopplung ist auf numerische Näherungen zurückzuführen.

In Tabelle 6.1 ist die Wellenfunktionsrenormierung \mathcal{Z}_0 für $k = 0$ unter Verwendung der drei Regulatoren (6.48)-(6.50) in Abhängigkeit von der Kopplung g angegeben. Bei $g \geq 4.5$ treten für den KS-Regulator zunehmend numerische Störungen auf. Die relativ geringe Abweichung der Zahlenwerte von den unter Verwendung des KP-Regulators erhaltenen Werten legt nahe, dass auch für $g \geq 4.5$ durch Finetuning der Numerik nur geringfügig abweichende Werte für den KS-Regulator bestimmt würden.

Unter der Annahme, dass die analytischen Werte, die durch den CS-Regulator bestimmt wurden, die genauesten sind, weicht die 1-loop Störungsrechnung für $g \leq 2$ weniger als 5% vom exakten Ergebnis ab. Für $g < 3$ liegt die Abweichung noch unter 10%. Demnach sollten für $g \geq 3$ mindestens auch 2-loop-Beiträge berücksichtigt werden.

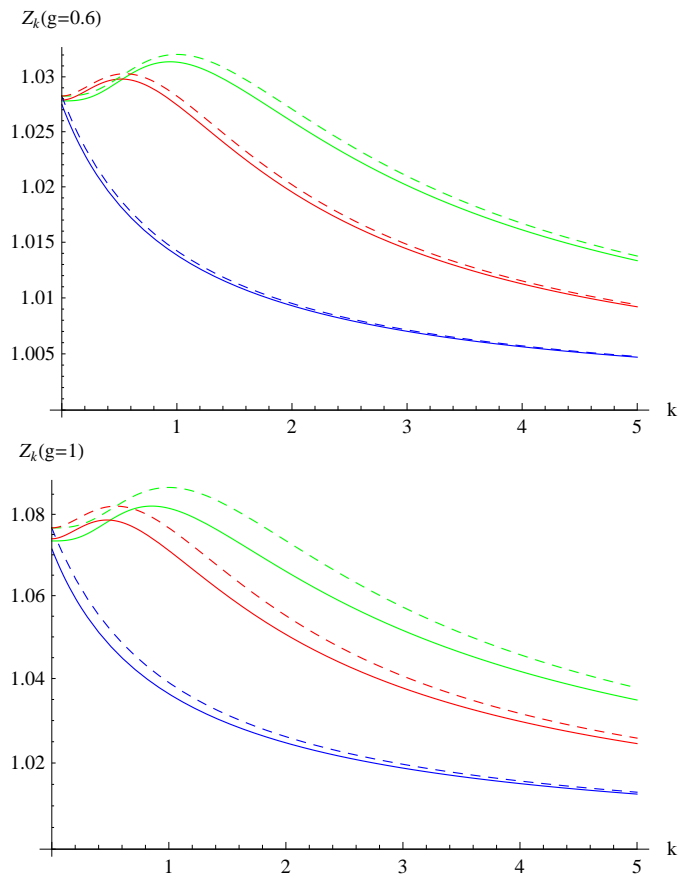


Abbildung 6.1: Fluss der Wellenfunktionsrenormierung Z_k für die volle NLO-Rechnung (durchgezogene Linien) und 1-loop-Störungsrechnung (gestrichelt) bei $g = 0.6$ (oben) und $g = 1.0$ (unten). Verwendete Regulatoren: CS (6.48) blau, KP (6.49) grün, KS (6.50) rot.

6 Das Wess-Zumino-Modell in 3D

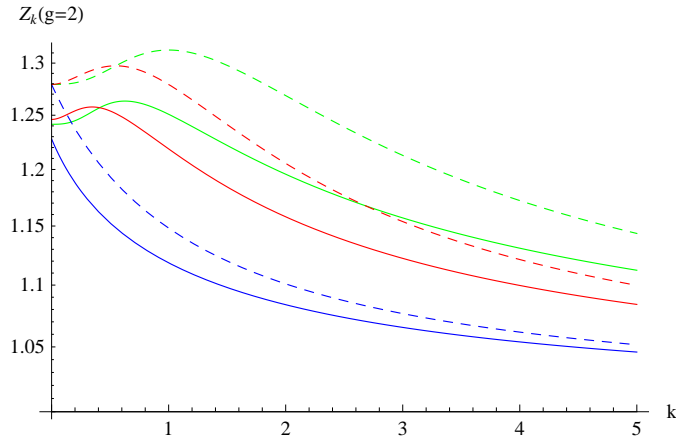


Abbildung 6.2: Fluss der Wellenfunktionsrenormierung Z_k für die volle NLO-Rechnung (durchgezogene Linien) und 1-loop-Störungsrechnung (gestrichelt) bei $g = 2.0$. Verwendete Regulatoren: CS (6.48) blau, KP (6.49) grün, KS (6.50) rot.

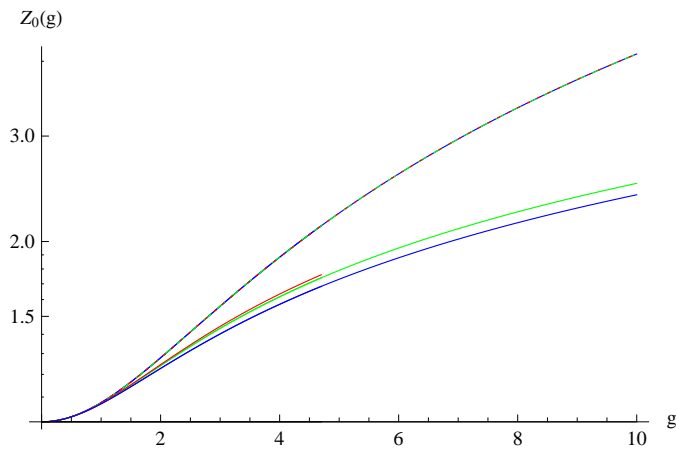


Abbildung 6.3: Wellenfunktionsrenormierung Z_0 bei $k = 0$ aus voller NLO-Rechnung (durchgezogene Linien) und 1-loop-Störungsrechnung (gestrichelt). Verwendete Regulatoren: CS (6.48) blau, KP (6.49) grün, KS (6.50) rot. Ab $g \approx 4.5$ nimmt für den KS-Regulator der numerische Aufwand deutlich zu.

g	\mathcal{Z}_0 , 1-loop	\mathcal{Z}_0 , CS	\mathcal{Z}_0 , KP	\mathcal{Z}_0 , KS
0.	1.	1.	1.	1.
0.2	1.00318	1.00317	1.00317	1.00317
0.4	1.01265	1.0125	1.01256	1.01258
0.6	1.02825	1.02749	1.0278	1.02788
0.8	1.0497	1.04745	1.04832	1.04856
1.	1.07664	1.07153	1.07341	1.07394
1.2	1.10868	1.09892	1.1023	1.1033
1.4	1.1454	1.12886	1.13423	1.13587
1.6	1.18635	1.16068	1.16848	1.17093
1.8	1.23112	1.19384	1.20441	1.20784
2.	1.2793	1.2279	1.24152	1.24604
2.2	1.33052	1.26251	1.27937	1.28506
2.4	1.38445	1.29742	1.31762	1.32456
2.6	1.44079	1.33241	1.35601	1.36423
2.8	1.49925	1.36735	1.39436	1.40386
3.	1.5596	1.40211	1.4325	1.44328
3.2	1.62164	1.43661	1.47034	1.48239
3.4	1.68517	1.4708	1.5078	1.52108
3.6	1.75003	1.50463	1.54482	1.55931
3.8	1.81608	1.53807	1.58138	1.59704
4.	1.88319	1.57111	1.61744	1.63423
4.2	1.95126	1.60373	1.653	1.67089
4.4	2.02019	1.63593	1.68805	1.707
4.6	2.08989	1.66771	1.72259	1.74256
4.8	2.16029	1.69907	1.75663	1.77759
5.	2.23132	1.73001	1.79017	1.96007
5.2	2.30292	1.76055	1.82323	1.84606
5.4	2.37505	1.79068	1.85582	
5.6	2.44765	1.82042	1.88794	
5.8	2.52068	1.84978	1.91961	
6.	2.59412	1.87876	1.95085	
6.2	2.66791	1.90738	1.98166	
6.4	2.74205	1.93564	2.01206	
6.6	2.81649	1.96356	2.04206	
6.8	2.89122	1.99115	2.07168	
7.	2.96621	2.0184	2.10092	
7.2	3.04145	2.04534	2.1298	
7.4	3.11691	2.07197	2.15832	
7.6	3.19258	2.09831	2.18651	
7.8	3.26845	2.12435	2.21436	
8.	3.3445	2.15011	2.24189	

Tabelle 6.1: Wellenfunktionsrenormierung \mathcal{Z}_0 bei $k = 0$ für die Regulatoren (6.48)-(6.50).
Ab $g \approx 4.5$ treten beim KS-Regulator starke numerische Störungen auf.

6 *Das Wess-Zumino-Modell in 3D*

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Susy-QM

In dieser Arbeit wurde aufbauend auf [6] die eindimensionale $\mathcal{N}=2$ -SUSY-Quantenmechanik mit euklidischer Wirkung in der LPA der Wetterich-Gleichung untersucht. Der Regulator R_k kann nach [6] aus dem Superraumformalismus hergeleitet werden und besitzt eine blockdiagonale Struktur, die bosonische und fermionische Freiheitsgrade nicht mischt. Im Gegensatz zu dem in [6] verwendeten Callan-Symanzik-artigen Regulator, der ausschließlich für ein ungebrochenes Superpotential $W(\phi)$ geeignet ist, wurde in dieser Arbeit ein Regulator mit scharfem UV-cutoff verwendet, für den die Impulsintegration der Flussgleichung analytisch durchgeführt wurde. Dieser Regulator sollte die Untersuchung einer gebrochenen Supersymmetrie ermöglichen.

Die sich ergebende Flussgleichung des Superpotentials

$$\partial_k W_k = \frac{1}{2\pi k} \arctan\left(\frac{W_k''}{k}\right) \quad (5.24)$$

erwies sich jedoch als numerisch instabil, wie auch die Fixpunktanalyse in Abschnitt 5.2 zeigt. Die Verwendung anderer Regulatoren kann die Genauigkeit der Ergebnisse daher möglicherweise verbessern.

Auch durch Finetuning der Numerik-Parameter könnte die Rechengenauigkeit verbessert werden, indem als Gütemaß der Abstand zur exakt berechenbaren Anregungsenergie genutzt wird. Ob diese Optimierung aber auch das Potential selbst exakter bestimmt, bleibt offen.

7.2 Wess-Zumino-Modell

Das in Abschnitt 6.1 von (3+1) Dimensionen nach (0+3) Dimensionen reduzierte und Wick-rotierte Wess-Zumino-Modell zeigt durch das Auftreten eines ladungskonjugierten Spinors in der Wirkung einen Mechanismus auf, der ein zwangsläufig elektrisch neutrales Fermion ohne Verwendung eines Majorana-Spinors beschreibt.

Dieses Modell wurde in Kapitel 6 in der NLO der Ableitungsentwicklung untersucht. Die im ursprünglichen Wess-Zumino-Modell bekannte Nicht-Renormierbarkeit äußert

sich dabei in einem auch in allen höheren Ordnungen nicht fließenden Superpotential $W_k(\phi) \equiv W(\phi)$. Ausschließlich die Wellenfunktionsrenormierung \mathcal{Z}_k^2 fließt in der NLO und reskaliert damit die Masse m und die Kopplungskonstante g .

Dabei zeigte sich, dass der Fluss hier im Gegensatz zu dem der SUSY-QM numerisch stabil und in geringer Abhängigkeit der Regulatorwahl berechnet werden kann. Selbst der nicht UV-beschränkte Callan-Symanzik-artige Regulator bildet hier keine Ausnahme^(7.1) und ermöglicht sogar eine analytische Lösung der Flussgleichung,

$$\mathcal{Z}_0|_{\text{CS}} = \sqrt[4]{1 + \frac{g^2}{\pi}}. \quad (6.59)$$

7.3 Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Fluss der Wellenfunktionsrenormierung des dimensionsreduzierten Wess-Zumino-Modells unter der Näherung konstanter Impulse bestimmt. Zur Bestimmung von Korrelatormassen ist aber ein asymptotisch exponentielles Abfallen des Korrelators für große Impulse und damit eine impulsabhängige Wellenfunktionsrenormierung erforderlich. Dies kann Gegenstand zukünftiger Arbeiten sein. Der Vergleich der Ergebnisse zu Gittersimulationen, die demnächst durchgeführt werden sollen, steht ebenfalls aus. Möglicherweise stellt auch die in Abschnitt 6.5 beschriebene Massenentwicklung ein Werkzeug zur Gewinnung guter Näherungslösungen der Wellenfunktionsrenormierung dar.

Auch der Nachweis der Supersymmetrie durch das Herleiten der Flussgleichungen aus den bosonischen oder fermionischen Feldern anstelle des Hilfsfelds, was für Theorien ohne bekannte off-shell-Formulierung unumgänglich wird, kann noch vorgenommen werden.

Wie nach den Arbeiten [6] und [8] auch diese Diplomarbeit verdeutlicht, bietet die Anwendung des Renormierungsgruppenfluss-Formalismus auf supersymmetrische Modelle vielversprechende Lösungsmöglichkeiten. Daher ist ein möglicher nächster Schritt, komplexere Modelle wie die supersymmetrische QED (SQED) oder das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) auf diese Weise zu untersuchen.

^(7.1) In einer nicht UV-endlichen Theorie wie der gebrochenen SUSY-QM ist die Verwendung des CS-Regulators nicht zulässig und würde zu fehlerhaften Ergebnissen führen. Die UV-Endlichkeit des dreidimensionalen Wess-Zumino-Modells wurde nicht untersucht, die deutliche Übereinstimmung des analytischen Ergebnisses mit numerischen Werten aus der Verwendung UV-beschränkter Regulatoren (siehe Tabelle 6.1) ist jedoch ein Indiz hierfür.

A Konventionen

In dieser Arbeit werden durchgängig *natürliche Einheiten* verwendet, d. h. die auftretenden Naturkonstanten werden gleich Eins gesetzt: $\hbar = 1, c = 1$. Dadurch haben Masse und Impuls dieselbe Einheit wie Energie, wobei in der Teilchenphysik die Einheit GeV gewählt wird. Längen und Zeiten besitzen die dazu inverse Einheit. Zur Umrechnung in das SI-System können z. B. in die Gleichung $\hbar c = 1$ die SI-Werte von \hbar (umgerechnet in GeV·s) und c eingesetzt werden, um von GeV^{-1} in m umrechnen zu können.

Die am häufigsten verwendeten Variablenbezeichnungen sind:

p, q, r	Impulskoordinaten
x, y, z	Ortskoordinaten
θ	Eine Grassmann-Variable, meist ein Majorana-Spinor
C^*, C^\dagger, C^T	C komplex konjugiert, hermitesch konjugiert, transponiert
$d = t + s$	d Dimensionen, davon t zeitartige ($\eta = +$) und s raumartige ($\eta = -$)
4D, 3D	3+1 (+ - - -) bzw. 0+3 (+ + +) Dimensionen
Ψ, ψ	ein Spinor in 4 bzw. 3 Dimensionen
Γ^μ, γ^i	Die Gamma-Matrizen in 4D bzw. 3D ($\mu = 0, 1, 2, 3, i = 1, 2, 3$)
$\bar{\psi} = \psi^\dagger \mathcal{A}$	ψ Dirackonjugiert (analog Ψ)
$\psi_c = \mathcal{C} \bar{\psi}^T$	ψ Ladungskonjugiert (analog Ψ)
$\mathcal{A} \propto \gamma^0 \dots \gamma^t$	(bzw. Γ) Die Dirac-Konjugationsmatrix

A Konventionen

B Ausführlichere Rechnungen

B.1 Herleitung der Wetterich-Gleichung (3.1)

(frei nach [5])

Die Skalenabhängigkeit von Γ_k wird über einen Zusatzterm

$$\Delta S_k[\varphi] := \frac{1}{2} \varphi R_k \varphi := \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \varphi(-q) R_k(q) \varphi(q) \quad (\text{B.1})$$

zur Wirkung $S \rightarrow S + \Delta S$ realisiert, was einem impulsabhängigen Massenterm entspricht. Dementsprechend wird die Zustandssumme (2.34) erweitert zu

$$Z_k[J] := \int \mathcal{D}\varphi \exp[-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + J\varphi]. \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist $J(x)$ wie in Gleichung (2.34) ein externes Quellfeld. Durch die Bedingungen (3.2)-(3.4) an den Regulator R_k ist für Z_Λ eine Sattelpunktsapproximation zulässig, es ergibt sich $Z_\Lambda[J] \approx \exp[-S[\phi] - \Delta S_\Lambda[\phi]]$, wobei $\phi = \langle \varphi \rangle$ der klassische Erwartungswert des Feldes ist. Damit $\Gamma_\Lambda = S$ ist, muss in (2.40) schließlich der divergierende Regulatorterm kompensiert werden:

$$\Gamma_k[\phi] := \sup_J (J\phi - W_k[J]) - \Delta S_k[\phi] \quad (\text{B.3})$$

Damit erhält auch die Bewegungsgleichung einen Zusatzterm,

$$J = \frac{\delta}{\delta\phi} (\Gamma_k + \Delta S_k) = \Gamma_k^{(1)} + R_k \phi, \quad (\text{B.4})$$

$$\Rightarrow J \frac{\delta}{\delta\phi} = \Gamma_k^{(2)} + R_k. \quad (\text{B.5})$$

Darüber hinaus folgt mit

$$\frac{\delta}{\delta J} \phi = \langle \varphi \otimes \varphi \rangle_{cJ} =: G_k$$

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \frac{\delta J}{\delta J} = \left(\frac{\delta}{\delta\phi} J \right) \left(\phi \frac{\delta}{\delta J} \right) \\ &= (\Gamma_k^{(2)} + R_k) G_k = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B Ausführlichere Rechnungen

die Gleichung

$$G_k = (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

Um $\partial_k \Gamma_k[\phi]$ zu berechnen, müssen $\partial_k W_k[J]$ und $\partial_k \Delta S_k[\phi]$ bestimmt werden:

$$\partial_k \Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \phi \partial_k R_k \phi = \frac{1}{2} \langle \varphi \rangle \partial_k R_k \langle \varphi \rangle, \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \partial_k W_k[J] &= \frac{1}{Z_k[J]} \partial_k Z_k[J] = \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\varphi (-\partial_k \Delta S_k) \exp[-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + J\varphi] \\ &= -\frac{1}{2} \langle \varphi \partial_k R_k \varphi \rangle_J \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Damit ergibt sich (verkürzt sei $J = J_k[\phi]$)

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k|_{\text{bosonisch}} &= \underbrace{(\partial_k J) \phi - \left(\frac{\overbrace{\delta W_k}^{=\phi}}{\delta J} \partial_k J + \partial_k W_k[J] \right)}_{=0} - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\langle \varphi \partial_k R_k \varphi \rangle_J - \langle \varphi \rangle \partial_k R_k \langle \varphi \rangle)}_{=\langle \varphi \partial_k R_k \varphi \rangle_{c,J} = \text{Tr}(G_k \partial_k R_k)} \\ &\stackrel{(\text{B.6})}{=} \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_k R_k \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Für fermionische Freiheitsgrade liefert eine ähnliche Rechnung unter Berücksichtigung der Grassmann-Wertigkeit dieselbe Gleichung, jedoch mit einem zusätzlichen Minuszeichen, d. h.

$$\partial_k \Gamma_k|_{\text{fermionisch}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_k R_k \right]. \quad (\text{B.11})$$

Durch die Superspur, bei der die fermionische Spur von der bosonischen Spur abgezogen wird, lässt sich die Wetterich-Gleichung damit zusammengefasst schreiben als

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_k R_k \right]. \quad \rightarrow (3.1)$$

B.2 Nachweis der Supersymmetrie im 3D-Wess-Zumino-Modell

Die (3+1)D-SUSY-Transformationen reduzieren sich mit $\alpha_4 = (\alpha_c^T, \alpha^T)^T$ in 3D zu

$$\delta_\alpha \phi = \bar{\alpha}_4 (1 - \Gamma_*) \Psi \rightarrow 2\bar{\alpha} \psi_c \quad (\text{B.12})$$

$$\delta_\alpha H = \bar{\alpha}_4 (1 - \Gamma_*) (-i\cancel{\partial}) \Psi \rightarrow -2\bar{\alpha}_c \cancel{\partial} \psi_c, \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= -i\cancel{\partial}(\Re\phi + i\Gamma_* \Im\phi) \alpha_4 + (\Re H + i\Gamma_* \Im H) \alpha_4 \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \delta \psi_c \\ \delta \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cancel{\partial} \phi \alpha + H^* \alpha_c \\ -\cancel{\partial} \phi^* \alpha_c + H \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

wobei sich konsistent $(\delta\psi)_c = \delta\psi_c$ ergibt, und die SUSY-Algebra $[\delta_\alpha, \delta_\beta] = 4\Re[\bar{\beta}\cancel{\partial}\alpha]$ lautet. Die kinetischen Terme des 3D-Lagrangians (4.24) transformieren damit zu

$$\begin{aligned} \delta(\partial_k \phi \partial^k \phi^*) &= 2\Re[\partial_k(\delta\phi) \partial^k \phi^*] = 4\Re[\bar{\alpha} \partial_k \phi^* \partial^k \psi_c] \\ &= -4\Re[\bar{\alpha}(\cancel{\partial}^2 \phi^*) \psi_c] + \partial_k \Re[4\bar{\alpha} \phi^* \partial^k \psi_c], \\ -\delta|H|^2 &= -2\Re[(\delta H^*) H] = 4\Re[\bar{\alpha} H \cancel{\partial} \psi] \\ &= -4\Re[\bar{\alpha}(\cancel{\partial} H) \psi] + \partial_k \Re[4\bar{\alpha} H \gamma^k \psi] \\ \delta(2\bar{\psi} \cancel{\partial} \psi) &= 4\Re[\bar{\psi} \cancel{\partial}(\delta\psi)] = -4\Re[\bar{\psi} \cancel{\partial}^2 \phi^* \alpha_c - \bar{\psi} \cancel{\partial} H \alpha] \\ &= 4\Re[\bar{\alpha}(\cancel{\partial}^2 \phi^*) \psi_c + \bar{\alpha}(\cancel{\partial} H) \psi]. \end{aligned}$$

Die Massen- und Wechselwirkungsterme transformieren zu

$$\begin{aligned} -\delta\Re[H^* W'(\phi)] &= -\Re[(\delta H)^* W'(\phi)] - \Re[H^* W''(\phi) \delta\phi] \\ &= 2\Re[\bar{\alpha} W'(\phi) \cancel{\partial} \psi - \bar{\alpha} H^* W''(\phi) \psi_c], \\ \delta\Re[\bar{\psi} W''(\phi) \psi_c] &= \Re[(\delta\bar{\psi}) W''(\phi) \psi_c + \bar{\psi} W'''(\phi) (\delta\phi) \psi_c + \bar{\psi} W''(\phi) (\delta\psi_c)] \\ &= \Re[(-\bar{\alpha}_c \cancel{\partial} \phi + \bar{\alpha} H^*) W'' \psi_c + \underbrace{\bar{\psi} W''' 2(\bar{\alpha} \psi_c) \psi_c}_{=0} + \bar{\psi} W''(\cancel{\partial} \phi \alpha + H^* \alpha_c)] \\ &= 2\Re[\bar{\alpha}(\partial_k W') \gamma^k \psi + \bar{\alpha} H^* W'' \psi_c] \\ &= -2\Re[\bar{\alpha} W' \cancel{\partial} \psi - \bar{\alpha} H^* W'' \psi_c] + \partial_k \Re[2\bar{\alpha} W' \gamma^k \psi] \end{aligned}$$

Und somit ändert sich \mathcal{L} ausschließlich um einen Divergenzterm

$$\delta\mathcal{L} = \partial_k 4\Re[(\bar{\alpha}_c \phi \partial^k + \bar{\alpha}(H + \frac{1}{2} W'(\phi)) \gamma^k) \psi], \quad (\text{B.15})$$

das Modell ist also auch nach der Dimensionsreduktion supersymmetrisch.

B.3 Fouriertransformationen

Die Fouriertransformation wird in dieser Arbeit als

$$f(x) = \int \frac{d^d p}{\Omega} \tilde{f}(p) e^{ipx}, \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{f}(p) = \int d^d x f(x) e^{-ipx} \quad (\text{B.17})$$

definiert, wobei das Phasenraumvolumen Ω aus

$$\Omega := \int d^d x \int d^d p e^{ipx} \quad (\text{B.18})$$

bestimmt wird. Wenn über den gesamten \mathbb{R}^d integriert wird, ist $\Omega = (2\pi)^d$. Im Folgenden und im Hauptteil der Arbeit wird auf die Tilde der Fouriertransformierten $\tilde{f}(p)$ verzichtet, da an der Variablen x bzw. p ersichtlich ist, ob die Funktion selbst oder ihre Fouriertransformierte gemeint ist. Die komplexe Konjugation einer Funktion ergibt sich mit (B.16) zu

$$f^*(x) = \int \frac{d^d p}{\Omega} f^*(p) e^{-ipx}, \quad (\text{B.19})$$

und jede Ortsableitung ∂_μ erzeugt einen Faktor ip_μ bzw. $-ip_\mu$:

$$\partial_\mu^l f(x) = \int \frac{d^d p}{\Omega} f(p) (ip)^\mu e^{ipx} \quad (\text{B.20})$$

$$\partial_\mu^l f^*(x) = \int \frac{d^d p}{\Omega} f^*(p) (-ip)^\mu e^{-ipx} \quad (\text{B.21})$$

Bei Produkten mehrerer Funktionen in einem Integral gilt

$$\int d^d x \prod_j f_j(x) = \int \prod_j \frac{d^d p_j}{\Omega} f_j(p) \underbrace{e^{ix \sum_j p_j}}_{=\Omega \delta(\sum_j p_j)}, \quad (\text{B.22})$$

womit

$$\begin{aligned} \int d^d x |\mathcal{Z}_k(\partial_k) H(x)|^2 &= \int d^d x \left| \sum_{n=0}^{\infty} (z_n^k \partial_k)^n H(x) \right|^2 \\ &= \int \frac{d^d p}{\Omega} \int \frac{d^d q}{\Omega} \underbrace{\left(\sum_n (z_n^k)^* (-ip)^n \right)}_{=\mathcal{Z}_k(-p)} H^*(p) \times \\ &\quad \times \underbrace{\left(\sum_m z_m^k (iq)^m \right)}_{=\mathcal{Z}_k(q)} H(q) \Omega \delta(-p + q) \\ &= \int \frac{d^d p}{\Omega} \mathcal{Z}_k(p)^2 |H(p)|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

folgt. Die Wellenfunktionsrenormierung wird als reellwertig angenommen, womit $\mathcal{Z}_k^*(-p) = \mathcal{Z}_k(p)$ genutzt werden kann.

Analoge Rechnungen ergeben

$$\int d^d x |\mathcal{Z}_k(\partial_k)\partial_\mu\phi(x)|^2 = \int \frac{d^d p}{\Omega} \mathcal{Z}_k(p)^2 |p\phi(p)|^2, \quad (\text{B.24})$$

$$\int d^d x (\mathcal{Z}_k(\partial_k)\bar{\psi}(x))\not{\partial}(\mathcal{Z}_k(\partial_k)\psi(x)) = \int \frac{d^d p}{\Omega} \mathcal{Z}_k(p)^2 \bar{\psi}(p)(i\not{p})\psi(p). \quad (\text{B.25})$$

Beim Wechselwirkungsterm ist auf die Vorzeichen zu achten, es ergibt sich

$$\int d^d x \bar{\psi}(x)W''(x)\psi_c(x) = \int \frac{d^d p}{\Omega} \int \frac{d^d q}{\Omega} \bar{\psi}(p)W''(p+q)\psi_c(q). \quad (\text{B.26})$$

B Ausführlichere Rechnungen

C Gruppentheorie

C.1 Lie-Gruppen

Jede Symmetrietransformation lässt sich mathematisch durch eine Gruppenoperation beschreiben. Die Definition einer Gruppe nebst den Bedeutungen für Symmetrien lautet:

Eine Gruppe (G, \bullet) ist definiert durch eine Menge G und eine Abbildung $\bullet : G \times G \rightarrow G$ mit den Eigenschaften

- *Neutrales Element: $\exists \mathbb{1} \forall a \in G : a \bullet \mathbb{1} = \mathbb{1} \bullet a = a$,
jede Symmetriegruppe beinhaltet den Spezialfall "nichts ändern",*
- *Inverses Element: $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = \mathbb{1}$,
jede Symmetrietransformation ist umkehrbar,*
- *Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in G : a \bullet b \in G$,
zwei hintereinander ausgeführte Symmetrietransformationen lassen sich durch eine einzelne Symmetrietransformation beschreiben,*
- *Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) =: a \bullet b \bullet c$.*

Nicht zwingend notwendig ist hingegen die Kommutativität $a \bullet b = b \bullet a$, deren Erfüllung eine Gruppe als *abelsch* definiert. Im Folgenden wird, wie allgemein üblich, das Verknüpfungssymbol \bullet weggelassen, sofern dessen Anwendung eindeutig ist.

Die Parameter ξ^a mit $a = 1, \dots, n$ einer kontinuierlichen Symmetrietransformation können so gewählt werden, dass aus der Wahl verschwindender Parameter $\xi^a = 0$ die identische Abbildung $G(0) = \mathbb{1}$ folgt. Darüber hinaus hängen kontinuierliche Symmetrietransformationen mathematisch glatt von ihren Parametern ab, d.h. sie bilden eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, womit eine solche Symmetriegruppe sogar eine *Lie-Gruppe* bildet. Einer Lie-Gruppe lässt sich auch eine *Lie-Klammer* $[\cdot, \cdot]$, der *Kommutator*

$$[A, B] := AB - BA \tag{C.1}$$

zuordnen, der im abelschen Fall identisch verschwindet. Der Kommutator erfüllt alle Bedingungen an eine Lie-Klammer, d.h. er ist bilinear, antikommutativ und erfüllt die *Jacobi-Identität*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \tag{C.2}$$

Da physikalische Systeme durch Hilbertraumvektoren $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ beschrieben werden und die Wahrscheinlichkeit des Übergangs eines Systems vom Zustand $|A\rangle$ in den Zustand $|B\rangle$ durch den Betrag des Skalarprodukts $|\langle A|B\rangle|$ bestimmt wird, dürfen physikalisch sinnvolle Symmetrietransformationen das Skalarprodukt für Übergangsamplituden nicht verändern. Dies läuft letztendlich darauf hinaus, dass die zugehörigen Gruppenelemente unitär^(3.1) und linear sind und daher im Folgenden als $u(\xi)$ bezeichnet werden. Die Unitarität spiegelt sich auch im Standardmodell der Teilchenphysik wieder, welches durch die Symmetriegruppen $SU(3)_{\text{QCD}} \times SU(2) \times U(1)_Y$ beschrieben wird^(3.2). In Abweichung von der Unitaritätsforderung genügt bei reellwertigen Größen wie den Ortskoordinaten eine orthogonale Gruppe^(3.3), wie gleich bei der Poincaré-Gruppe (Abschnitt D) zu sehen sein wird.

C.2 Darstellungen

Eine Abbildung D , die jedem Element der Gruppe G eindeutig ein Element aus einer Gruppe $\tilde{G} = D(G)$ zuordnet, ist ein *Homomorphismus*, wenn

$$\forall g, h \in G : D(g)D(h) = D(gh)$$

erfüllt ist. \tilde{G} wird dann als *Darstellung* der Gruppe G bezeichnet. Ist die Abbildung darüber hinaus auch eindeutig umkehrbar, handelt es sich um einen *Isomorphismus* bzw. eine *treue Darstellung*.

Lineare, N -dimensionale Darstellungen werden hierbei durch $N \times N$ -Matrizen beschrieben, im Spezialfall $N = \infty$ durch lineare Operatoren. Dabei muss $N \geq \dim(G)$ sein. Die *Dimension einer Lie-Gruppe* $\dim(G)$ ist gegeben durch die Anzahl n ihrer unabhängigen Parameter ξ^a . Lassen sich alle Elemente einer Gruppe in einer linearen Darstellung in Blockdiagonalf orm schreiben, wird die Darstellung *reduzibel* genannt, ansonsten *irreduzibel*. Jede der unendlich vielen reduzierbaren Darstellungen lässt sich durch die endlich vielen irreduzierbaren Darstellungen herleiten. Daher genügt eine Untersuchung der irreduzierbaren Darstellungen einer Gruppe, um diese vollständig zu beschreiben.

^(3.1) Unitär bedeutet hierbei, dass $u^\dagger u = \mathbf{1}$ ist, wobei u^\dagger zu u hermitesch konjugiert ist, was über die Beziehung $\langle A|uB\rangle = \langle u^\dagger A|B\rangle$ definiert ist.

^(3.2) Dabei bildet $SU(2) \times U(1)_Y$ die elektroschwache Wechselwirkung.

^(3.3) Ein Operator o ist orthogonal, wenn $o^T o = \mathbf{1}$ mit Transponiertem $o^T = (o^\dagger)^*$.

C.3 Generatoren, Lie-Algebren

Die Elemente $u(\xi)$ der Lie-Gruppe können in einer Taylorreihe um die Identität herum entwickelt werden,

$$u(\xi) = \mathbb{1} + it_a \xi^a + \mathcal{O}(|\xi|^2). \quad (\text{C.3})$$

Hierbei wird, wie ab sofort immer, die Einsteinsche Summenkonvention angewandt, d.h. über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren. Der Laufbereich von a ist $1, 2, \dots, n$, und die $n = \dim(G)$ hermiteschen^(3.4) Elemente $t_a = -i \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi^a} \Big|_{\xi=0}$ werden als *Generatoren* der Lie-Gruppe bezeichnet, da sich aus diesen infinitesimalen Transformationen durch

$$u(\xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + it_a \frac{\xi^a}{M} \right)^M \quad (\text{C.4})$$

$$= \exp(it_a \xi^a) \quad (\text{C.5})$$

die endlichen Transformationen vollständig beschreiben lassen. Die Gruppeneigenschaften spiegeln sich in den Generatoren dadurch wieder, dass diese die *Lie-Algebra*

$$[t_a, t_b] = if_{ab}{}^c t_c \quad (\text{C.6})$$

mit *Strukturkonstanten* $f_{ab}{}^c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Im Falle einer abelschen Lie-Gruppe verschwinden diese Konstanten vollständig. Gruppen mit derselben Lie-Algebra sind zumindest lokal isomorph und bilden daher Darstellungen derselben Lie-Gruppe. Die zu einer Lie-Gruppe gehörige Lie-Algebra wird meist durch dieselben Zeichen, jedoch in kleinen Frakturbuchstaben, bezeichnet, z.B. gehört zur Gruppe $SU(N)$ die Algebra $\mathfrak{su}(N)$.

Der *Rang* einer Lie-Gruppe ist festgelegt durch die Anzahl gleichzeitig kommutierender Generatoren. Darüber hinaus kann es Operatoren geben, die mit allen Generatoren vertauschen. Diese Operatoren werden in der Physik als *Casimir-Operatoren* bezeichnet. Die möglichen Eigenwerte der Casimir-Operatoren charakterisieren die unterschiedlichen Darstellungen.

^(3.4) hermitesch: $h^\dagger = h$

D Die Poincaré-Gruppe

Jede Theorie, die mit der speziellen Relativitätstheorie (SRT) vereinbar ist, muss invariant gegenüber den Transformationen der Poincaré-Gruppe sein. Diese besteht aus der Menge der Transformationen, die das Linienelement $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ nicht ändern. Der Laufbereich von μ und ν ist in (3+1) Dimensionen 0, 1, 2, 3 und mit $x^0 = c \cdot t$ wird die Zeitrichtung beschrieben. In der Teilchenphysik wird die *Minkowski-Metrik* $\eta_{\mu\nu}$ üblicherweise als $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, kurz (+ - - -) gewählt. Der wesentliche Unterschied zur allgemeinen Relativitätstheorie (ART) besteht in der Konstanz der Metrik, welche in der ART zum metrischen Tensor $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x)$ verallgemeinert wird. Die Metrik ermöglicht das Umwandeln von kovarianten Vektoren x^μ in kontravariante Vektoren $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ und umgekehrt.

Eine zunächst beliebige Koordinatentransformation lautet

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{O}(x^2) \\ \Rightarrow dx^\mu &\rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu + \mathcal{O}(dx^2), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\text{womit } ds^2 \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma + \mathcal{O}(dx^2) \stackrel{!}{=} ds^2. \quad (\text{D.2})$$

Die nichtlinearen Terme müssen in der SRT also wegfallen und

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \stackrel{!}{=} \eta_{\rho\sigma}. \quad (\text{D.3})$$

Die Menge aller 4×4 -Matrizen der Λ , die diese Bedingungen erfüllt, wird (zusammen mit der Matrixmultiplikation) *Lorentz-Gruppe* genannt und, da die Λ orthogonal sind, mit $O(3,1)$ bezeichnet. Sie besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, d. h. vier in sich geschlossenen Halbgruppen. Von diesen Komponenten enthält nur eine die $\mathbf{1}$ und bildet damit selbst eine richtige Gruppe, die *eigentliche orthochrone Lorentzgruppe*. Alle Matrizen dieser Untergruppe erfüllen zusätzlich zu (D.3) auch

$$\Lambda_{00} \geq 1, \quad \det \Lambda = 1, \quad (\text{D.4})$$

d. h. die Zeitrichtung und die Händigkeit der Raumachsen bleiben unverändert. $\det \Lambda = 1$ wird mit der Wort *speziell* identifiziert, womit die Bezeichnung $SO_+(3,1)$ zutreffend ist. Die Transformationen der anderen Zusammenhangskomponenten der $O(3,1)$ lassen sich durch Multiplikation der $SO_+(3,1)$ -Elemente mit der Zeitumkehrmatrix $\mathcal{T} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ und/oder der Paritätstransformation $\mathcal{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ erreichen. Letztere ist nur bei einer geraden Raumzeitdimension gleichbedeutend mit einer Raumspiegelung, im Allgemeinen muss eine ungerade Anzahl von Raumkoordinaten gespiegelt

D Die Poincaré-Gruppe

werden.

Die Lorentz-Gruppe beschreibt zunächst nur die *Lorentz-Boosts* Λ , zusammen mit den Translationen a bildet sie im semidirekten Produkt die *Poincaré-Gruppe* (Λ, a) mit der Gruppenmultiplikation

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') = (\Lambda \cdot \Lambda', a + \Lambda' \cdot a'). \quad (\text{D.5})$$

D.1 Die Poincaré-Algebra

Die Transformationen der Poincaré-Gruppe lassen sich durch die sechs Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentzgruppe sowie die vier Generatoren P^μ der Translationsgruppe darstellen zu

$$(\Lambda, a) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - ia_\mu P^\mu\right) \quad (\text{D.6})$$

$$\text{mit } [P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (\text{D.7})$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (\text{D.8})$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}). \quad (\text{D.9})$$

Sogenannte *Lorentzskalare* sind dadurch definiert, dass sie mit den $M^{\mu\nu}$ vertauschen, in der kovarianten Formulierung sind dies einfach alle Ausdrücke, die keine äußeren Lorentzindizes tragen. Da die P^μ untereinander vertauschen, bildet das Lorentzskalar $P^2 = P_\mu P^\mu$ einen Casimir-Operator. Ein weiterer Casimir-Operator lässt sich mit den $M^{\mu\nu}$ bilden, indem der Pauli-Lubanski-Vektor $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ quadriert wird, $W^2 = W_\mu W^\mu$. Dabei ist $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{0123} = 1$, und das Vertauschen zweier Indizes bewirkt einen Vorzeichenwechsel. Dass W^2 auch mit den P^μ kommutiert, wird durch $P^\mu W_\mu = 0$ klar.

Die $M^{\mu\nu}$ lassen sich in die äußeren Drehungen $L^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$ und die inneren Drehungen $\Sigma^{\mu\nu}$ zerlegen. Dabei ist $(\Sigma^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$ in der Tensorarstellung, was ganzzahligem Spin entspricht, und $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]$ in der Spinordarstellung für halbzahligen Spin. Die Γ -Matrizen erfüllen die *Clifford-Algebra*, auf die in Abschnitt 2.3 genauer eingegangen wird. Der L -Anteil in W_μ verschwindet hierbei stets.

Die $SO(n)$ besitzt die Dimension^(4.1) $\frac{1}{2}n(n-1)$, womit die Poincaré-Algebra durch Hinzunehmen der n Translationsgeneratoren die Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ erhält. Damit besitzt die Poincaré-Gruppe in 4 Dimensionen 10 Generatoren, die sich unterteilen lassen in 4 Translationen, 3 Drehungen und 3 Lorentz-Boosts.

^(4.1) Durch die Orthogonalität werden z.B. alle Subdiagonalelemente einer $n \times n$ -Matrix eingeschränkt, die Forderung $\det \Lambda = 1$ ergibt eine weitere Bedingung

D.2 Irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Die sechs Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentz-Gruppe lassen sich durch die drei Drehgeneratoren $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{ij}$ und die drei Boost-Generatoren $K^i = M^{0i}$ darstellen. Mit ihnen lassen sich die zwei Casimir-Operatoren T_{\pm}^2 mit $T_{\pm} = \frac{1}{2}(J^i \pm iK^i)$ bilden, wobei die T_{\pm} zwei miteinander vertauschende Drehimpulsoperatoren sind. Die Eigenwerte von T_{\pm}^2 sind daher $n(n+1)$ und $m(m+1)$ mit halbzahligen n, m . Darstellungen der Lorentz-Gruppe können durch das Tupel (n, m) charakterisiert werden und besitzen die Dimension $(2n+1)(2m+1)$. Der *Spin* j einer Darstellung ist wegen $J = T_+ + T_-$ gegeben durch

$$j = n + m. \quad (\text{D.10})$$

Die Lorentz-Transformationen lassen sich durch die Parameter $\nu_i := \omega_{0i}$ und $\varphi_k := \epsilon_{ijk}\omega_k$ als

$$\Lambda = \exp \left[-i(\vec{\varphi}\vec{J} + \vec{\nu}\vec{K}) \right] \quad (\text{D.11})$$

$$= \exp \left[-i(\vec{\varphi} - i\vec{\nu})\vec{T}_+ \right] \exp \left[-i(\vec{\varphi} + i\vec{\nu})\vec{T}_- \right] \quad (\text{D.12})$$

darstellen.

Die Paritätstransformation führt T_+ in T_- über und umgekehrt. Die *Chiralität* $\lambda = -(n-m)$ ist daher Lorentz-invariant, wechselt aber bei Paritätstransformationen das Vorzeichen und wird daher als *Pseudoskalar* bezeichnet. Für positives λ wird die Darstellung als *rechtshändig* bezeichnet, für negatives λ als *linkshändig*.

Die einfachste irreduzible Darstellung der Lorentzgruppe ist die eindimensionale Darstellung $(0, 0)$. D.h. Lorentz-Skalare besitzen einen Spin 0. Sie werden in Abschnitt 2.2 näher betrachtet. Darüber hinaus gibt es die zwei *Fundamentaldarstellungen* $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$, entsprechend ihrer Händigkeit *linke* und *rechte Fundamentaldarstellung* genannt. Auf diese Darstellungen wird in Abschnitt 2.3 genauer eingegangen. Alle weiteren Darstellungen lassen sich durch

$$(n, m) = (n, 0) \otimes (0, m) \quad \text{und} \quad (\text{D.13})$$

$$(n, 0) \otimes (m, 0) = (n+m, 0) \oplus (n+m-1, 0) \oplus \dots \oplus (|n-m|, 0) \quad (\text{D.14})$$

beschreiben. Das *direkte Produkt* \otimes ist dabei definiert als Tensorprodukt

$$(F^{\mu\nu}) \in A_1 \otimes A_2 :\Leftrightarrow F^{\mu\nu} = A_1^\mu A_2^\nu \quad \text{mit } (A_i^\mu) \in A_i, \quad (\text{D.15})$$

die *direkte Summe* \oplus als Zusammenfassung zu einem Tupel

$$(F^\alpha) \in A_1 \oplus A_2 :\Leftrightarrow (F^\alpha) = (A_1^\mu, A_2^\nu) \quad \text{mit } (A_i^\mu) \in A_i. \quad (\text{D.16})$$

D.3 Irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe

Der Operator P^2 besitzt kontinuierliche, reelle Eigenwerte. Bei $P^2 = (mc)^2 > 0$ handelt es sich um die *massive Darstellung*. Eine dann mögliche Koordinatentransformation ins Ruhesystem $P^\mu = (mc, 0, 0, 0)$ liefert $W^2 = -m^2c^2\vec{S}^2$ mit $S^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^{jk}$. \vec{S} erfüllt die Drehimpulsalgebra $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$ und S^2 besitzt die Eigenwerte $s(s+1)$ für halb- oder ganzzahliges s . Die $2s+1$ möglichen Einstellungen der Spinprojektion sind $-s, -s+1, \dots, s-1, s$. Es handelt sich bei s um den Spin eines Teilchens, während m die Masse ist. Beispiele sind Elektronen (Spin- $\frac{1}{2}$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$, m_s bezeichnet die möglichen Spin-Orientierungen) und Pionen (Spin-1, $m_s = 0, \pm 1$).

Für $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$ ist $W^\mu = hP^\mu$, d.h. P^2 und W^2 bilden nicht mehr zwei unterschiedliche Casimir-Operatoren. Hingegen ist die *Helizität* $h = W^0/P^0$ nun ein Casimir-Operator, wobei sich mit $W^0 = \vec{P}\vec{S}$ und $P^0 = |\vec{P}|$ dann $h = \vec{P}/|\vec{P}| \cdot \vec{S}$ ergibt, d.h. die Helizität ist die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung und entspricht damit im masselosen Fall der Chiralität. Mögliche Werte sind $h = \pm s$, wobei auch hier nach $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ klassifiziert werden kann. Ein Beispiel sind Photonen (Spin-1, Helizitäten ± 1).

Die Darstellung mit $P^2 < 0$ beschreibt Tachyonen, die sich ausschließlich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, die Darstellung mit $P^2 = 0$ und $W^2 \neq 0$ masselose Teilchen mit kontinuierlichem Spin. Beides konnte bisher nicht experimentell beobachtet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Noether, "Invarianten beliebiger differentialausdrücke.," 1918.
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory; 1995 ed.* Boulder, CO: Westview, 1995. Includes exercises.
- [3] J. Wess and B. Zumino, "Supergauge transformations in four dimensions," *Nucl. Phys. B*, vol. 70, no. CERN-TH-1753. 1, pp. 39–50, 1974.
- [4] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, "Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics," *Phys.Rept.*, vol. 363, pp. 223–386, 2002.
- [5] H. Gies, "Introduction to the functional rg and applications to gauge theories," 2007.
- [6] F. Synatschke, G. Bergner, H. Gies, and A. Wipf, "Flow equation for supersymmetric quantum mechanics," *JHEP*, vol. 0903:028,2009, 2009.
- [7] F. Synatschke, "private communication."
- [8] F. Synatschke, H. Gies, and A. Wipf, "Phase diagram and fixed-point structure of two dimensional $n=1$ wess-zumino models," *Phys.Rev.D*, vol. 80:085007,2009, 2009.
- [9] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol. I. Foundations.* Cambridge University Press, Cambridge, June 1995.
- [10] M. Kaku, *Quantum field theory: a modern introduction.* Oxford Univ. Press, 1993.
- [11] R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 20, pp. 367–387, Apr 1948.
- [12] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals.* New York, NY: McGraw-Hill, 1965. The book can be consulted by contacting: PH-AID: Wallet, Lionel.
- [13] G. Roepstorff, *Path integral approach to quantum physics : an introduction.* Springer-Verlag, 1994.
- [14] I. M. Gel'Fand and A. M. Yaglom, "Integration in functional spaces and its applications in quantum physics," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 1, pp. 48–69, Jan. 1960.
- [15] J. Gllmm, A. Jaffe, and F. Wilczek, "Quantum physics: A functional integral point of view," *Physics Today*, vol. 35, pp. 82–+, 1982.
- [16] L. S. Schulman and C. Dewitt-Morette, "Techniques and applications of path integration," *Physics Today*, vol. 34, pp. 65–+, 1981.

- [17] A. Wipf, "Path integrals, lecture notes." 2002.
- [18] A. Wipf, "Supersymmetry, lecture notes." 2001.
- [19] C. Wetterich, "Exact evolution equation for the effective potential," *Physics Letters B*, vol. 301, pp. 90–94, Feb. 1993.
- [20] J. Pawłowski, "Aspects of the functional renormalisation group," *Annals of Physics*, vol. 322, pp. 2831–2915, Dec. 2007.
- [21] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Apr. 1996.
- [22] U. Theis, "Yang-mills theories and the standard model, lectur notes." 2010.
- [23] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol. II. Modern Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, May 2005.
- [24] S. Coleman and J. Mandula, "All possible symmetries of the s matrix," *Physical Review*, vol. 159, pp. 1251–1256, July 1967.
- [25] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields Vol. III. Supersymmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [26] S. Kalka, *Supersymmetrie*. Stuttgart: Teubner, 1997. Not held by the CERN library.
- [27] M. F. Sohnius, "Introducing supersymmetry," *Phys.Rept.*, vol. 128, pp. 39–204, Nov. 1985.
- [28] A. Salam and J. Strathdee, "Super-gauge transformations," *Nuclear Physics B*, vol. 76, pp. 477–482, July 1974.

Danksagung

Ich möchte mich bei Prof. Andreas Wipf für die Möglichkeit bedanken, in der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie diese Diplomarbeit zu verfassen. Darüber hinaus danke ich ihm auch für die Motivation und Betreuung, bei Fragen stand seine Tür stets offen.

Für hilfreiche Anregungen, die Klärung vieler Fragen wie z. B. der Regulatorwahl, und für eine hervorragende Betreuung danke ich Franziska Synatschke.

Ebenso danke ich Prof. Holger Gies und Dr. Ulrich Theis für ihre Hilfe bei Fragen zur Renormierungsgruppe bzw. dem Superraumformalismus.

Marianne Mastaler und Franziska Maier danke ich, dass sie sich die Zeit genommen haben, sich mit dieser Arbeit zu beschäftigen und konstruktive Kritik zu formulieren.

Auch Prof. Jan Pawłowski möchte ich für die Begutachtung dieser Arbeit danken.

Außerdem möchte ich mich bei der gesamten Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für die angenehme Arbeitsatmosphäre und der Offenheit für Diskussionen bedanken.

Mein besonderer Dank gilt schließlich meiner Frau Anja.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Jena, den 01.04.2010

Tobias Kienzler

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 01.04.2010

Tobias Kienzler