

# Phasenübergänge von supersymmetrischen $O(N)$ Modellen

## MASTER-ARBEIT

vorgelegt am: 03. September 2012

am Theoretisch-Physikalischen Institut der Physikalisch-Astronomischen  
Fakultät der Friedrich Schiller Universität Jena



Name: Tobias Hellwig  
Matrikelnummer: 97069  
Studienjahrgang: 2010  
Erstgutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jens Braun

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Gruppentheorie . . . . .	4
2.2	Symmetrien und die Physik . . . . .	6
2.2.1	Felder und ihre Darstellung . . . . .	7
2.2.2	Raumzeit Symmetrien . . . . .	11
2.2.3	Supersymmetrie . . . . .	14
2.3	Die Flussgleichung . . . . .	17
2.3.1	Regulatoren . . . . .	19
2.3.2	Stabilitätsanalyse . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Die Flussgleichung</b>	<b>22</b>
3.1	Vorüberlegungen . . . . .	22
3.2	Herleitung der Flussgleichung . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Untersuchung der Fixpunktlösung</b>	<b>38</b>
4.1	Der Fall “large $N$ ” . . . . .	38
4.2	Endliches $N$ ohne Wellenfunktionsrenormierung - die LPA Näherung . . . . .	39
4.2.1	Entwicklung an der Stelle $\varrho \neq 0$ . . . . .	39
4.2.2	Die ungebrochene Phase $\varrho_0 = 0$ . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>65</b>

# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem supersymmetrischen linearen Sigma Modell. Dieses weist eine  $O(N)$  Symmetrie auf. Nachdem Untersuchungen mittels der Methodik der Flussgleichungen im Fall  $N \rightarrow \infty$  [1] und  $N = 1$  [2] durchgeführt wurden, soll das Ziel dieser Arbeit sein die Lücke zwischen beiden Modellen zu schließen. Es wird der Fall einer endlichen Anzahl an Feldamplituden größer eins betrachtet. Das Hauptaugenmerk wird sich dabei auf den Anschluss an den Fall großer  $N$  richten. Die Arbeit wird sich in zwei Teile aufspalten. Nach einer theoretischen Einführung wird die Flussgleichungen im Fall konstanter Felder hergeleitet. Dabei werden sowohl die Wellenfunktionsrenormierung  $Z$  als auch Korrekturen zur Wellenfunktionsrenormierung der Radialen Mode  $Y$  impulsunabhängig berücksichtigt.

Nach der Herleitung dieser Terme wird die Betrachtung der Linear Polynomial Approximation (LPA) im Vordergrund stehen. Das heißt, es wird die Flussgleichung des Potentials unter der Annahme betrachtet, dass die anomale Dimension vernachlässigbar ist. In dieser Näherung wird die Fixpunktstruktur untersucht und ein Phasenübergang zweiter Ordnung identifiziert. Die kritischen Exponenten dieses Phasenübergangs werden exakt angegeben. Abschließend folgt eine Betrachtung der ungebrochenen Phase. In beiden Fällen wird mit polynomiellen Ansätzen gearbeitet.

## 2 Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden wir uns mit den Konzepten vertraut machen, auf denen die vorliegende Arbeit basiert. Dazu gehören sowohl physikalische Modelle als auch das nötige Handwerkszeug, um effizient mit diesen umzugehen. Wir werden an mancher Stelle weiter ausholen, aber grundlegende Kenntnisse voraussetzen. Am Anfang unserer Betrachtungen wird die Gruppentheorie stehen und im speziellen Lie Gruppen zum Beispiel  $O(N)$  sowie Lie Algebren. Anschließend werden wir uns mit Supersymmetrie beschäftigen. Motiviert werden wir dabei von dem Coleman-Mandula-Theorem. Im Zuge der Betrachtung dieser Theorien werden wir auch den Begriff der spontanen Symmetriebrechung einführen. Nachdem wir uns mit diesen Theorien vertraut gemacht haben, richtet sich unser Augenmerk auf Konzepte zur Berechnung von Infrarotphysik. Dabei wird insbesondere das Mittel der Flussgleichung im Vordergrund stehen. Diese wird uns danach Anlass geben einen Blick auf eine spezielle Lösungsklasse werfen zu lassen, sogenannte Fixpunktlösungen. In der Umgebung dieser werden wir eine Linearisierung durchführen und damit den Begriff der relevanten Richtung im Parameterraum einführen und näher beleuchten.

Nach diesem Abriss über den Weg, den wir in diesem Abschnitt nehmen, kommen wir nun zur Gruppentheorie.

### 2.1 Gruppentheorie

Den Begriff der Gruppe kennen wir bereits aus der linearen Algebra. Eine nichtleere Menge  $\mathbf{M}$ , deren Elemente über eine Beziehung  $\cdot$  verbunden sind, bildet eine Gruppe  $G = (\mathbf{M}, \cdot)$ , wenn sie folgende vier Eigenschaften erfüllt:

$$G1 : a \cdot b = c \quad a, b, c \in \mathbf{M} \quad (\text{Abgeschlossenheit der Gruppe}) \quad (2.1)$$

$$G2 : \exists e \in \mathbf{M} \quad \forall a \in \mathbf{M} : a \cdot e = e \cdot a = a \quad (\text{Existenz des neutralen Elements}) \quad (2.2)$$

$$G3 : \forall a \in \mathbf{M} \quad \exists b = a^{-1} \in \mathbf{M} : a \cdot b = b \cdot a = e \quad (\text{Existenz des inversen Elements}) \quad (2.3)$$

$$G4 : \forall a, b, c \in \mathbf{M} : a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{Assoziativität}) \quad (2.4)$$

Hat  $G$  noch folgende Eigenschaft, so nennen wir sie abelsch oder kommutativ:

$$G5 : \forall a, b \in \mathbf{M} : [a, b] := (a \cdot b) \cdot (b \cdot a)^{-1} = (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = e \quad (2.5)$$

Unter den endlich dimensionalen Gruppen nimmt insbesondere die Permutationsgruppe eine herausragende Rolle ein. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit unendlichen Gruppen, im speziellen Lie Gruppen. Wir führen eine glatte Abbildung  $R$  ein:

$$R : \Omega \subseteq \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbf{M}, \quad \text{surjektiv, } \Omega \text{ offen.} \quad (2.6)$$

Vergleiche dazu auch [3]. Damit lassen sich unsere Forderungen an die Gruppe  $G$  zu Forderungen an die Abbildung  $R$  umschreiben. Wir verschärfen unsere Forderungen dabei teilweise

$$R1 : \exists f_1 \in C^\omega(\Omega \times \Omega, \Omega) : \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad R(x_1) \cdot R(x_2) = R(f_1(x_1, x_2)) \quad (2.7)$$

$$R2 : \exists x_0 \in \Omega \quad \forall x \in \Omega : R(x_0) \cdot R(x) = R(x) \cdot R(x_0) = R(x), \quad R(x_0) =: \mathbf{I} \quad (2.8)$$

$$R3 : \exists f_2 \in C^\omega(\Omega) : \forall x \in \Omega \quad R(x) \cdot R(f_2(x)) = R(f_2(x)) \cdot R(x) = R(x) \quad (2.9)$$

$$R4 : \forall x_1, x_2, x_3 \in \Omega : R(x_1) \cdot (R(x_2) \cdot R(x_3)) = (R(x_1) \cdot R(x_2)) \cdot R(x_3), \quad (2.10)$$

indem wir gefordert haben, dass  $f_i$  analytische Funktionen ( $C^\omega$ ) sein sollen. Die abschließende Setzung von  $x_0$  aus (2.8) auf  $x_0 = 0$  ist durch eine einfache Koordinatenverschiebung in  $\Omega$  immer zu erreichen. Denn es gilt  $\Omega \neq \emptyset$ , da wir nichtleere Mengen  $\mathbf{M}$  betrachten.

Der aufmerksame Leser wird feststellen, dass die Definition, wie sie [3] angibt, nicht zufriedenstellend ist und auch nicht mit einer allgemein gültigen übereinstimmt. Im Allgemeinen ist  $\mathbf{M}$  eine Mannigfaltigkeit und jede Karte hat eine Abbildung  $R$ , wobei Karten existieren, die das Urbild des neutralen Elements beinhalten. Die Analytizität der Abbildungen  $f_i$  bezieht sich auf die Karten, wobei die Abbildung offensichtlich nicht auf eine Karte beschränkt ist. Wir werden uns im Folgenden wieder auf eine einzelne Karte beziehen, die jeweils entsprechend zu wählen ist und deren Abbildung  $R$  von einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auf die Mannigfaltigkeit abbildet.

Ein Beispiel für eine solche Gruppe ist  $O(N)$ , die Gruppe der orthogonalen reellen  $N \times N$  Matrizen, mit der normalen Matrixmultiplikation als Verknüpfung auf der Gruppe. Diese Gruppe entspricht den Drehspiegelungen im Raum. Schränkt man sich auf diejenigen Matrizen ein, deren Determinante eins ist, so erhält man die Gruppe  $SO(N)$  und im Falle von  $N = 3$  sind die Euler Winkel ein bekanntes Beispiel für eine Parametrisierung von  $SO(N)$ . Eine Drehung eines Vektors im Raum wird mittels

$$x' = Mx \quad \text{mit } M \in SO(3), \quad x, x' \in \mathbb{R}^3 \quad (2.11)$$

dargestellt. Wir kennen noch eine weitere Darstellung der Drehung, die auf Cayley zurückgeht [4]:

$$x'_q = Qx_qQ^\dagger \quad (2.12)$$

mit  $Q = (\cos \frac{\theta}{2}, n \sin \frac{\theta}{2})$  und  $Q^\dagger = (\cos \frac{\theta}{2}, -n \sin \frac{\theta}{2})$  sogenannten Quaternionen. Dabei ist  $n \in \mathbb{R}^3$  ein Einheitsvektor. Er gibt die Richtung an, um die gedreht wird.  $\theta \in [0, 2\pi)$  ist ein Winkel um den gedreht wird. Wir haben die Operatorrelationen

$$(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \beta, a + b) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

$$(\alpha, a) \cdot (\beta, b) = (\alpha\beta - ab, ab + \beta a + a \times b) \quad (2.14)$$

mit  $\times$  dem Kreuzprodukt des  $\mathbb{R}^3$ . Schreiben wir  $x_q = (0, x)$  als Quaternion, ergibt sich aus obiger Formel (2.12)

$$x'_q = (0, 2n(nx) \sin^2 \frac{\theta}{2} + x \cos \theta + n \times x \sin \theta), \quad (2.15)$$

wie wir leicht nachrechnen. Die Komponente von  $x$  parallel zu  $n$  wird nicht gedreht, da  $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos \theta = 1$  gilt. Die senkrechten Komponenten werden um den Winkel  $\theta$  gedreht, da das Skalarprodukt verschwindet und das Kreuzprodukt entsprechend einem Rechtssystem in die jeweilige dritte orthogonale Richtung zeigt. Wir haben damit eine Darstellung der Drehgruppe, die aber offensichtlich mehr Freiheitsgrade enthält. Sowohl  $Q$  als auch  $-Q$  bewirken die gleiche Drehung. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad zeigt sich in der Physik als Spin, weshalb wir auch die Menge der oben definierten  $Q$  zur Spingruppe  $\text{Spin}(3)$  zusammenfassen. Wir drehen in der Gruppe  $SO(3)$  zweimal um  $2\pi$ , damit  $Q$  über  $-Q$  in  $Q$  überführt wird. Dies entspricht einem  $\text{Spin } \frac{1}{2}$  Verhalten. Wir führen an dieser Stelle noch an, dass  $\text{Spin}(3)$  isomorph zu  $SU(2)$  ist [4]. Dabei ist ein Element von  $SU(2)$ , der Gruppe der unitären Matrizen vom Rang zwei, gegeben durch die 2 komplexen Zahlen  $\alpha, \beta$ , mit

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{und } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow M \in SU(2) \quad (2.16)$$

Wir sehen, dass sowohl  $\text{Spin}(3)$  als auch  $SU(2)$  3 reelle freie Parameter besitzen, die alle beschränkt sind. Wir haben den Fall von drei Raumdimensionen  $D$  betrachtet, in der Spingruppe einfach zusammenhängt und die kleinste einfach zusammenhängende Überdeckung der Drehgruppe  $SO(3)$  ist. Im Fall von  $D = 2$  ist keine so gute Motivation möglich, so dass wir  $\text{Spin}(2)$  einfach als doppelte Überdeckung von  $SO(2)$  definieren.

Wir wenden uns wieder allgemeineren Konzepten zu und richten unser Augenmerk auf die Lie Algebren. Als Motivation der Einführung dieses Konzeptes entwickeln wir die Funktion  $R$  um das Urbild des neutralen Elements, das heißt in unseren gewählten Koordinaten um die Null.

$$R(x) = R(0) + \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} R)(0)x_i + R_1(x) = \mathbf{I} + X_i x_i + R_1(x) \quad (2.17)$$

Dabei bezeichnen  $R_1$  das erste Restglied der Taylorentwicklung und  $X_i$  die Generatoren der Lie Gruppe. Im dritten Term wie auch im Folgenden verwenden wir die einsteinsche Summenkonvention mit einer euklidischen Signatur im  $n$  dimensionalen. Ein infinitesimal benachbartes Element des neutralen Elements können wir somit schreiben als:

$$R(\epsilon) = \mathbf{I} + X_i \epsilon_i \quad (2.18)$$

Dieses Vorgehen führt uns auf das Konzept der Lie-Algebra. Eine Algebra  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ , die folgende Eigenschaften erfüllt [4],

$$L1 : \mathcal{L} \text{ Linearer Raum über } \mathbb{K} \quad \text{Linearität} \quad (2.19)$$

$$L2 : [X_i, X_j] = f_{ij}^l C_l \in \mathcal{L} \quad \text{Abgeschlossenheit} \quad (2.20)$$

$$L3 : [X_i, X_j] = -[X_j, X_i] \quad \text{Antikommutivität} \quad (2.21)$$

$$L4 : [\alpha X_i + \beta X_j, X_l] = \alpha [X_i, X_l] + \beta [X_j, X_l] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \text{Bilinearität} \quad (2.22)$$

$$L5 : [[X_i, X_j], X_l] + [[X_j, X_l], X_i] + [[X_l, X_i], X_j] = 0 \quad \text{Jacobi Identität} \quad (2.23)$$

nennen wir komplexe Lie Algebra. Dabei sind die Elemente  $X_i$  endomorphe Abbildungen auf einem komplexen Vektorraum. Wir nennen  $f_{ij}^l$  Strukturkonstanten der Lie-Algebra. Wir stellen fest, dass eine Lie Algebra den Tangentialraum einer Lie Gruppe in der Umgebung des Einselementes aufspannt [4]. Die Forderungen  $L1$  bis  $L5$  und  $R1$  bis  $R4$  in der Nähe des Einselementes koinzidieren, vergleiche dazu auch [3]. Unsere Gruppen erben damit wesentliche Eigenschaften der Algebren.

Ein Beispiel für eine Lie Algebra ist  $\mathfrak{su}(N)$  oder im Speziellen  $\mathfrak{su}(2)$ . Aus der linearen Näherung und der Unitarität von  $\text{SU}(N)$  folgt  $X_i^\dagger = -X_i$ , sowie  $\text{tr} X_i = 0$  für die Elemente von  $\mathfrak{su}(N)$ . Das reine Interesse für die Umgebung des Einselementes bei eine Lie Algebra ergibt, dass sich die Lie-Algebra von  $\mathfrak{su}(2)$  und  $\mathfrak{so}(3)$ , das ist die  $\text{SO}(3)$  erzeugende Lie Algebra, isomorph zueinander sind. Dies folgt, da die Eigenschaft einer doppelten Abdeckung von  $\text{SO}(3)$  durch  $\text{SU}(2)$  beziehungsweise  $\text{Spin}(3)$  in der Nähe des Einselementes nicht relevant ist. Es ergibt sich, dass die Kommutator Relationen von  $\mathfrak{so}(3)$  die gleichen sind wie  $\mathfrak{su}(2)$  und damit die erzeugenden der Spin Rotationen der gleichen Drehimpulsalgebra gehorchen, wie die makroskopischen Drehungen [4]. Dies gilt analog in beliebigen Dimensionen und somit auch in  $D=2$ .

## 2.2 Symmetrien und die Physik

Wir werden im Folgenden Zahlen kennenlernen, die dem Konzept von Fermionen besser entsprechen. Aufgrund des Spin-Statistik-Theorems wissen wir, dass zwei gleiche Fermionen nicht an einem Ort auftreten können. In der Sprache von Erzeugern und Vernichtern ergibt sich, dass zwei gleiche Erzeuger hintereinander angewandt einen Zustand vernichten. Damit antikommutieren sie und quadrieren folglich zu null. Suchen wir Zahlen, die das gleiche Verhalten zeigen, werden wir automatisch auf das Konzept der Graßmannzahlen geführt.

**Graßmannzahlen** Folgen wir obiger Forderung des Antikommutierens ergibt sich folgende Gleichung:

$$a_1 a_2 = -a_2 a_1. \quad (2.24)$$

Damit ist die Idempotenz in der zweiten Ordnung gesichert. Im Folgenden bezeichnet  $\mathcal{G}$  die Menge der Graßmannzahlen. Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in  $n$  Graßmannvariablen und stellen fest, dass das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung schon exakt ist

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(0) + \sum_{i=1}^n a_i (\partial_{a_i} f)(0) + \dots + (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n (\partial_{a_1} \partial_{a_2} \dots \partial_{a_n} f)(0), \quad (2.25)$$

da in höheren Termen bestimmte Graßmannzahlen mindestens quadratisch vorkommen und somit der Term verschwindet. Die Relation

$$\partial_{a_i} a_j = \delta_{ij} - a_j \partial_{a_i} \quad (2.26)$$

wurde hierbei schon verwendet. Es folgt, dass partielle Ableitungen auch antikommutieren. Betrachten wir das Integral über Graßmannzahlen, so stellen wir Folgendes fest:

$$\int da_1 f(a_1, \dots, a_n) = \int da_1 f(0, a_2, \dots, a_n) + \int da_1 a_1 (\partial_{a_1} f)(0, a_2, \dots, a_n) \quad (2.27)$$

$$\stackrel{a_1 \equiv a+b}{=} C_1 + \int daa (\partial_{a_1} f)(0, a_2, \dots, a_n) + \int dab (\partial_{a_1} f)(0, a_2, \dots, a_n) \quad (2.28)$$

$$= C_2 + \int daa (\partial_{a_1} f)(0, a_2, \dots, a_n) = (\partial_{a_1} f)(0, a_2, \dots, a_n) \quad (2.29)$$

Dies folgt aus der Gleichheit der Integrale, der Invarianz des Maßes gegen eine Verschiebung und im letzten Schritt eines so gewählten Integrationsmaßes. Ein beliebiger nicht verschwindender skalarer Faktor vor der partiellen Ableitung ist wählbar. Damit stimmen Integration und Ableitung überein. Betrachten wir eine Delta Distribution in Graßmannzahlen, so folgt sofort

$$\delta(a - b) = a - b. \quad (2.30)$$

### 2.2.1 Felder und ihre Darstellung

Bisher standen mathematische Konzepte im Zentrum der Betrachtung und nicht die Anwendung in der Physik. Dies wird sich im weiteren Verlauf ändern. Die Quantenfeldtheorie sagt uns, dass unsere Welt aus quantisierten Feldanregungen zusammengesetzt ist. Um Aussagen über mögliche Zustände machen zu können, wird eine Lagrangedichte definiert, in der die Felder lokal vorkommen. Integrieren wir diese Dichte über die Raumzeit erhalten wir eine Wirkung

$$S[\chi] = \int_{\mathbb{R}^{D+1}} \mathcal{L}(\chi, x) dx. \quad (2.31)$$

Aus dieser können wir mit der Pfadintegralformulierung der Quantenfeldtheorie alle wichtigen Größen unserer Theorie mittels der Zustandssumme

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\chi e^{i(S[\chi] + J[\chi])}, \quad J[\chi] = \int_{\mathbb{R}^{D+1}} J_i(x) \chi^i(x) dx \quad (2.32)$$

bestimmen, sofern wir die Lagrange Dichte kennen. Die Integration  $\mathcal{D}\chi$  ist eine Integration über alle Felder, mit einer Fixierung  $Z[0] = 1$ . Es bleibt somit, abgesehen von technischen Schwierigkeiten, im Wesentlichen die Lagrangedichte zu bestimmen. Diese soll Ergebnisse liefern, die von der Messung bestätigt wird und Vorhersagen treffen können. Im Laufe der Zeit wurde festgestellt, dass Symmetrien eine wesentliche Rolle in der Physik haben, wie die Einführung über Gruppentheorie schon suggerieren sollte. Wir werden die Lagrangedichte so formulieren müssen, dass diese Symmetrien erhalten bleiben. Das heißt, die Felder müssen in Termen vorkommen, die, bis auf eine totale Divergenz, invariant unter den gewünschten Symmetrietransformationen sind. Dies sind sogenannte Eichtransformationen. Betrachten wir eine  $O(N)$  symmetrische Theorie so wissen wir, dass Skalarprodukte von Vektoren invariant unter Drehspiegelungen sind. Wählen wir somit unsere Bosonen  $\varphi$  als Felder mit  $N$  Feldrichtungen so haben wir eine invariante Größe  $\varphi_i \varphi^i$ . Ist  $O(x) \in O(N)$  eine Transformationsmatrix in jedem Punkt  $x$  so folgt

$$\varphi_i \varphi^i = \hat{\varphi}_i O^{ij} \hat{\varphi}^k O_{kj} = \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}^k O^{ij} O_{jk}^t = \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}^i, \quad (2.33)$$

mit den ursprünglichen Felder  $\varphi$  und den Transformaten  $\hat{\varphi}^i$ .

**Fermionen** Wir haben schon Fermionen erwähnt und überlegen uns, wie wir Fermionische Felder darstellen. Nachdem uns das Konzept der Graßmannzahlen vertraut ist, muss bedacht werden, wie man realisiert, dass der Spin  $1/2$  ist. Dazu nutzen wir eine Erkenntnis, die wir aus der Gruppentheorie schon gewonnen haben. Es ist bekannt, dass die Gruppen  $SO(2)$  und  $Spin(2)$  zusammenhängen. Rotieren wir um  $2\pi$  in  $SO(2)$ , erhalten wir das Negative des Quaternions der Gruppe  $Spin(2)$ . Um im dreidimensionalen Raum das Teilchen in sich selbst zu überführen, ist es nötig um  $4\pi$  zu rotieren. Geleitet von dieser Beobachtung werden wir Fermionen als Vektoren, sogenannten Spinoren, notieren

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Die Einträge  $\psi_i$  sind Graßmannzahlen, damit das Spin-Statistik-Theorem erfüllt ist. Wir wollen in unserer Theorie trotzdem die Möglichkeit zu einer Wechselwirkung von Fermionen ermöglichen. Haben wir nur eine Art von Fermionen in der Theorie, so kann diese Wechselwirkung offensichtlich nicht über ein direktes Skalarprodukt erfolgen, da wir garantiert haben, dass dieses verschwindet. Dies führt uns auf das Konzept der Gamma Matrizen und der Clifford Algebra.

**Clifford Algebra** Wir führen unsere Gamma Matrizen  $\gamma^\mu$  durch die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I_{D+1} \quad (2.35)$$

ein. Es ist  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots)$  die Minkowski Metrik des flachen Raums. Aus der Notation folgt, dass wir im  $(D + 1)$ -dimensionalen  $D + 1$  Gamma Matrizen haben, die offensichtlich linear unabhängig sind.

In  $D + 1 = 3$  wählen wir unsere Matrizen wie folgt:

$$\gamma^0 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\gamma^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$\gamma^2 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.38)$$



Damit gilt, dass  $\gamma^0$  zu eins und  $\gamma^{1,2}$  jeweils zu -1 quadrieren, wie es die Antikommutator Relation (2.35) verlangt. Insgesamt bilden diese drei Matrizen und die Einheitsmatrix  $I_2$  eine Basis im Raum der  $(2, 2, \mathbb{C})$  Matrizen, denn aus der Kombination

$$a(I_2 - i\gamma^2) + bi(\gamma^0 - \gamma^1) - ci(\gamma^0 + \gamma^1) + d(I_2 + i\gamma^2) = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

folgt sofort eine explizite Darstellungsformel für  $2 \times 2$  Matrizen. Allgemein stellen wir fest, dass die Menge bestehend aus den  $\gamma$  Matrizen und ihren Produkten den Raum  $\text{Mat}([D]_2, [D]_2, \mathbb{C})$  aufspannen. Dabei ist  $n = [D]_2$  mit  $[D]_k = [\frac{D}{k}]$  die ganzzahlige Division von  $D$  durch  $k$ . Die Tatsache, dass wir eine  $[D]_2$  dimensionale Darstellung der Matrizen wählen dürfen, ist mit einer geeigneten Darstellung von Tensorprodukten zeigbar. Eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhaltes findet sich in [6]. Die wesentliche Idee ist die Matrizen als Tensorprodukte der Paulispinmatrizen erweitert um  $\sigma_0 = I_2$  aufzuschreiben und für die Erfüllung der Clifford Algebra, wie auch der Aussage über die Basis, Eigenschaften der  $\sigma_\mu$  zu nutzen.

Wir haben die Matrizen  $\gamma^\mu$  eingeführt um eine Kopplung von Fermionefeldern an sich selbst zu ermöglichen. In diesem Zusammenhang führen wir zwei neue Begriffe ein.

**Ladungskonjugation und Majorana Spinoren** Die Objekte, die wir für unsere Kopplung benötigen, nennen wir dirackonjugierte Spinoren.

$$\psi \rightarrow \bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.40)$$

Mit diesen Spinoren sind wir in der Lage Kopplungen zwischen Spinoren einzuführen und erhalten in drei Dimensionen folgende verschiedene Bilinearformen:

$$\bar{\psi}\psi \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.41)$$

Mit unseren gewählten  $\gamma$  Matrizen definieren wir an dieser Stelle den ladungskonjugierten Spinor

$$\psi_C := (-\gamma^0)\bar{\psi}^t = -\gamma^0 (\gamma^0)^t \psi^* = \psi^*, \quad (2.42)$$

der seinen Namen einer Umformung der Dirac Gleichung verdankt. Allgemeiner definieren wir  $\psi_C = \mathcal{C}\bar{\psi}^t$ , wobei  $(\gamma^\mu)^t = \alpha\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}$  mit  $\eta = \pm 1$  gilt. Diese Definition führt in  $D+1 = 3$  auf eine mögliche Wahl wie in (2.42). Spinoren für die

$$\psi_C = \psi \xrightarrow{-\gamma^0=\mathcal{C}} \psi_i = \psi_i^* \quad (2.43)$$

gilt, nennen wir Majorana Spinoren, die mit unserer Wahl der Ladungskonjugationsmatrix  $\mathcal{C}$  reell sind. Für Majorana Spinoren gelten einige Rechenregeln, die wir herleiten und angeben werden

$$(\bar{\psi})_i = \psi^t \gamma^0 = i(-\psi_2, \psi_1) \quad (2.44)$$

$$\bar{\psi}\chi = i(-\psi_2\chi_1 + \psi_1\chi_2) = i(\chi_1\psi_2 - \chi_2\psi_1) = \bar{\chi}\psi \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi I_2 = -\psi\bar{\psi} \quad (2.46)$$

denn

$$\psi\bar{\psi} = \begin{pmatrix} -i\psi_1\psi_2 & 0 \\ 0 & i\psi_2\psi_1 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1 \end{pmatrix} = -I_2\psi_2\psi_1. \quad (2.47)$$

Diese werden später noch Verwendung finden.

Wir betrachten einen Spinor und seine Transformation unter Spin(2) Transformation

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = \mathcal{S}\psi(\Lambda x) \quad (2.48)$$

Es stellt sich die Frage, ob unsere bisherigen Bilinearformen invariant unter der Spin(2) Symmetrie sind. Wir fordern, dass folgende Transformation gelten soll

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^\dagger \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 \mathcal{S} \psi = \bar{\psi} (\gamma^0)^{-1} \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 \mathcal{S} \psi = \bar{\psi} \psi \Rightarrow \gamma^0 \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 = \mathcal{S}^{-1} \quad (2.49)$$

Da wir nur 2 Raumdimensionen haben, in denen wir rotieren, ist S offensichtlich eine Matrix vom Typ

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

und somit

$$\gamma^0 \mathcal{S}^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S}^{-1}. \quad (2.51)$$

Wir untersuchen noch die Struktur

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \bar{\psi} \mathcal{S}^{-1} \gamma^\mu \mathcal{S} \psi \neq \bar{\psi} \psi \quad (2.52)$$

und sehen, dass diese nicht automatisch verschwindet. Da die Spin Symmetrie aber wie erwähnt vom Raum geerbt wird, dürfen wir sie nicht losgelöst vom Hintergrund betrachten. Aus diesem Grund wird die Transformationsmatrix  $S$  auch nicht obige einfache Form im allgemeinen Fall beibehalten. Bevor wir dazu kommen, führen wir noch ein Konzept ein um leichter die  $D + 1$  dimensionale Raumzeit behandeln zu können.

**Wick Rotation** Wir richten unser Augenmerk auf nachstehende Umformung:

$$\int_{\mathbb{R}^{D+1}} f(x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^D} f(t^2 - \tilde{x}^2) d\tilde{x} dt \stackrel{t=i\tau}{=} - \int_{i\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^D} f(-\tau^2 - \tilde{x}^2) d\tilde{x} (-i) d\tau \quad (2.53)$$

Betrachten wir eine Wirkung  $S[\chi]$  und setzen die Felder im Argument  $\chi(t, x')$  zu  $\chi(i\tau, x')$  mit  $\tau \in i\mathbb{R}$  fort, so wird die Variation nach den Feldern das gleiche Ergebnis liefern, wie wenn wir über den  $\mathbb{R}^{D+1}$  integriert hätten und  $\tau$  als reelle Größe festlegen. Da aber die Variation der Wirkung nach den Feldern die Physik bestimmt, können wir dies ohne Verlust an Information durchführen. Wir erhalten mit  $d=D+1$

$$S[\chi] = iS_e[\chi] := i \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \partial_\nu \delta^{\mu\nu}). \quad (2.54)$$

Offensichtlich konnte durch eine Umformulierung der Zeitkoordinate  $t \rightarrow i\tau$  unsere Minkowski Metrik auf eine negative Euklidische Metrik umgeschrieben werden, wobei wir einen globalen Faktor  $i$  gewonnen haben. Diese Technik ist auch auf unsere Formel für die Zustandssumme anwendbar. Dies folgt, da unsere Wirkung invariant unter Lorentztransformationen ist, wie wir noch sehen werden. Somit erfüllt die Wirkung alle Forderungen, die zum Gewinn der Relation (2.53) gebraucht wurden, da zusätzliche Ableitungsoperatoren die Indexstruktur nicht verändern.

$$Z[J_e] = \int \mathcal{D}\chi e^{i(S[\chi] + J[\chi])} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S_e[\chi] + J_e[\chi]} \quad (2.55)$$

Hierbei werden mit dem Index  $e$  die euklidischen Integrale mit der Metrik  $\delta_{\mu\nu} = -I_{D+1}$  abgekürzt. Da  $J$  und  $J_e$  nur Konstruktionen sind, die uns eine technisch effektive Behandlung unseres Problems ermöglichen, besitzen wir Freiheitsgrade, die eine Umschreibung wie oben Geschehen ermöglichen. Der Index  $e$  wird im Folgenden wieder fallen lassen, da wir unsere weitere Kalkulation mit dieser negativ definiten Metrik durchführen. Des Weiteren wird unsere Schreibweise des Raumes von  $\mathbb{R}^{D+1}$  zu  $\mathbb{R}^d$  übergehen, da die Metrik keine Komponente mehr auszeichnet.

Es seien noch einige Anmerkungen angebracht. Offensichtlich bedingt ein Übergang  $t \rightarrow i\tau$  auch  $\partial_t \rightarrow -i\partial_\tau$ . Sichern wir die Invarianz des Terms  $p^\mu \gamma_\mu$ , so ergibt sich  $\gamma^0 \rightarrow i\gamma^0$ . Analog folgt dies aus der Betrachtung der neuen Metrik. Dies wird im Folgenden eine Rolle spielen, wenn wir Komponenten von Spinoren bestimmen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi = \psi_C = -\psi^* \quad \Rightarrow \quad \psi_i = -\psi_i^*, \quad \bar{\psi} = (-\psi_2, \psi_1) \quad (2.56)$$

Damit sind unsere betrachteten Majorana Spinoren rein komplex. Vertauschungsrelationen wie sie hergeleitet wurden, sind aber unabhängig davon (2.47). In den Gleichungen (2.49) bis (2.52) passieren Vorzeichenwechsel, die sich aber in den für uns interessanten Fällen aufheben. Des Weiteren bilden unsere  $\gamma$  Matrizen die Drehimpulsalgebra

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\epsilon^{\mu\nu\sigma} \gamma^\sigma, \quad \text{mit } \epsilon_{01}^2 = -1 \text{ und antisymmetrisch} \quad (2.57)$$

Wir haben schon motiviert, dass die Spin Transformation nicht losgelöst vom Hintergrund betrachten werden dürfen, und führen aus diesem Grund an dieser Stelle Symmetrien unserer Raumzeit ein.

## 2.2.2 Raumzeit Symmetrien

Bisher haben wir uns für lokale Symmetrien interessiert. Ein Beispiel war die Drehung eines  $n$ -komponentigen Vektors. Verallgemeinert hatten wir ein Vektorfeld im  $D+1$  dimensionalen und interessierten uns dafür, was passiert, wenn wir an jeweils einem Raumzeitpunkt das Feld in eine neue Darstellung überführen. In einer euklidischen Geometrie würde ein solches Drehen analog einer Raumdrehung aussehen.

Betrachten wir eine Drehung des gesamten Raumes, so werden nach einer Wickrotation Objekte mit Raumzeitindizes wie unter einer normalen Drehung transformieren. In einem nicht Wick rotierten Raum gälte es hingegen eine Lorentztransformation einzuführen, die der Sonderstellung der Zeitkoordinate entspricht. Dabei betrachte man zwei Inertialsysteme  $I, I'$ , die aus Konventionsgründen die gleiche Orientierung besitzen sollen. Die Koordinaten  $x = (t, \tilde{x})$  im ersten Inertialsystem mit  $t \in \mathbb{R}$  der Zeitkoordinate und  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^D$  den räumlichen Koordinaten sind über die Lorentztransformation

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x'^\mu \quad x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu = x'_\mu \quad (2.58)$$

mit den Koordinaten  $x'$  im zweiten System verbunden. Die kontravarianten  $x^\mu$  entsprechen dabei den Einträgen der Vektoren, während die kovarianten  $x_\mu$  den Einträgen der Linearformen entsprechen. Dabei gibt es im Wesentlichen zwei verschiedene Arten von Drehungen. Zum einen die echten Raumdrehungen, die im Kartesischen der Gruppe  $SO(2)$  entsprechen, und zum anderen gibt es so genannte "Lorentz Boosts". Diese entsprechen dem Fall, dass die Inertialsysteme eine relative Geschwindigkeit besitzen aber in den räumlichen Koordinaten parallel orientiert sind. Eine iterative Ausführung beider Fälle wird uns allgemeine Wechsel der Koordinatensysteme liefern.

Die Boosts haben folgende typische Form, wobei wir uns auf einen zweidimensionalen Fall beschränken:

$$(\Lambda)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \kappa' & -\sinh \kappa' \\ -\sinh \kappa' & \cosh \kappa' \end{pmatrix} \quad (\Lambda)_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \cosh \kappa' & \sinh \kappa' \\ \sinh \kappa' & \cosh \kappa' \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

mit einem Parameter  $\kappa'$ , der die Relativgeschwindigkeiten der beiden Inertialsysteme beschreibt. Offensichtlich ist  $x_\mu x^\mu$  eine Invariante, da  $\cosh^2 \kappa' - \sinh^2 \kappa' = 1$  gilt. Aus dieser Forderung haben wir gerade die Darstellung (2.59) gewonnen. Der Zusammenhang des Winkels  $\kappa'$  und der Relativgeschwindigkeit  $v$

$$\sinh \kappa' = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad (2.60)$$

folgt aus der Tatsache, dass der Winkel nur von  $v$  abhängen darf und eine Divergenz im Fall von  $v = 1$  garantiert werden muss, da dies der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Das Vorzeichen ist entsprechend so zu wählen, dass ein ruhender Beobachter in  $I$  sich anschließend in  $-v$  Richtung in  $I'$  bewegt. Man beachte dabei, dass  $v$  die Geschwindigkeit in Koordinaten  $v = \frac{dx}{dt}$  und somit keine relativistisch invariante Größe ist. Aus einem dritten Inertialsystem betrachtet, kann die Relativgeschwindigkeit zwischen  $I$  und  $I'$  eine andere als  $v$  sein.

Führen wir die Wick Rotation aus, so folgt, dass sich auch  $v$  ändert und somit auch die Matrix  $\Lambda$  der Lorentztransformation

$$(\tau', \tilde{x}')^t = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} (\tau, \tilde{x})^t = \Lambda_w(\tau, \tilde{x})^t \quad \text{mit} \quad (\Lambda_w)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Wir wollen dies begründen: Man betrachte die Transformation des Vektors  $\xi = (\tau, \tilde{x})^t \in (\mathbb{i}\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  bei einer Relativgeschwindigkeit  $v = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = -i\nu$

$$\xi'^0 = \tau' = -it' = -i \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} (t - v\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} (\tau + \nu\tilde{x}), \quad (2.62)$$

$$\xi'^1 = \tilde{x}' = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} (-vt + \tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} (-\nu\tau + \tilde{x}). \quad (2.63)$$

Damit ergibt sich mit der Setzung  $\sin \kappa = -\frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}$  obige Gleichung für die Transformation unserer neuen Koordinaten. Offensichtlich sollte im Sinne der Beibehaltung der zeitlichen Orientierung  $\kappa \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  gelten, wie es die Herleitung auch gebietet. Diese Transformation entspricht genau einer Drehung, wie behauptet.

Des Weiteren gilt offensichtlich  $x_\mu x^\nu = x_\sigma \Lambda_\mu{}^\sigma \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho = x_\sigma x^\rho (\Lambda \Lambda^t)^\sigma{}_\rho = x_\sigma x^\rho \delta^\sigma{}_\rho$ . Die Invarianz ist somit gewahrt.

Unsere Symmetriegruppe des Raums besteht aber aus einer größeren Gruppe, nämlich der Poincaré Gruppe. Diese umfasst nicht nur die Lorentzgruppe, sondern auch die Translationen im Raum:  $x' = x + y$ , mit  $y$  einem konstanten Vektor des  $\mathbb{R}^{D+1}$  beziehungsweise nach unserer Rotation  $y \in (\mathbb{i}\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^D$ . Da die Integrale nach der Wickrotation über ein reelles  $\tau$  laufen, werden wir im Folgenden den Raum  $\mathbb{R}^d$  ( $d=D+1$ ) mit einer negativen euklidischen Metrik betrachten. Unsere Poincaré Gruppe besteht damit aus Drehungen und Translationen. Wir betrachten die Erzeugenden dieser Symmetrioperationen. Die Erzeugenden der Drehungen haben wir schon kennengelernt. Es handelt sich um die Elemente von  $\mathfrak{so}(3)$ , deren Basis wir in einer Matrix  $M_{\mu\nu}$  verkürzt zusammenfassen. Diese ist antisymmetrisch und beinhaltet die infinitesimalen Drehungen in die drei Raumrichtungen [4] und [5].

$$M_{10} = -M_{01} = D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$M_{20} = -M_{02} = D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$M_{21} = -M_{12} = D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

mit  $[D_1, D_2] = D_3$  und zyklischer Vertauschung. Mit diesen Generatoren gewinnen wir die Darstellung

$$\Lambda = e^{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}. \quad (2.67)$$

Dabei resultiert  $\omega$  aus der Wahl der Drehwinkel. Wir betrachten eine Drehung in der  $\tau, x$  Ebene und haben

$$(\omega)^{\mu\nu} = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (2.68)$$

$$e^{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = e^{-\kappa D_1} = e^{-\omega} \quad (2.69)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \kappa^{2i}}{(2i)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^i \kappa^{2i+1}}{(2i+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Wir nutzten oben, dass die Quadrate der  $D_i$  die negativen Einheitsmatrizen auf den jeweiligen Bildräumen sind.

Die Translationen sind Verschiebungen, deren Generatoren wir mit  $P_\mu$  bezeichnen und die in  $\mu$  Richtung translatieren:

$$P_0 = (1, 0, 0), \quad P_1 = (0, 1, 0), \quad P_2 = (0, 0, 1). \quad (2.72)$$

$$x' = x + a_\mu P_\nu \delta^{\mu\nu}. \quad (2.73)$$

Es folgen die Kommutatorrelationen

$$[M_{\mu,\nu}, M_{\rho,\sigma}] = \delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\rho}M_{\sigma\mu} + \delta_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} \quad (2.74)$$

$$[P_\mu, M_{\nu,\sigma}] = 2\delta_{\mu\nu}P_\sigma - 2\delta_{\mu\sigma}P_\nu \quad (2.75)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad (2.76)$$

Betrachten wir allgemeine Tensorfelder mit Raumzeitindizes, so gilt im Sinne der Invarianz von Kontraktionen in verschiedenen Inertialsystemen folgendes Transformationsverhalten:

$$T_{\mu_1\mu_2\dots}^{\nu_1\nu_2\dots}(x') = \Lambda_{\mu_1}^{\rho_1}\Lambda_{\mu_2}^{\rho_2}\dots\Lambda_{\sigma_1}^{\nu_1}\Lambda_{\sigma_1}^{\nu_1}\dots T_{\rho_1\rho_2\dots}^{\sigma_1\sigma_2\dots}(x). \quad (2.77)$$

Insbesondere gilt somit

$$T^\mu(x')x'_\mu = \Lambda^\mu_\nu T^\nu(x)\Lambda_\mu^\rho x_\rho = T^\nu(x)x_\nu, \quad (2.78)$$

eine Relation, wie wir sie bei einer Invarianz unter Koordinatentransformationen erwarten. Hier erkennen wir, warum der Ausdruck  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  keine Invariante unter der reinen Spin(2) Drehung war. Offensichtlich muss ein solcher Term auch unter seiner Tensorstruktur transformieren.

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \stackrel{(2.51)}{=} \bar{\psi}(x')\mathcal{S}^{-1}\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\mathcal{S}\psi(x') \stackrel{!}{=} \Lambda^\mu_\nu\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x') \quad (2.79)$$

Obige Bedingung gilt es zu erfüllen, damit die Invarianz unter der Transformation gegeben ist. Wir leisten noch einiges an Vorarbeit in Analogie zu [6]. Wir definieren

$$\mathcal{T}_\rho(s) := e^{-\frac{s}{2}\omega^{\mu\nu}\zeta_{\mu\nu}}\gamma_\rho e^{\frac{s}{2}\omega^{\mu\nu}\zeta_{\mu\nu}}, \quad (2.80)$$

mit  $\varsigma_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu}{}^\sigma \gamma_\sigma$  und dem antisymmetrischen  $\omega$ , welches wir schon bei der Lorentztransformation kennengelernt hatten. Differenziert man obigen Term nach  $s$  und nutzt die Antikommutatorrelation der  $\gamma$  Matrizen, erhält man eine Differenzialgleichung, die man einfach lösen kann.

$$\partial_s \mathcal{T}_\mu(s) = \omega_\mu{}^\rho \mathcal{T}_\rho(s) \Rightarrow \mathcal{T}_\mu(s) = (e^{s\omega})_\mu{}^\sigma \gamma_\sigma \xrightarrow{s=1} e^{-\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu} \varsigma_{\rho\nu}} \gamma_\mu e^{\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu} \varsigma_{\rho\nu}} = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma_\nu \quad (2.81)$$

Dabei ist das jeweilige  $\omega$  im Exponenten zu wählen, welches die Indexstruktur aufweist, wie auch die resultierende Matrix haben soll. Wir setzen diese Erkenntnis in (2.79) ein und erhalten

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) = \bar{\psi}(x') \mathcal{S}^{-1} e^{-\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu} \varsigma_{\rho\nu}} \gamma_\mu e^{\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu} \varsigma_{\rho\nu}} \mathcal{S} \psi(x'). \quad (2.82)$$

Setzen wir  $\alpha \mathcal{S} = e^{-\frac{1}{2}\omega^{\rho\nu} \varsigma_{\rho\nu}}$  finden wir eine Möglichkeit der Identifizierung. Dabei bleibt eine Renormierung mit einem Skalar  $\alpha$  frei, den wir hier zu eins fixieren. Wir erkennen, dass die drei freien Parameter des antisymmetrischen Matrix  $\omega$  mehr als nur eine einfache Drehung aus  $SO(2)$  beschreiben. Das Element  $w_{12}$  entspricht dem vorher diskutierten Part eines Drehwinkels. Die Einträge  $\omega_{0i}$  hingegen gehören zu weiteren unitären Transformationen. Da die zugehörigen Matrizen komplex sind, werden die zuvor rein imaginären Einträge der Majorana Spinoren nach einer Rotation einen Real- und Imaginärteil aufweisen. Wir wollen auf diese aber nicht weiter eingehen. Wir stellen fest, dass die Spin induzierte Symmetrie für die Poincaré Transformationen gebraucht wird und nicht alleine steht. Aus diesem Grund wird sie im Folgenden die Raumzeitsymmetrie komplettieren, da beide allein nicht in allen Termen die Symmetrie erhalten.

Wir erkennen auch, dass ein Skalar nicht unter einer Koordinatentransformation geändert wird. Es sei an dieser Stelle auf den Unterschied in der Notation noch einmal hingewiesen. Wir betrachten Vektorfelder  $\chi_i$ , deren Komponenten durch lateinischen Buchstaben nummeriert werden. Dabei ist  $i$  eine positive ganze Zahl kleiner gleich  $N$ . Die griechischen Buchstaben bezeichnen hingegen Raumzeit Indizes beziehungsweise Komponenten des Wick rotierten Raums und laufen in  $d = 3$  von der Null bis zur Zwei. Dementsprechend gibt der Index  $i$  von  $\chi_i$  keinen Anlass zu einer Transformation unter Wickraumrotationen.

### 2.2.3 Supersymmetrie

Wir haben eine externe Symmetriestruktur, die Poincaré Transformationen und interne Symmetrien wie  $O(N)$  im später von uns betrachteten Fall. Diese Symmetrien interagieren aber nicht miteinander. Das Standardmodell der Teilchenphysik ist stark von internen Symmetrien geprägt ist, während die allgemeine Relativitätstheorie eine externe Raumsymmetrie ist. Folglich wollen wir beide im Sinne einer vereinheitlichenden Theorie verbinden. Wir stellen uns somit die Frage, wie wir Symmetrien finden können, die nicht in Externe und Interne zerfallen. Coleman und Mandula habe dieses Problem genauer untersucht und fanden folgendes Theorem.

**Coleman Mandula Theorem [7]** Die einzige Lie Algebra von Symmetriengeneratoren besteht aus den Generatoren der Poincaré Algebra, in massebehafteten Fällen, und Generatoren von internen Symmetrien, das heißt Elementen der Lie Algebra, der die Symmetrie vermittelnden Lie Gruppe, die mit denen der Poincaré Algebra kommutieren. Die Generatoren der internen Symmetrie wirken auf Quantenzustände, indem sie diese mit spin- und impulsunabhängigen hermitschen Matrizen multiplizieren, Einpartikelzustände in Einpartikelzustände überführen und Mehrpartikelzustände so transformieren, als ob sie die Einzelzustände transformieren. Dabei verstehen wir unter interner Symmetrie eine Transformation, die mit der Streumatrix kommutiert. Haben wir den masselosen Fall kann

die Poincaré Algebra durch eine Konforme ersetzt werden. Dies gilt unter den folgenden Annahmen:

1. Für beliebige Masse  $M$  gebe es nur endlich viele Teilchenarten mit einer Masse kleiner  $M$ .
2. Jeder Zweipartikelzustand interagiere bei fast allen Energien.
3. Die Amplitude der Zweipartikelstreuung sei eine analytische Funktion des Streuwinkels bei fast allen Energien und Winkeln.

Verfolgt man den Beweis, ist festzustellen, dass genutzt wird, dass die Spur eines Kommutators verschwindet. Dies liefert uns die Idee, wie wir das Theorem umgehen können, welches offensichtlich unserem Ziel einer Verknüpfung nicht förderlich ist. Wir betrachten eine so genannte graduierte Lie Algebra, die auch Antikommutator Relationen beinhaltet, wie wir sie aus der Definition der Clifford Algebra kennen. Dies führt uns auf den Begriff der Supersymmetrie. Wir werden diese im Folgenden axiomatisch einführen und auf eine Motivation der einzelnen Terme verzichten.

**Grundlegendes** Wir hatten bisher festgestellt, dass unsere Lie Algebren folgende Relation erfüllt haben ((2.20))

$$[X_i, X_j] = \sum_k f_{ij}^k X_k \quad (2.83)$$

und erweitern diese auf

$$X_i X_j - (-1)^{\eta_i \eta_j} X_j X_i = \sum_k f_{ij}^k X_k. \quad (2.84)$$

Wir bezeichnen Operatoren mit  $\eta_i = 1$  als fermionische Generatoren und  $\eta_i = 0$  als bosonische Generatoren. Offensichtlich ist eine Algebra, die nur aus bosonischen Generatoren besteht eine normale Lie Algebra und wir werden die uns bisher bekannten Operatoren in diese Kategorie einordnen. Das heißt, der neue Inhalt der Algebra wird in fermionischen Generatoren  $\mathcal{Q}_j$  und  $\bar{\mathcal{Q}}_i$  liegen. Die folgenden Ergebnisse sind in [8] noch einmal detaillierter nachzulesen und im Wesentlichen von dort übernommen. Betrachten wir die Kommutatorrelationen der Generatoren:

$$\{\mathcal{Q}_i, \bar{\mathcal{Q}}_j\} = 2(\gamma^\mu)_{ij} P_\mu \quad (2.85)$$

$$\{\mathcal{Q}_i, \mathcal{Q}^j\} = -2(\gamma^\mu \mathcal{C})_{ij} P_\mu = -2(\gamma^\mu \mathcal{C})_{ij} P_\mu \quad (2.86)$$

$$[\mathcal{Q}_i, P_\mu] = 0 \quad (2.87)$$

$$[\mathcal{Q}_i, M_{\mu\nu}] = (\zeta_{\mu\nu} \mathcal{Q})_i. \quad (2.88)$$

Dazu kommen noch die trivialen (Anti-)Kommutatoren der bosonischen internen Symmetrien mit den anderen Generatoren. Anhand von (2.88) sehen wir, warum der Name eines fermionischen Generators gerechtfertigt ist, da er offensichtlich wie ein Spin  $\frac{1}{2}$  Feld transformiert. Wir schließen daraus, dass der Operator den Spin eines Teilchens um  $\frac{1}{2}$  ändert und somit Fermionen in Bosonen umwandelt. Genauer betrachtet stellen wir fest, dass  $\mathcal{Q}_i$  den Spin um  $\frac{1}{2}$  senkt und  $\bar{\mathcal{Q}}_i$  den Spin um  $\frac{1}{2}$  erhöht. Damit findet man durch Supersymmetrietransformationen Spinmultipletts und auch eine Beschränkung der Anzahl an Supersymmetriegeneratoren, weil der Spin eines Teilchens im Sinne der Renormalisierbarkeit mit eins beschränkt ist. Aufgrund des Nöthertheorems finden wir mit der neuen Symmetrie eine erhaltene Größe, die sogenannte Superladung. Wir werden im Folgenden ein einfaches Modell mit einer Superladung und einer  $O(N)$  Symmetrie betrachten. Dabei werden wir den Superfeldformalismus verwenden, das heißt, wir werden bis auf eine totale Divergenz, explizit Supersymmetrie invariante, Terme haben.

**Das lineare  $\sigma$  Modell** Unser Feld ist ein Superfeld der Form

$$\chi_i(x, \theta) = \varphi_i(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F(x) \quad (2.89)$$

$$(2.90)$$

Dabei gilt, dass  $\varphi_i$  das bosonische Feld,  $\psi$  das fermionische Feld und  $F$  ein Hilfsfeld ist. Letzteres ist notwendig, um die Symmetrie ohne Anwendung der Bewegungsgleichung zu schließen.  $\theta$  ist eine Spinorvariable, deren Komponenten  $\theta_i$  Graßmannzahlen sind. Unsere Supersymmetriegeratoren sind

$$\mathcal{Q} := -\overleftarrow{\partial}_{\bar{\theta}} - \not{\partial}\theta = -\partial_{\bar{\theta}} - \not{\partial}. \quad (2.91)$$

Dabei haben wir uns in eine Ortsraumformulierung begeben und somit die Generatoren der Translationen durch Ableitungen  $\partial_\mu$  ersetzt, sowie die Kurzschreibweise  $\gamma^\mu B_\mu = \not{B}$  für die Kontrahierung mittels der  $\gamma$  Matrizen eingeführt.

Wir geben noch kovariante Ableitungen des Superraums an

$$D := \partial_{\bar{\theta}} + i\not{\partial}\theta \quad (2.92)$$

$$\bar{D} = -\partial_\theta - i\bar{\theta}\not{\partial} \quad (2.93)$$

$$\Rightarrow \bar{D}D =: K, \quad (2.94)$$

die einen verschwindenden Antikommutator mit den Generatoren der Supersymmetrie haben. Wir können mit den bisherigen Erkenntnissen eine Lagrangedichte formulieren:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\chi_i K \chi^i + 2U(\rho), \quad \rho(x) = \frac{1}{2}\chi_i(x)\chi^i(x) \quad (2.95)$$

Wir prüfen, ob diese Dichte eine Invariante ist. Die Interne  $O(N)$  Symmetrie ist genau so offensichtlich erhalten, wie die Raumzeitsymmetrie aufgrund der Tatsache, dass keine unkontrahierten Indizes vorkommen und das Superfeld sich wie ein bosonisches Feld unter Poincaré Transformationen verhält. Wir müssen somit nur explizit prüfen, ob die Wirkung invariant unter Supersymmetrietransformationen ist, wie wir behauptet haben.

$$\bar{\epsilon}\mathcal{Q}\chi_i = \bar{\epsilon}(-\partial_{\bar{\theta}} - \not{\partial}\theta) \left( \varphi_i(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F_i \right) = \bar{\epsilon} \left( -\psi_i - \theta F_i - \not{\partial}\theta\varphi_i + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\not{\partial}\psi_i \right) \quad (2.96)$$

Obiger Term ist die Änderung eines Superfeldes unter einer Supersymmetrietransformation. Setzen wir obigen Term in das Integral der Wirkung ein

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathcal{G}^2} d\theta \bar{\epsilon}\mathcal{Q}\chi_i = \gamma^\mu \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \partial_\mu \psi_i = 0, \quad (2.97)$$

sehen wir die Invarianz unter Ausnutzung von (2.29). Da keine Forderungen an die Komponenten des Superfeldes geknüpft waren, ist diese Symmetrie offensichtlich auch erhalten. Damit ist die von uns formulierte Theorie sinnvoll definiert.

Wir wissen aus unseren Betrachtungen über Graßmannzahlen schon, dass eine Entwicklung von Funktionen in Graßmannvariablen schnell abbricht (2.25). Eine äquivalente Formulierung unser Potenzial  $U(\rho) = U(\rho_0 + \rho_1(\bar{\theta}, \theta))$  mit  $\rho_1 = \bar{\theta}\psi n + \bar{\theta}\theta \frac{1}{2}(F n - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi)$  ist somit

$$U(\rho) = U(\rho_0) + U'(\rho_0)(\bar{\theta}\psi_i\varphi^i + \bar{\theta}\theta \frac{1}{2} \left( F^i\varphi_i - \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\psi^i \right)) - \frac{1}{4}U''(\rho_0)(\bar{\theta}\theta)\bar{\psi}_i\psi_j\varphi^i\varphi^j. \quad (2.98)$$



Wir haben schon festgestellt, dass die Wirkung nur unter Termen in  $\bar{\theta}\theta$  ändert und erkennen damit drei nichttriviale Beiträge. Eliminieren wir unser Hilfsfeld über die Euler Lagrange Gleichungen, so ergibt sich

$$F_i = -U'(\rho_0)\varphi_i \quad (2.99)$$

und damit der bosonische Anteil des Potentials zu

$$U_{\text{bos}}(\rho_0) = (U'(\rho_0))^2 \rho_0 \quad (2.100)$$

Das Potential ist im gesamten physikalischen Bereich, mit  $\rho_0 > 0$  nicht negativ und realisiert an der Stelle  $\rho_0 = 0$  ein Minimum. Existiert eine zweite Nullstelle, so sprechen wir von spontaner Brechung der  $O(N)$  Symmetrie. Denn betrachten wir das Problem in der Nähe eines Minimums, so sehen wir, dass die zweite Ableitung von  $U_{\text{bos}}$  nach einer Feldrichtung  $\varphi_i$  der quadratischen Kopplung und somit der Masse in dieser Richtung entspricht.  $U = U_0 + \frac{1}{2}m^2\chi_i^2 + \dots$ . Wir rotieren unsere Felder so, dass  $\chi_1^2 = 2\rho_0$  und haben somit zwei ausgezeichnete Richtungen, sofern wir uns an einem Punkt  $\rho_0 \neq 0$  befinden. Die Massenterme

$$\partial_{\chi_1}^2 U = U'_{\text{bos}}(\rho_0) + 2\rho_0 U''_{\text{bos}}(\rho_0) = 2\rho_0 U''_{\text{bos}}(\rho_0) =: m_{\text{rad}}^2 \quad (2.101)$$

$$\partial_{\chi_i}^2 U = U'_{\text{bos}}(\rho_0) = 0 =: m_{\text{gold}}^2 \quad i \neq 1 \quad (2.102)$$

sind am Minimum ( $\Rightarrow U'_{\text{bos}} = 0$ ) verschieden. Damit ist aber die Richtung  $\chi_1$  ausgezeichnet durch eine andere Masse und wir sprechen von einer spontanen Symmetriebrechung. Die Eins Richtung bezeichnen wir als Radiale Mode, während die restlichen  $N - 1$  Richtungen unter dem Begriff Goldstone Moden laufen. Offensichtlich ist an der Stelle  $\rho_0$  keine Richtung mehr explizit ausgezeichnet, sodass dort die Symmetrie realisiert sein muss.

### 2.3 Die Flussgleichung

Nachdem wir unseren physikalischen Sachverhalt eine mathematische Struktur gegeben haben, sind wir daran interessiert, welche Vorhersagen unsere Theorie machen kann. Dazu gibt es verschiedene Ansätze, von denen wir einen speziellen verwenden: die Renormierungsgruppenflussgleichungen. Dabei wird sich der Abschnitt im Wesentlichen an [9] orientieren mit leichten Modifikationen im Sinne der Verallgemeinerung auf eine Supersymmetrische Theorie. Wir sind im Allgemeinen an Theorien interessiert, wie sie sich zeigen, nachdem Quantenfluktuationen berücksichtigt wurden. Dies ist äquivalent dazu nach einer niedereenergetischen Theorie zu fragen, wenn man mit einer Formulierung gegeben bei hohen Energien startet. Das vorgestellte Verfahren der Flussgleichung bedient sich dabei eines stetigen Ansatzes der Art, dass man die Quantenfluktuationen auf Impulsschalen verortet und diese Schalen sukzessive aufsummiert oder in der Sprache der Infinitesimalrechnung aufintegriert.

Wie kann man realisieren, dass nur einen Teil der Impulse ausintegriert wird? Wir haben bereits festgestellt, dass unsere Zustandssumme die Gestalt

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi]+J[\chi]} \quad (2.103)$$

besitzt. Dabei ist  $\chi$  das mikroskopische Feld. Eine geeignete Modifikation der Zustandssumme ist:

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi]+J[\chi]-\Delta S_k[\chi]}. \quad (2.104)$$

Durch Hinzufügen eines zusätzlichen Wirkungsterm

$$\Delta S_k[\chi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_a(-q) R_k(q) \chi^a(q) \frac{1}{(2\pi)^d} dq \quad (2.105)$$

haben wir eine Impulsskala eingeführt. Wir werten unser Funktional im Impulsraum aus und haben dementsprechend die Funktion  $R_k$  im Impulsraum definiert ist. Es soll dabei die Funktion  $R_k$  so gewählt sein, dass die Impulse  $k \lesssim |q|$  ausintegriert werden und  $k \gtrsim |q|$  unterdrückt werden. Aus diesen Forderungen ergibt sich automatisch:

$$\lim_{k \rightarrow 0} Z_k[J] = Z[J] \quad (2.106)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_k[J] = e^{-S[0]}. \quad (2.107)$$

Es folgt für den Regulator:

$$R1 : \lim_{k \rightarrow 0} R_k(q) = 0 \quad (2.108)$$

$$R2 : \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k(q) = \infty. \quad (2.109)$$

Wir wollen noch eine weitere Forderung stellen, die eine Divergenz von masselosen Feldern bei kleinen Impulsen verhindert:

$$R3 : \lim_{q \rightarrow 0} R_k(q) > 0. \quad (2.110)$$

Der Impulsparameter  $\Lambda$  der angibt, bis zu welcher Skale die hochenergetische Theorie Gültigkeit besitzt, kann im Regulator explizit vorkommen. Im später betrachteten Fall wird aber darauf verzichtet. Ausgehend von dieser neuen skalenabhängigen Zustandssumme definieren wir ein modifiziertes thermodynamisches Potenzial mit

$$W_k[J] = \log Z_k[J]. \quad (2.111)$$

Dies wird mittels einer modifizierten Legendre Transformation in die gemittelte effektive Wirkung

$$\Gamma_k[\phi] := -W_k[J] + J[\phi] - \Delta S_k[\phi] \quad (2.112)$$

überführt. Wir konnten an dieser Stelle auf eine Supremumsbildung aufgrund der Konvexität von  $-W_k$  verzichten. Dabei sind wir zu gemittelten Felder

$$(\phi(q))^a := \overrightarrow{\delta}_{J_a(q)} W_k[J] \quad (2.113)$$

übergegangen. Eine Folgerung der inversen Transformation sei an dieser Stelle noch angegeben:

$$J^a(q) = \Gamma_k[\phi] \overleftarrow{\delta}_{\phi_a(q)} + \phi^a(-q) R_k(q) \quad (2.114)$$

Wir behaupten, dass obige Wirkung folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_{\mathbb{R}^d} dq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi](q, q') + R_k}, \quad (2.115)$$

wobei  $\partial_t = k \partial k$ ,  $t(\Lambda) = 0$  als dimensionslose Größe und

$$\Gamma_k^{(2)}[\phi](q, q') = \left( \overrightarrow{\delta}_{\phi^a(-q)} \Gamma_k[\phi] \overleftarrow{\delta}_{\phi^b(q')} \right)_{ab} \quad \text{sowie} \quad (R_k)_{ab} = R_k \delta_{ab} \quad (2.116)$$

eingeführt wurden. Es folgt der Beweis der Behauptung, wobei Abhängigkeiten die sich einfach aus vorheriger Notation vererben, teilweise unterdrückt werden.

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_k[\phi] &= -\partial_t W_k[J] - \int_{\mathbb{R}^d} (\delta_{J(p)} W_k[J]) (\partial_t J(p)) + \phi(p) \partial_t J(p) \frac{1}{(2\pi)^d} dq - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\
&\stackrel{(2.111), (2.113)}{=} \frac{1}{2} \int \mathcal{D}\chi \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \chi(-q) \partial_t R_k(q) \chi(q) e^{-S[\chi] + J[\chi] - \Delta S_k[\chi]} \frac{1}{(2\pi)^d} dq - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\
&\stackrel{(2.32), (2.105)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \partial_t R_k \overrightarrow{\delta}_{J^a(q)} \overleftarrow{\delta}_{J_a(-q)} W_k[J] \tag{2.117}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2.113)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dq dq' \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \partial_t R_k(q) \phi^a(-q) \overleftarrow{\delta}_{J^b(q')} \delta(q - q') \delta_a^b \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dq dq' \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \partial_t R_k(q) \left( \overrightarrow{\delta}_{\phi^a(-q)} J^b(q') \right)^{-1} \delta(q - q') \delta_a^b \\
&\stackrel{(2.32)}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dq dq' \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \partial_t R_k(q) \left( \overrightarrow{\delta}_{\phi^a(-q)} \Gamma_k[\phi] \overleftarrow{\delta}_{\phi_b(q')} + R_k(q) \delta_a^b \delta(q - q') \right)^{-1} \\
&\quad \delta(q - q') \delta_a^b \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dq dq' \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathcal{G}^{2[d]_2}} d\theta \partial_t R_k(q) \left( \Gamma_k^2[\phi](q, q') + R_k(q) \right)^{-1} \delta(q - q') \delta_{ab} \tag{2.118}
\end{aligned}$$

$$=: \frac{1}{2} \text{STr} \left[ \partial_t R_k(q) \left( \Gamma_k^2[\phi](q, q') + R_k(q) \right)^{-1} \right] \tag{2.119}$$

Dabei sind die vorkommenden Matrixmultiplikationen sowohl in den stetigen, wie auch in den diskreten Variablen auszuführen.

$$(A \cdot B)(q, q', \theta, \theta')_{ab} = \int d\theta'' dq'' A_{ac}(q, q'', \theta, \theta'') B_{cb}(q'', q', \theta'', \theta')$$

Die Struktur in den Grassmannvariablen entsteht, durch ein Vorgehen analog dem im Impulsraum. Es wird die Ableitung nach verschiedenen Feldern betrachtet, welche anschließend gleich zu setzen sind, was eine eingefügte Delta Distribution realisiert. Dabei sind in (2.117) die Ableitungen so zu verstehen, dass sich die richtige Reihenfolge der Felder  $\chi$  der oberen Zeile im fermionischen Anteil ergibt.

Wir werden im Folgenden der Entwicklung in Ableitungsordnungen folgen, wie sie in [9] vorgeschlagen wird. Diese Entwicklung ist, nachdem wir unsere Felder konstant gesetzt haben, die allgemeinste Form, die nicht verschwindende Beiträge zum Fluss des Potentials liefert [10].

$$\Gamma_k[\phi] = \int dx d\theta 2U(\rho) - \frac{1}{2} Z \phi_i(x) K(\partial_x, \theta) \phi^i(x) - \frac{1}{4} Y \rho(x) K(\partial_x, \theta) \rho(x) \tag{2.120}$$

Dabei ist  $Z$  die Wellenfunktionsrenormierung und  $Y$  die Korrektur zur Wellenfunktionsrenormierung der radialen Mode.

Auf zwei Aspekte gehen wir an dieser Stelle noch ein. Zum einen vorkommende Regulatoren und zum anderen den Begriff des Fixpunktes und die Analyse desselben.

### 2.3.1 Regulatoren

Wir haben in (2.108) bis (2.110) die Eigenschaften eines Regulators notiert. Im Sinne einer nichttrivialen Theorie sollte die Klasse der Funktionen, die diese Eigenschaften erfüllen

nicht leer sein. Deshalb werden wir an dieser Stelle eine Klasse von Regulatoren kennenlernen, wie wir sie später verwenden.

$$R_k(q, q', \theta, \theta') = (2r_1(q) - r_2(q)K(q, \theta))\delta(q - q')\delta(\theta - \theta') \quad (2.121)$$

Das heißt, der Regulator hat einen Term, der eine explizite Impulsabhängigkeit über den Ableitungsoperator  $K(q, \theta)$  besitzt, den  $r_2$  Term, und einen Term, der nur über sich selbst vom Impuls abhängt. Für unseren Fall kann dieser Term aber null gesetzt werden [1]. Wir beschränken uns deshalb auf einen  $r_2$  Term. Diesen wählen wir zu

$$r_{2n} = \frac{k^n}{|q|^n} \theta(k^2 - q^2). \quad (2.122)$$

Wir überprüfen die Forderungen, die wir an einen Regulator stellen, und sehen, dass diese erfüllt sind:

$$\lim_{k \rightarrow 0} r_{2n} = 0 \quad \text{für } q^2 \neq 0 \quad (2.123)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{2n} = \infty \quad (2.124)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} r_{2n} = \infty > 0 \quad (2.125)$$

Somit haben wir mit dieser Klasse von Regulatoren eine Vielzahl von Wahlmöglichkeiten, aus der wir den Fall  $n = 1$  als optimierten Regulator bezeichnen.

### 2.3.2 Stabilitätsanalyse

Beim genaueren Betrachten der linken Seite unserer Flussgleichung erkennen wir, dass wir offensichtlich den Fluss des Potentials  $U'$  erhalten. Wir sind im Allgemeinen an Fixpunkten  $U'_*(\rho)$  unserer Theorie interessiert  $\partial_t U'|_{U'(rho,t)=U'_*(\rho)} = 0$ , da diese Übergänge beschreiben, wie wir im Folgenden sehen werden. Wir untersuchen einen Punkt, an dem das Potential in eine polynomiale Reihe entwickelbar ist

$$U' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)(\rho - \rho_0(t))^i. \quad (2.126)$$

Der Fluss der  $a_i$  und  $\rho_0$  den sogenannten Kopplungen wird bestimmt. Dabei ist in unseren Betrachtungen entweder  $\rho_0 = 0$  oder  $a_0 = 0$  und die jeweils andere Kopplung als Nullte bezeichnet. Für den Fall  $a_0 = 0$  ergibt sich:

$$\dot{\rho}_0 := \partial_t \rho_0 = U'|_{\rho=\rho_0} = f_0(\rho_0, (a_j)_j) \quad (2.127)$$

$$\dot{a}_i := \partial_t a_i = \frac{1}{i!} (\partial_t U')^{(i)} - (i+1)a_{i+1}\dot{\rho}_0|_{\rho=\rho_0} = f_i(\rho_0, (a_j)_j) \quad (2.128)$$

und im Fall  $\rho_0 = 0$ :

$$\dot{a}_i = \frac{1}{i!} (\partial_t U')^{(i)}|_{\rho=0} = f_i((a_j)_j), \quad (2.129)$$

mit  $(U')^{(i)}$  der  $i + 1$ ten Ableitung von  $U$ . Bei einer Differenzialgleichung endlicher Ordnung  $k$  wird die Abhängigkeit höchstens bis zur Kopplung  $a_{i+k}$  reichen. Haben wir eine Fixpunktösung gefunden, betrachten wir die sogenannte Stabilitätsmatrix

$$(S_i)_{i=0}^{\infty} = (\text{grad} f_i)_{i=0}^{\infty}. \quad (2.130)$$

Diese ist ein linearer Operator, der zwischen zwei geeigneten Folgenräumen vermittelt. Auf  $l_2$  wird der Operator im Allgemeinen nicht beschränkt sein. Als Operator können wir die

Eigenwerte des Operators bestimmen. Wir stören die gefundenen Fixpunktkopplungen  $a_{i*}$  leicht und betrachten im linearen Regime das Potenzial

$$U' = U'_* + \sum_{i=0}^{\infty} \partial_{a_i} \dot{U}'|_{U'=U'_*} (a_i - a_{i*}) t + \mathcal{O}(t^2) + \mathcal{O} \sum_{i,j} (a_i - a_{i*})(a_j - a_{j*}). \quad (2.131)$$

Dabei ist  $a_0$  an dieser Stelle und im Folgenden, wenn nicht gesondert angegeben, die nullte Kopplung  $a_0$  oder  $\rho_0$ . Damit ändern sich die Kopplungen in diesem Fall wie folgt:

$$a_i = a_{i*} + \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{a_j} f_{i*} (a_j - a_{j*}) t = a_{i*} + \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} (a_j - a_{j*})_j t. \quad (2.132)$$

Eine kleine Störung in Richtung eines Eigenvektors  $b_i \in l = (a_j - a_{j*})_j$  mit den zugehörigen negativen Eigenwerten  $\theta_i$  wird sich wie

$$\partial_t b_i = \partial_t (a_j - a_{j*})_j = S b_i = -\theta_i b_i \quad (2.133)$$

ändern und damit in der linearen Näherung das folgende Verhalten aufweisen:

$$b_i = b_{i*} e^{-\theta_i(t-t_0)} \quad (2.134)$$

Ist die Theorie im Ultravioletten gegeben, so wird  $t_0 = 0 (k = \Lambda)$  sein und  $t < 0$  gelten oder allgemeiner, falls gilt  $k < k_0$  so auch  $t < t_0$  und  $t - t_0 < 0$

$$b_i = b_{i*} e^{\theta_i |t|}. \quad (2.135)$$

Das heißt, dass ein positiver Wert von  $\theta$  ein exponentielles Verstärken der Störung  $b_i$  bewirkt und das Vorzeichen beibehält. Somit wird eine Störung in positive  $b_i$  Richtung exponentiell von einer Störung in negative  $b_i$  Richtung separiert. Die resultierenden Potenziale  $U'$  im Infraroten werden sich prinzipiell unterscheiden und gehören somit zu zwei verschiedenen Phasen. Deshalb klassifizieren wir  $U'_*$  als Phasenübergang und bezeichnen die  $\theta_i$  als kritische Exponenten. Wir sehen noch, dass die Eigenvektoren mit negativen kritischen Exponenten eine Störung sind, die unterdrückt wird und gegen null strebt. Ein verschwindender Eigenwert ist ein Fall, der in dieser linearen Näherung nicht entscheidbar ist. Wir führen noch die übliche Sprechweise ein:

$$\begin{aligned} \theta_i > 0 : b_i \text{ ist relevante Richtung} \\ \theta_i = 0 : b_i \text{ ist marginale Richtung} \\ \theta_i < 0 : b_i \text{ ist irrelevante Richtung} \end{aligned}$$

In der praktischen Anwendung werden wir zumeist die Matrix  $S$  nicht exakt kennen. Das Gleiche gilt für die Fixpunktkopplungen. Wir greifen in diesen Fällen auf einen Trunkierungsansatz zurück und betrachten nur die ersten  $I + 1$  Gleichungen  $f_i = 0$  sowie die quadratische Matrix  $S_I = (S_{i,j})_{i,j=0}^I$  und deren Eigenwerte. Mit dem Wachsen von  $I$  fordern wir, dass sich sowohl die negativen Eigenwerte der Matrix  $\theta_i$  als auch die Kopplungen, die das trunkierte Fixpunktgleichungssystem lösen, stabilisieren. Was das heißt, sehen wir im nächsten Kapitel.

In unserem betrachteten Fall werden wir primär an dem Ansatz um die Nullstelle  $\rho_0$  interessiert sein. Sollte nur eine relevante Richtung vorhanden sein und diese im Wesentlichen eine Komponente in Richtung  $\rho_0$  besitzen, so wird die gefundene Lösung einen Phasenübergang zwischen der spontan gebrochenen und ungebrochenen Phase darstellen. Erkennbar ist dies an der Auszeichnung der Radialen Mode (2.102), die in der gebrochenen Phase einen anderen Masseterm besitzt, als die anderen Richtungen.

## 3 Die Flussgleichung

### 3.1 Vorüberlegungen

An dieser Stelle wollen wir noch einige Rechenregeln zusammentragen, die uns bei der Herleitung der Flussgleichung unseres linearen  $O(N)$  symmetrischen  $\sigma$  Modells hilfreich sein werden. Wir notieren zunächst die komponentenweise Darstellung des ladungskonjugierten Spinors nach einer Wick-Rotation.

$$\theta = (\theta_1, \theta_2)^t \quad \bar{\theta} = (-\theta_2, \theta_1) \quad (3.1)$$

Betrachten wir folgende Relationen

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \varphi^2 + 2\bar{\theta}\psi\varphi + \bar{\theta}\theta \left( F\varphi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi \right) \right) \quad (3.2)$$

$$\bar{D}D\phi = -2F - 2\bar{\theta}\not{p}\psi + p^2\bar{\theta}\theta\varphi_i \quad (3.3)$$

$$\rho\bar{D}D\phi_i|_{\bar{\theta}\theta} = \frac{1}{2}(-2F_i(F\varphi) + F_i\bar{\psi}\psi)\bar{\theta}\theta - \bar{\theta}\theta\varphi\bar{\not{p}}\psi_i + \frac{1}{2}p^2\bar{\theta}\theta\varphi_i\varphi^2 \quad (3.4)$$

$$\bar{D}D\rho = -2F\varphi + \bar{\psi}\psi - 2\bar{\theta}\not{p}\psi\varphi + \frac{1}{2}p^2\bar{\theta}\theta\varphi^2 \quad (3.5)$$

$$\phi_i D\bar{D}\rho|_{\bar{\theta}\theta} = \frac{1}{2}(-2F\varphi F_i + F_i\bar{\psi}\psi)\bar{\theta}\theta - \bar{\theta}\theta\bar{\psi}_i\not{p}\psi\varphi + \frac{1}{2}p^2\bar{\theta}\theta\varphi^2\varphi_i, \quad (3.6)$$

wobei wir nutzten, dass

$$\bar{\theta}_i\psi_i(p')\bar{\theta}_j\not{p}_{jk}\psi_k(p'') = \bar{\psi}_i\theta_i\bar{\theta}_j\not{p}_{jk}\psi_k(p'') = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)\bar{\psi}_i(p')\not{p}_{ik}\psi_k(p'') = -\bar{\theta}_i\psi_i(p'')\bar{\theta}_j\not{p}_{jk}\psi_k(p'), \quad (3.7)$$

aus den Rechenregeln für Spinoren (2.47) folgt. Damit gilt

$$\phi_i(p')K(-p)\phi_j(p'')|_{\bar{\theta}\theta} = \phi_j(p'')K(p)\phi_i(p')|_{\bar{\theta}\theta} \quad (3.8)$$

$$\phi_i(p')K(-p)\rho(p'')|_{\bar{\theta}\theta} = \rho(p'')K(p)\phi_i(p')|_{\bar{\theta}\theta} \quad (3.9)$$

$$\rho(p')K(-p)\rho(p'')|_{\bar{\theta}\theta} = \rho(p'')K(p)\rho(p')|_{\bar{\theta}\theta} \quad (3.10)$$

und andere Vertauschungsrelationen. Wir wählen das Maß unserer Graßmannintegration, sodass folgende Darstellung für unsere Delta Distribution gilt:

$$\delta(\theta - \theta') = 2\delta(\theta_2 - \theta'_2)\delta(\theta_1 - \theta'_1) = -(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') + 2\bar{\theta}\theta'. \quad (3.11)$$

**Die Wirkung von K Operatoren** Bei der Herleitung der Flussgleichung werden Terme auftreten, von denen die Spur im Superraum zu bilden sein wird. Wir untersuchen an dieser Stelle die Ergebnisse der Spurbildung in den Graßmannvariablen, wenn wir auf den bosonischen Anteil in den Superfeldern projizieren. Wir werden dazu Terme mit einer verschiedenen Anzahl an  $K$  Operatoren untersuchen und eine vereinfachte Rechenvorschrift finden. Wir starten mit zwei Delta Distributionen ohne vorkommenden Operator.

$$\frac{1}{4}\delta(\theta - \theta')\delta(\theta' - \theta) = \left[ \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') - \bar{\theta}\theta' \right] \left[ \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') - \bar{\theta}'\theta \right] = \frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}'\theta') + \bar{\theta}\theta'\bar{\theta}'\theta = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2}K(q, \theta)\delta(\theta - \theta') = [-\partial_\theta\partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta\not{q}\theta) - (\bar{\theta}\not{q}\partial_{\bar{\theta}}) + q^2(\bar{\theta}\theta)] \left[ -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') + \bar{\theta}\theta' \right] \quad (3.13)$$

$$= 2 - 2\bar{\theta}\not{q}\theta' - \frac{1}{2}q^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}'\theta'), \quad (3.14)$$

Als Nächstes betrachten wir einen einzelnen  $K$  Operator

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [K(q, \theta)\delta(\theta - \theta')] \delta(\theta' - \theta) &= \left[ 2 - 2\bar{\theta}q\theta' - \frac{1}{2}q^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}'\theta') \right] \left[ -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}'\theta') + \bar{\theta}\theta' \right] \\ &= \delta(\theta' - \theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [K(q, \theta)\delta(\theta - \theta'')] \delta(\theta'' - \theta')|_{\bar{\theta}'\theta''} &= \left[ 2 - 2\bar{\theta}q\theta'' - \frac{1}{2}q^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}''\theta'') \right] \left[ -\frac{1}{2}(\bar{\theta}'\theta' + \bar{\theta}''\theta'') + \bar{\theta}'\theta'' \right] \\ &= \left[ 1 + \bar{\theta}q\theta' - \frac{1}{4}q^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}'\theta') \right] \delta(\theta'') \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wir betrachten die Wirkung zweier  $K$  Operatoren auf eine  $\delta$  Distribution in den Graßmann Variablen, wobei wir einmal eine Matrixmultiplikation ausführen, indem wir auf die Anteile der gemeinsamen Graßmannvariable projizieren und einmal direkt das Produkt beider Operatoren betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} K(q, \theta)\delta(\theta - \theta'')K(q', \theta'')\delta(\theta' - \theta'') \\ &= \left[ 2 - 2\bar{\theta}q\theta'' - \frac{1}{2}q^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}''\theta'') \right] \left[ 2 - 2\bar{\theta}'q'\theta' - \frac{1}{2}q'^2(\bar{\theta}''\theta'')(\bar{\theta}'\theta') \right] \\ &= -(q^2\bar{\theta}\theta + q'^2\bar{\theta}'\theta')(\bar{\theta}''\theta'') + 4(\bar{\theta}q\theta'')( \bar{\theta}''q'\theta') + R(\theta'') \\ &= [(q^2\bar{\theta}\theta + q'^2\bar{\theta}'\theta') + 2(\bar{\theta}q\theta'')] \delta(\theta'') \end{aligned} \quad (3.17)$$

Falls  $q=q'$ :

$$= [-q^2\delta(\theta - \theta')] \delta(\theta'') + R(\theta'')$$

$$\begin{aligned} K(q, \theta)K(q', \theta)\delta(\theta' - \theta) \\ &= [-\partial_{\theta}\partial_{\bar{\theta}} - (\partial_{\theta}q\theta) - (\bar{\theta}q\partial_{\bar{\theta}}) + q^2(\bar{\theta}\theta)] [4 - 4\bar{\theta}q'\theta' - q'^2(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}'\theta')] \\ &= 4 [q^2\bar{\theta}'\theta' + q'^2\bar{\theta}\theta + \bar{\theta}q\theta' + \bar{\theta}'q'\theta] \\ &= 4 [q^2\bar{\theta}'\theta' + q'^2\bar{\theta}\theta + 2\bar{\theta}q\theta'] \end{aligned} \quad (3.18)$$

denn

$$\bar{\theta}Qq\theta' = (-1)^{\delta_{\mu\nu}+1}\bar{\theta}'Q_{\mu}q_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\theta = \bar{\theta}'qQ\theta \quad (3.19)$$

Dabei ist der Rest  $R(\theta'')$  verschwindend bei einer Integration  $\int d\theta''R(\theta'') = 0$ . Damit sind beide obigen Terme gleich. Wir gehen in analoger Weise für drei Operatoren vor

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} K(q, \theta)\delta(\theta - \theta'')K(q', \theta'')\delta(\theta'' - \theta''')K(q'', \theta''')\delta(\theta' - \theta''')|_{\delta(\theta'')\delta(\theta''')} \\ &= [q^2\bar{\theta}\theta + q'^2\bar{\theta}''\theta'' + 2\bar{\theta}q\theta''] \delta(\theta'') \left[ 2 + 2\bar{\theta}''q''\theta' - \frac{1}{2}q''^2(\bar{\theta}''\theta''')(\bar{\theta}'\theta') \right]_{\delta(\theta'')\delta(\theta''')} \\ &= \frac{1}{2} [q^2q''^2\bar{\theta}'\theta'\bar{\theta}\theta - 4q'^2 - 4\bar{\theta}q\theta'q''\theta'] \delta(\theta''')\delta(\theta'') \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} K(q, \theta)K(q', \theta)K(q'', \theta)\delta(\theta' - \theta) \\ &= [-\partial_{\theta}\partial_{\bar{\theta}} - (\partial_{\theta}q\theta) - (\bar{\theta}q\partial_{\bar{\theta}}) + q^2(\bar{\theta}\theta)] 4 [q''^2\bar{\theta}'\theta' + q'^2\bar{\theta}\theta + 2\bar{\theta}q\theta'q''\theta'] \\ &= 4 [q^2q''^2\bar{\theta}'\theta'\bar{\theta}\theta - 4q'^2 - 4\bar{\theta}q\theta'q''\theta'] \end{aligned} \quad (3.21)$$

und sehen auch hier eine Übereinstimmung. Wir haben damit eine Möglichkeit auf vereinfachte Weise Matrixmultiplikationen bezüglich der Graßmannvariablen durchzuführen,

sofern keine weiteren graßmannwertigen Felder vorkommen. Dies ist auf unseren Fall anwendbar, wie wir später sehen werden. Wir berechnen noch die Wirkung von mehreren  $K$  Operatoren aufeinander:

$$\begin{aligned} & K(q_4, \theta)K(q_3, \theta)K(q_2, \theta)K(q_1, \theta)\delta(\theta' - \theta) \\ &= \left[ -\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta \not{q}_4 \theta) - (\bar{\theta} \not{q}_4 \partial_{\bar{\theta}}) + q_4^2 (\bar{\theta} \theta) \right] 4 \left[ q_1^2 q_3^2 \bar{\theta}' \theta' \bar{\theta} \theta - 4q_2^2 - 4\bar{\theta} \not{q}_3 \not{q}_2 \not{q}_1 \theta' \right] \\ &= 16 \left[ -q_1^2 q_3^2 \bar{\theta}' \theta' - q_2^2 q_4^2 \bar{\theta} \theta + 2\bar{\theta} \not{q}_4 \not{q}_3 \not{q}_2 \not{q}_1 \theta' \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & K(q_5, \theta)K(q_4, \theta)K(q_3, \theta)K(q_2, \theta)K(q_1, \theta)\delta(\theta' - \theta) \\ &= 16 \left[ -q_1^2 q_3^2 q_5^2 \bar{\theta}' \theta' \bar{\theta} \theta + 4q_2^2 q_4^2 - 4\bar{\theta} \not{q}_5 \not{q}_4 \not{q}_3 \not{q}_2 \not{q}_1 \theta' \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.2 Herleitung der Flussgleichung

Wir notieren an dieser Stelle noch einmal die effektive Wirkung unserer Theorie

$$\Gamma_k[\phi] = \int dx d\theta 2U(\rho) - \frac{1}{2} Z \phi_i(x) K(\partial_x, \theta) \phi^i(x) - \frac{1}{4} Y \rho(x) K(\partial_x, \theta) \rho(x) \quad (3.24)$$

$$= \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} d\theta 2U(\rho) - \frac{1}{2} Z \phi_i(q) K(-q, \theta) \phi^i(-q) - \frac{1}{4} Y \rho(q) K(-q, \theta) \rho(-q). \quad (3.25)$$

Dabei wurden

$$\rho(x) := \frac{1}{2} \phi_i(x) \phi^i(x) \quad (3.26)$$

$$K(\partial_x, \theta) := \left[ -\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} + i(\partial_\theta \not{x} \theta) + i(\bar{\theta} \not{x} \partial_{\bar{\theta}}) - \Delta_x(\bar{\theta} \theta) \right] \quad (3.27)$$

$$K(q, \theta) := \left[ -\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta \not{q} \theta) - (\bar{\theta} \not{q} \partial_{\bar{\theta}}) + q^2 (\bar{\theta} \theta) \right] \quad (3.28)$$

schon im Sinne einer kompakten Schreibweise verwendet. Im Zuge der Herleitung orientieren wir uns an den Ideen von Wetterich [10]. Aus Gründen der vereinfachten Schreibweise und Verkürzung der auftretenden Terme nutzen wir unsere Eichfreiheit des  $O(N)$  Modells wie folgt:

$$\phi_i = \phi \delta_{1i}. \quad (3.29)$$

Wir drehen in diesem Sinne auf die Felder in die Eins Richtung und bezeichnen den Betrag mit  $\phi$ . Da die Größen  $Z$  und  $Y$  a priori in unbekannter Weise fließen, muss ein Ausdruck dafür durch eine geeignete Projektion aus der Flussgleichung gewonnen werden. Die Idee ist, die konstanten Hintergrundfelder auf eine geeignete Weise zu stören

$$\partial_{Q^2} \partial_{\delta\phi_c(Q)} \partial_{\delta\phi_d(-Q)} \Gamma|_{Q^2=0} = (Z + \rho Y \delta_{c1} \delta_{d1}) \delta(0) \delta_{cd} |_{\phi=\varphi} \Rightarrow \quad (3.30)$$

$$\partial_{Q^2} \partial_{\delta\phi_c(Q)} \partial_{\delta\phi_d(-Q)} \partial_t \Gamma|_{Q^2=0} = \partial_t (Z + \rho Y \delta_{c1} \delta_{d1}) \delta(0) \delta_{cd} |_{\phi=\varphi} \quad (3.31)$$

und die Vertauschbarkeit der Ableitungen zu nutzen.

Die Relation folgt direkt aus der noch folgenden Herleitung der Flussgleichung, siehe zum Beispiel (3.32). Wir haben auf die rein bosonischen Anteile des Flusses projiziert. Dies wurde durch die Struktur des Operators  $K$  und die Projektion auf  $Q^2$  erzielt. Im Folgenden werden wir uns deshalb primär für die Projektion auf den bosonischen Anteil interessieren, da wir die Flussgleichung in dieser Komponente des Superfeldes gewinnen wollen. Der Fluss in den anderen Komponenten kann bei Bedarf aus einer Supersymmetrietransformation gewonnen werden. Der Störimpuls sei im Weiteren klein gedacht. Wir gewinnen offensichtlich nur zwei unabhängige Gleichungen. Die Anregung in die  $c = d = 1$  Richtung ist die Radiale Mode. Sie entspricht in allgemeinen Koordinaten der Störung in Feldrichtung im  $N$ -dimensionalen  $\phi$  Raum. Die Anregungen in  $c = d \neq 1$  werden als Goldstone



Mode bezeichnet. Diese werden wir im Folgenden zusammenfassend unter  $c = 2$  verstehen. Im Verlauf dieses Abschnittes werden wir die einzelnen Terme der effektiven Wirkung  $\Gamma$  jeweils zweifach funktional nach Superfeldern ableiten und zusätzlich die Wirkung der Störung im Impuls bis zur quadratischen Ordnung berechnen.

**Der radiale Wellenfunktionsrenormierungsanteil  $\mathbf{Y}$**  Am Anfang steht die Berechnung des Parts, der von  $\mathbf{Y}$  abhängt. Konstante Faktoren unterdrücken wir zumeist dabei und werden sie erst später berücksichtigen. Wir bedenken, dass  $\phi_a$  und  $\phi_b$  Superfelder sind, schreiben aber entstehende Delta Distributionen der Graßmannvariable wie auch das Integral über diese nicht mit.

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho(p)}{\delta\phi_b(q)} &= \phi_b(p-q) \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi_a(-q)} \int_p \rho(p)K(-p)\rho(-p)dp &= \int_p (\phi_a(p+q)K(-p)\rho(-p) + \phi_a(q-p)K(p)\rho(p)) dp \\ \frac{1}{2}RHS \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_b(q')} &= \int_p \phi_a(q-p)K(p)\phi_b(p-q')dp + K(p)\rho(p)\delta_{ab}\delta(q-p-q')dp \end{aligned} \quad (3.32)$$

Der Operator  $K$  wirkt im ersten Term auf die unterdrückte Delta Distribution der Graßmann Zahlen und im Zweiten auf  $\rho$  und verschwindet somit bei konstantem Feld. Wir variieren im Folgenden nur um eine Impulskomponente, sodass von dem zweiten Operator nur der Anteil ohne Ableitung nach den Graßmann Zahlen übrig bleibt, was wir durch einen Hut über dem Operator kennzeichnen  $\hat{K}$ .

Wir stören den Anteil, der mit dem Kronecker Delta behaftet ist

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c(p)}\rho(q-q')\hat{K}(q-q') = \phi_c(q-q'-p)\hat{K}(q-q') \quad (3.33)$$

und nutzen die Tatsache, dass die Felder konstant sein sollen:

$$\phi_a(x) = \phi\delta_{a1} = \text{const.} \Rightarrow \phi_a(p) = \phi\delta_{a1}\delta(p) \Rightarrow f(\phi(p)) = f(C)\delta(p). \quad (3.34)$$

Insbesondere gilt somit auch für  $\rho$

$$\rho(p) = \frac{1}{2}\phi^2\delta(p). \quad (3.35)$$

Diesen Sachverhalt werden wir wiederholt verwenden, um die Termstruktur zu vereinfachen. Gehen wir an die Stelle  $p = \pm Q$ , so haben wir

$$\left( \delta\phi(Q) \frac{\delta}{\delta\phi_c(Q)} \right) \rho(q-q')\hat{K}(q-q') = \hat{K}(Q)\delta\phi(Q)\phi\delta_{c1}\delta(q-q'-Q) \quad (3.36)$$

mit

$$\hat{K}(\pm Q) = Q^2(\bar{\theta}\theta), \quad (3.37)$$

sowie die gleichen Terme mit  $-Q$ . Der Faktor  $\delta\phi(Q)$  markiert, dass es sich um den linearen Term der Entwicklung um eine Störung  $Q$  um  $q$  handelt. Wir werden im Folgenden die Abkürzung  $\delta\phi(Q) = \delta\phi = \delta\varphi$  sowie  $\delta\phi(-Q) = \delta\phi^*$  verwenden, da aufgrund der Eigenschaft, dass es sich im Ortsraum um reelle bosonische Felder handelt, in denen wir stören, die Felder  $\phi(Q)$  und  $\phi(-Q)$  zueinander komplex konjugiert sind. Eine reelle Störung resultiert

aus der Kombination  $\delta\phi\delta\phi^*$ , was mit unserer Projektion aus Gleichung (3.31) übereinstimmt.

Wir gehen mit dem verbliebenen Term analog vor und erhalten

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c(p)} \int_{p''} \phi_a(-p'' + q)\phi_b(p'' - q')K(p'')dp'' = \quad (3.38)$$

$$\phi_a(-p - q' + q)\delta_{bc}K(p + q') + \phi_b(q - q' - p)\delta_{ac}K(q - p), \quad (3.39)$$

was nach dem Einsetzen des Störimpulses und dem Nutzen der Eigenschaft konstanter Felder auf

$$\begin{aligned} & \phi_a(-Q - q' + q)\delta_{bc}\delta\phi\delta(-Q - q' + q)K(q' + Q) + (Q \rightarrow -Q) + (a \rightarrow b) + (Q \rightarrow -Q; a \rightarrow b) \\ & = (\phi_a\delta\phi\delta(q - q' - Q)\delta_{bc} + (Q \rightarrow -Q)) + (\phi_b\delta\phi\delta(q - q' - Q)\delta_{ac} + (Q \rightarrow -Q)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

führt.

In der Ordnung  $\delta\phi\delta\phi^*$  ergibt sich der  $\delta_{ab}$  Anteil zu

$$\frac{\delta}{\delta\phi_d(p')} \frac{\delta}{\delta\phi_c(p)} \rho(q - q')K(q - q') = K(q - q')\delta_{cd}\delta(q - q' - p - p'), \quad (3.41)$$

was mit der Setzung  $p = \pm Q$ ,  $q = \mp Q$  auf  $\hat{K}(0) = 0$  führt.

Der andere Term lautet

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\phi_d(p')} \frac{\delta}{\delta\phi_c(p)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{p''} \phi_a(q - p'')\phi_b(p'' - q')K(p'')dp'' \\ & = \delta_{ac}\delta_{bd}K(q - p)\delta(q - q' - p - p') + \delta_{ad}\delta_{bc}K(p + q')\delta(q - q' - p - p'). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Wir nutzen wieder  $p = \pm Q$ ,  $p' = \mp Q$  und erhalten den quadratischen Entwicklungsterm zu

$$(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})\delta\phi\delta\phi^*(K(q - Q) + K(q + Q))\delta(q - q'). \quad (3.43)$$

**Der Potenzialterm** Wir betrachten den Potenzialterm und gehen dabei analog zum radialen Wellenfunktionsrenormierungsanteil vor. Zunächst wird betrachtet, wie die Funktionalableitung im Impulsraum wirkt.

$$\int_x U(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int_x \int_{p_1, \dots, p_n} \prod_{i=1}^n \rho(p_i) e^{ix \sum_{i=1}^n p_i} dp_i dx \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overset{\rightarrow}{\delta}}{\delta\phi_a(-q)} \int_x U(x)dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \frac{1}{(2\pi)^{nd}} \int_x \int_{p_1, \dots, p_n} \prod_{i=2}^n \rho(p_i) e^{ix \sum_{i=2}^n p_i} \phi_a(p_1 + q) e^{ip_1 x} dp_i dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{x, p_1} U'(x) \phi_a(p_1 + q) e^{ip_1 x} dp_1 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{p_1} U'(-p_1) \phi_a(p_1 + q) dp_1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\frac{\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\phi_b(q')} RHS = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{p_1, p_2} U''(-p_2 - p_1) \phi_b(p_2 - q') \phi_a(p_1 + q) dp_1 dp_2 + U'(q - q') \delta_{ab} \quad (3.46)$$

Die Erkenntnisse über die Ableitung von  $\int U(x)dx$  auf  $U'$  wurden von  $U(x)$  auf  $U'(x)$  übertragen. Dies wird auch für die weiteren Terme geschehen, indem wir jeweils mittels

der Fouriertransformation die gewünschte Form herstellen und anschließend zurückrechnen. Mit konstanten Feldern liefert dies:

$$\left( \frac{1}{(2\pi)^{2d}} U''(q - q') \phi^2 \delta_{a1} \delta_{b1} + U'(q - q') \delta_{ab} \right) \delta(q - q'). \quad (3.47)$$

Den ersten Term in der Störung lesen wir somit zu

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\phi_c(p)} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{p_1, p_2} U''(-p_2 - p_1) \phi_b(p_2 - q') \phi_a(p_1 + q) dp_1 dp_2 + U'(q - q') \delta_{ab} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3d}} \int_{p_1, p_2, p_3} U'''(-\sum_{i=1}^3 p_i) \phi_c(p_3 - p) \phi_b(p_2 - q') \phi_a(p_1 + q) dp_1 dp_2 dp_3 \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{p_1} (U''(-q' - p - p_1) \delta_{bc} \phi_a(p_1 + q) \\ &+ U''(q - p_1 - p) \delta_{ac} \phi_b(p_1 - q') + U''(q - q' - p_1) \phi_c(p_1 - p) \delta_{ab}) dp_1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

ab. Setzen wir den Störungsimpuls für  $p$  ein und schreiben den linearen Term auf, erhalten wir

$$\begin{aligned} & U'''(q - q' - Q) \delta(q - q' - Q) \delta\phi \phi^3 \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + U''(q - q' - p) \delta\phi \phi (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \\ &+ U'''(q - q' + Q) \delta(q - q' + Q) \delta\phi^* \phi^3 \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + U''(q - q' + Q) \delta\phi^* \phi (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \end{aligned}$$

Die Entwicklung quadratisch in den Störfeldern wird zu

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\phi_d(p')} \frac{\delta}{\delta\phi_c(p)} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{p_1, p_2} U''(-p_2 - p_1) \phi_b(p_2 - q') \phi_a(p_1 + q) dp_1 dp_2 + U'(q - q') \delta_{ab} \\ &= \left( U^{(4)} \phi^4 \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} \delta_{d1} + U''' \phi^2 (\delta_{cd} \delta_{a1} \delta_{b1} + \delta_{c1} \delta_{ad} \delta_{b1} + \dots) + U'' \right) \delta(q - q' - p - p') \end{aligned} \quad (3.49)$$

bestimmt. Wir werden später sehen, dass dieser Beitrag nicht relevant ist, da er unabhängig vom Störimpuls ist, wie auch schon in [10] angegeben.

**Der Wellenrenormierungsanteil** Aufgrund der speziellen Struktur haben wir hier nur die funktionalen Ableitungen nach den Superfeldern zu bilden, da wir die Wellenfunktionsrenormierung nur abhängig von  $k$  betrachten, aber nicht abhängig von den Feldern oder dem Impuls. Damit ist der Term invariant unter einer Störung in  $Q$ .

Teilen wir die effektive Zweipunktwirkung auf

$$\Gamma_{ab}^2(q, q') = \Gamma_{ab0}^2(q, q') + \Gamma_{ab1}^2(q, q') + \Gamma_{ab2}^2(q, q'), \quad (3.50)$$

so erhalten wir für die Anteile sortiert in  $\delta\phi$

$$\Gamma_{ab0}^2(q, q', \theta, \theta') = (4U'' \rho \delta_{a1} \delta_{b1} + 2U' \delta_{ab} - ZK(q, \theta) \delta_{ab} - Y \rho \delta_{a1} \delta_{b1} K(q, \theta)) \delta(\theta - \theta') \quad (3.51)$$

$$\Gamma_{ab1}^2(q, q', \theta, \theta') = (\delta\phi \phi \gamma_{ab}(q, Q) \delta(q - q' - Q) + \delta\phi^* \phi \gamma_{ab}(q, -Q) \delta(q - q' + Q)) \delta(\theta - \theta') \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab2}^2(q, q', \theta, \theta') &= \left[ 2 \left( U^{(4)} \phi^4 \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} \delta_{d1} + U''' \phi^2 (\delta_{cd} \delta_{a1} \delta_{b1} + \delta_{c1} \delta_{ad} \delta_{b1} + \dots) + U'' \right) + \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} Y ((\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) (K(q - Q, \theta) + K(q + Q, \theta))) \right] \delta(q - q') \delta\phi \delta\phi^* \delta(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (3.53)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}(q, Q) &= 4U''' \rho \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + 2U'' (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} Y \left( K(q, \theta) \delta_{a1} \delta_{bc} + K(q - Q, \theta) \delta_{b1} \delta_{ac} + \hat{K}(Q, \theta) \delta_{c1} \delta_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\delta\phi = \delta\phi(Q) \quad \delta\phi^* = \delta\phi(-Q). \quad (3.55)$$

Wie erwähnt, wirken die Operatoren  $K$  nur auf die grafmannartigen Delta Distributionen und  $\hat{K}(Q) = Q^2 \bar{\theta}\theta$  Setzen wir nun  $c = d = 1$  so erhalten wir die Radialen Moden und mittels der Grenzwertbildung den Fluss von  $\tilde{Z}$  und analog für  $c = d = 2$  die Goldstone Moden und somit den Fluss von  $Z$ .

**Der Fluss des Potenzials** Wir bestimmen das Inverse von  $\Gamma_{ab0}^2(q, q') + R_k(q, q') \delta_{ab}$ , mit der zu

$$R_k(q, q', \theta, \theta') = -r_2(q) K(q) \delta(q - q') \delta(\theta - \theta') \quad (3.56)$$

gegebenen Regulatorfunktion und nutzen die Diagonalstruktur, wobei  $W'_{aa}(q) = U' + 2U'' \rho \delta_{a1}$  und  $h_{aa}(q) = Z + r_2(q) + Y \rho \delta_{a1}$  als Abkürzungen einführt werden. Wir suchen die Inverse, die durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\Gamma_{aa0}^2(q, \theta, \theta') + R_k(q, \theta, \theta') = (2W'_{aa}(q) - h_{aa}(q) K(q, \theta)) \delta(\theta - \theta') \quad (3.57)$$

$$\delta(\theta' - \theta'') = \int d\theta [\Gamma_{aa0}^2 + R_k]^{-1}(q, \theta', \theta) (\Gamma_{aa0}^2 + R_k)(q, \theta, \theta'') \quad (3.58)$$

$$d\theta = \frac{1}{2} d\theta^1 d\theta^2. \quad (3.59)$$

Die Tatsache nutzend, dass  $K(q)K(q) = -4q^2$  gilt, lesen wir die Inverse leicht zu

$$[\Gamma_{aa0}^2 + R_k]^{-1}(q, \theta, \theta') = \frac{2W'_{aa}(q) + h_{aa}(q) K(q, \theta)}{4W_{aa}^{\prime 2}(q) + 4q^2 h_{aa}^2(q)} \delta(\theta' - \theta) \quad (3.60)$$

ab.

Damit bleiben in der Flussgleichung nur nicht verschwindende Beiträge übrig, wenn ein Term mit auf einen ohne den Operator  $K$  trifft. Es verbleibt folgende Flussgleichung:

$$\partial_t \Gamma_k = - \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} \int d\theta d\theta' dx dq \frac{1}{(2\pi)^3} \partial_t R_k(q, \theta, \theta') [\Gamma_{aa0}^2 + R_k]^{-1}(q, \theta', \theta) \quad (3.61)$$

$$= \sum_{a=1}^N \int d\theta dx dq \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{-W'_{aa}(q) \dot{r}_2(q)}{W_{aa}^{\prime 2}(q) + q^2 h_{aa}^2(q)} \Rightarrow \quad (3.62)$$

$$\partial_t 2U = \sum_{a=1}^N \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{-W'_{aa}(q) \dot{r}_2(q)}{W_{aa}^{\prime 2}(q) + q^2 h_{aa}^2(q)} \quad (3.63)$$

**Der Fluss der Wellenfunktionsrenormierung** Um die Flussgleichung der Wellenfunktionsrenormierung  $Z$  und deren radiales Pendant  $\tilde{Z}$  zu erhalten, berechnen wir die Entwicklung von  $(\Gamma_{ab}^2 + R_k \delta_{ab})^{-1}(q, q', \theta, \theta')$ . Die Entwicklung liest sich in den in der Ordnung  $\delta\phi\delta\phi^*$  beitragenden Termen:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ab}^2 + R_k \delta_{ab})^{-1}(q, q', \theta, \theta') &= [\Gamma_{ad0}^2 + R_k \delta_{ad}]^{-1} \left( -\Gamma_{de2}^2 [\Gamma_{eb0}^2 + R_k \delta_{eb}]^{-1} + \right. \\ &\quad \left. \Gamma_{de1}^2 [\Gamma_{ef0}^2 + R_k \delta_{ef}]^{-1} \Gamma_{fg1}^2 [\Gamma_{gb0}^2 + R_k \delta_{gb}]^{-1} \right) (q, q') \delta(\theta - \theta') \end{aligned} \quad (3.64)$$

Treten bei der Matrixmultiplikation rein diagonale Summen oder Integrale auf, signalisiert durch ein Kronecker Symbol oder eine Delta Distribution, werden diese unterdrückt. Betrachten wir den Term, der aus der linearen Entwicklung des Bruches entsteht, so trifft obiger Fakt in allen Variablen auf. In der sich anschließenden einfachen Berechnung werden einfach nachvollziehbare Abhängigkeiten unterdrückt.

$$\begin{aligned}
& [\Gamma_{aa0}^2 + R_k]^{-1} \Gamma_{aa2}^2 [\Gamma_{aa0}^2 + R_k]^{-1} (q, \theta, \theta') \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{(2W'_{aa} + h_{aa}K)(q, \theta)}{W_{aa}'^2 + q^2 h_{aa}^2} \right) \left[ 2V - \frac{1}{4} Y (2\delta_{ac} (K(q - Q, \theta) + K(q + Q, \theta))) \right] \\
&\quad \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{(2W'_{aa} + h_{aa}K)(q, \theta)}{W_{aa}'^2 + q^2 h_{aa}^2} \right) \delta\phi\delta\phi^*\delta(\theta' - \theta)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Wir bestimmen nur den Anteil abhängig von  $Q^2$

$$\begin{aligned}
|_{Q^2} &= \frac{1}{16} \frac{-\frac{1}{2} h_{aa}^2 K(q)K(q - Q)K(q) - h_{aa}W'_{aa}(K(q)K(q - Q) + K(q - Q)K(q))}{(W_{aa}'^2(q) + q^2 h_{aa}^2(q))^2} \\
&\quad - \frac{2W_{aa}'^2 K(q - Q)}{(W_{aa}'^2(q) + q^2 h_{aa}^2(q))^2} \delta_{ac} \delta\phi\delta\phi^* + (Q \rightarrow -Q)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Mithilfe der nützlichen Relationen

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') \delta(\theta - \theta') = 0 \tag{3.67}$$

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_1, \theta') \delta(\theta - \theta') = -4(q_1 - q)^2 \tag{3.68}$$

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_1, \theta') K(q_2, \theta') \delta(\theta - \theta') = 0 \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
& \int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_3, \theta') K(q_2, \theta') K(q_1, \theta') \delta(\theta - \theta') \\
&= 16(q_1^2 q_3^2 + q_2^3 q^2) + 32 \int d\theta \bar{q} q_3 q_2 q_1 \theta
\end{aligned} \tag{3.70}$$

setzen wir in der Flussgleichung nur die relevanten Terme ein. Der erste Anteil des Flusses von  $\tilde{Z}$  im Fall von  $c = 1$  und von  $Z$  im Fall  $c = 2$  ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_1 &= -\partial_{Q^2} \int d\theta d\theta' \frac{dq}{(2\pi)^3} \partial_t R_k \delta(\theta - \theta') \frac{-Y - \frac{1}{2} h_{cc}^2 K(q)K(q - Q)K(q) - 2W_{cc}'^2 K(q - Q)}{(W_{cc}'^2(q) + q^2 h_{cc}^2(q))^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 Y \frac{-W_{cc}'^2 + q^2 h_{cc}^2}{(W_{cc}'^2(q) + q^2 h_{cc}^2(q))^2}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dabei haben wir die Matrixmultiplikation in den Graßmannvariablen noch einmal explizit im Sinne der Lesbarkeit ausgeführt. Vollkommen äquivalent dazu wäre die Berechnung mittels:

$$\int d\theta (K(q, \theta) \dot{r}_2 K(q - Q) \delta(\theta - \theta') |_{\theta'=\theta}) \tag{3.72}$$

Obiges ist so zu lesen, dass erst nach dem Auswerten des inneren Terms  $\theta = \theta'$  zu setzen ist und anschließend integriert wird. Man beachte die Nutzung des Umstandes, dass wir am Ende auf die rein bosonischen Felder projizieren und somit die fermionischen und Hilfsfelder null setzen. Damit liefert eine Entwicklung der Felder in diesen keine graßmannwertigen Anteile. Dies steht im Gegensatz zur Herleitung der Flussgleichung des Potentials, wo wir sie verwendet hatten. Wären diese mit zu betrachten, so hätten wir auf andere Anteile in den Gleichungen projiziert.

Wir berechnen den Term der in der zweiten Ordnung der Entwicklung des Nenners einen Beitrag zu  $Q^2$  liefert. Dies erfolgt iterativ in mehreren Schritten. Da die Terme hier nicht rein diagonal im Impuls sind, müssen wir die Impulsintegration bei der Matrixmultiplikation berücksichtigen. Des Weiteren existieren Nichtdiagonalterme in den diskreten Variablen  $a, b$ , im Falle von  $c = 2$ , sodass die Summation explizit ausgeführt wird.

$$\sum_d \int dq'' \frac{1}{(2\pi)^3} [\Gamma_{ad0}^2 + R_k]^{-1}(q, q'', \theta) \Gamma_{db1}^2(q'', q', \theta) \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \frac{(2W'_{aa} + h_{aa}(q)K)(q, \theta)}{W_{aa}^{\prime 2}(q) + q^2 h_{aa}^2(q)} \\ &\quad (\delta\phi\phi\gamma_{ab}(q, Q, \theta)\delta(q - q' - Q) + \delta\phi^*\phi\gamma_{ab}(q, -Q, \theta)\delta(q - q' + Q)) \\ &= \frac{2W'_{aa}V_{ab} + h_{aa}V_{ab}K(q) - W'_{aa}Y(K(q)\delta_{a1}\delta_{bc} + K(q - Q)\delta_{b1}\delta_{ac} + \hat{K}(Q)\delta_{c1}\delta_{ab})}{4(W_{aa}^{\prime 2} + q^2 h_{aa}^2)} \\ &\quad - \frac{h_{aa}YK(q)(K(q, \theta'')\delta_{a1}\delta_{bc} + K(q - Q, \theta'')\delta_{b1}\delta_{ac} + K(Q, \theta'')\delta_{c1}\delta_{ab})}{8(W_{aa}^{\prime 2} + q^2 h_{aa}^2)} \delta(q - q' - Q) \delta\phi\phi \\ &\quad + (Q \rightarrow -Q) \delta\phi^*\phi \\ &= S_{ab}(q, Q) \delta\phi\phi\delta(q - q' - Q) + S_{ab}(q, -Q) \delta\phi^*\phi\delta(q - q' + Q) \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}(q, Q, \theta'') &= 4U''' \rho \delta_{a1}\delta_{b1}\delta_{c1} + 2U'' (\delta_{bc}\delta_{a1} + \delta_{ac}\delta_{b1} + \delta_{ab}\delta_{c1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} Y (K(q, \theta'')\delta_{a1}\delta_{bc} + K(q - Q, \theta'')\delta_{b1}\delta_{ac} + K(Q, \theta'')\delta_{c1}\delta_{ab}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$= V_{ab} - \frac{1}{2} Y (K(q, \theta'')\delta_{a1}\delta_{bc} + K(q - Q, \theta'')\delta_{b1}\delta_{ac} + K(Q, \theta'')\delta_{c1}\delta_{ab}) \quad (3.76)$$

Wir quadrieren:

$$\begin{aligned} &\sum_d (S_{ad}(q, Q)S_{db}(q' - Q, -Q) + S_{ad}(q, -Q)S_{db}(q' + Q, Q)) \delta\phi^*\delta\phi\phi^2\delta(q - q') \\ &= \left[ \frac{2W'_{aa}V_{ad} + h_{aa}V_{ad}K(q) - W'_{aa}Y(K(q)\delta_{a1}\delta_{dc} + K(q - Q)\delta_{d1}\delta_{ac} + \hat{K}(Q)\delta_{c1}\delta_{ad})}{4(W_{aa}^{\prime 2} + q^2 h_{aa}^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2} h_{aa}YK(q) (K(q)\delta_{a1}\delta_{dc} + K(q - Q)\delta_{d1}\delta_{ac} + \hat{K}(Q)\delta_{c1}\delta_{ad})}{4(W_{aa}^{\prime 2} + q^2 h_{aa}^2)} \delta\phi\phi \right] \\ &\quad \left[ \frac{2W'_{dd}V_{db} + h_{dd}V_{db}K(q - Q) - W'_{dd}Y(K(q - Q)\delta_{d1}\delta_{bc} + K(q)\delta_{b1}\delta_{dc} + \hat{K}(-Q)\delta_{c1}\delta_{db})}{4(W_{dd}^{\prime 2} + (q - Q)^2 h_{dd}^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2} h_{dd}YK(q - Q) (K(q - Q)\delta_{d1}\delta_{bc} + K(q)\delta_{b1}\delta_{dc} + \hat{K}(-Q)\delta_{c1}\delta_{db})}{4(W_{dd}^{\prime 2} + (q - Q)^2 h_{dd}^2)} \delta\phi^*\phi \right] \\ &\quad + (Q \rightarrow -Q) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Bevor wir obigen Ausdruck weiter untersuchen, beschäftigen wir uns mit dem Ergebnis der endgültigen Spurbildung in den Graßmannvariablen in Abhängigkeit von den vorkommenden Operatoren  $K$  und  $\hat{K}$ . Dazu erinnern wir uns folgender Relationen:

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') \delta(\theta - \theta') = 0 \quad (3.78)$$

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_1, \theta') \delta(\theta - \theta') = -4(q_1 - q)^2 \quad (3.79)$$

$$\int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_1, \theta') K(q_2, \theta') \delta(\theta - \theta') = 0 \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \int d\theta d\theta' K(q, \theta) \delta(\theta - \theta') K(q_3, \theta') K(q_2, \theta') K(q_1, \theta') \delta(\theta - \theta') \\ = 16(q_1^2 q_3^2 + q_2^3 q^2) + 32 \int d\theta \bar{\theta} \not{q} \not{q}_3 \not{q}_2 \not{q}_1 \theta. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Höhere Terme ergeben sich analog. Es folgt, dass Terme in gerader Ordnung in  $K$  mit  $\dot{r}_2(q)h_{aa}(q)$  und Terme in ungerader Ordnung mit  $\dot{r}_2(q)2W'_{aa}$  sowie den zugehörigen Graßmannvariablen  $K(q, \theta)\delta(\theta - \theta') \dots K(q, \theta)\delta(\theta - \theta')$  beziehungsweise  $K(q, \theta)\delta(\theta - \theta') \dots \delta(\theta - \theta')$  auszuwerten sind.

Kommt ein  $\hat{K}(\pm Q)$  vor, liefert dieser schon den Beitrag  $Q^2$ , sodass andere vorkommende  $Q$  null gesetzt werden können und sich eine erhebliche Vereinfachung ergibt. Zum Beispiel gilt in der betrachteten Ordnung:  $K(q - Q)K(q)\hat{K}(-Q) = K(q)^2\hat{K}(Q)$ . Des Weiteren wissen wir, dass zwei gleiche  $K(q, \theta)$  Operatoren zu  $-4q^2$  werden. Dies ausnutzend brauchen wir noch folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} K(q, \theta) \hat{K}(Q, \theta) \delta(\theta - \theta')|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} \\ = [-\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta \not{q} \theta) - (\bar{\theta} \not{q} \partial_{\bar{\theta}}) + q^2(\bar{\theta}\theta)] Q^2(\bar{\theta}\theta) \delta(\theta - \theta')|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} \\ = -Q^2 [-\partial_\theta \partial_{\bar{\theta}} - (\partial_\theta \not{q} \theta) - (\bar{\theta} \not{q} \partial_{\bar{\theta}}) + q^2(\bar{\theta}\theta)] (\bar{\theta}'\theta')(\bar{\theta}\theta)|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} \\ = 4Q^2 \bar{\theta}\theta = -4Q^2 \delta(\theta) \\ = \hat{K}(Q, \theta) K(q, \theta) \delta(\theta - \theta')|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} \end{aligned} \quad (3.82)$$

und

$$K(q, \theta) \hat{K}(Q, \theta) K(q, \theta) \delta(\theta - \theta')|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} = K(Q, \theta) \delta(\theta - \theta')|_{\theta=\theta', \bar{\theta}\theta} = 0 \quad (3.83)$$

Dabei haben wir die Zyklizität der Spur genutzt. Aufgrund dieser Eigenschaft folgt sofort, dass nur interessant ist, in welcher Potenz  $K(q, \theta)$  insgesamt vorkommt. Dabei liefert der Regulator Term einen Operator und der noch zu multiplizierende Term entweder keinen Operator und  $2W'_{aa}$  oder einen Operator und  $h_{aa}$ , sowie immer den Nennerterm  $(4(W'_{aa}{}^2 + q^2 h_{aa}^2))^{-1}$ . Die Anzahl der Operatoren  $K(q, \theta)$  entspricht der Zahl, wie sie auch in der folgenden Notation (3.86) Verwendung finden.

$$K(q, \theta)^{2n+1} \hat{K}(Q, \theta) : (-4)^{n+2} q^{2(n+1)} Q^2 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'_{aa}{}^2 + q^2 h_{aa}^2))^{-1} \quad (3.84)$$

$$K(q, \theta)^{2n} \hat{K}(Q, \theta) : (-4)^{n+1} q^{2n} Q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'_{aa}{}^2 + q^2 h_{aa}^2))^{-1} \quad (3.85)$$

Wir müssen somit die Terme, die in Gleichung (3.77) als Koeffizienten der  $K$  und  $\hat{K}$

aufzutreten, mit folgenden Faktoren multiplizieren:

$$\begin{aligned}
& K^0 : 0 \\
& \quad \vdots \\
& K(q)^3 : 0 \\
& K(q-Q) : -4Q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)K(q-Q) : 16Q^2 q^2 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)^2 K(q-Q) : 16Q^2 q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)^3 K(q-Q) : -64Q^2 q^4 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q-Q)^2 : 0 \\
& \quad \vdots \\
& K(q)^2 K(q-Q)^2 : 0 \\
& K(q-Q)^3 : 16(q-Q)^2 Q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)K(q-Q)^3 : -64Q^2 q^4 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& \hat{K}(Q) : -4Q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)\hat{K}(Q) : 16q^2 Q^2 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)^2 \hat{K}(Q) : 16q^2 Q^2 \dot{r}_2 2W'_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1} \\
& K(q)^3 \hat{K}(Q) : -64q^4 Q^2 \dot{r}_2 h_{aa} (4(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}))^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir rechnen für  $c=1$  die oben erwähnten Terme von Gleichung (3.77) aus, wobei wir Terme, die nicht beitragen, schon vernachlässigen und Terme, welche die gleichen Faktoren erhalten, teilweise schon zusammenfassen, sowie den Nennerterm nicht mitnotieren.

$$\begin{aligned}
& K(q-Q) : 2h_{aa} V'^2_{aa} W'_{aa} - 4V_{1a} W'^2_{1a} Y \\
& K(q)K(q-Q) : h^2_{aa} V'^2_{aa} - 4h_{1a} V_{1a} W'_{1a} Y + 2W'^2_{1a} Y^2 \\
& K(q)^2 K(q-Q) : -h^2_{1a} V_{1a} Y + \frac{3}{2} h_{1a} W'_{1a} Y^2 \\
& K(q)^2 K(q-Q)K(q) : \frac{1}{4} h^2_{1a} Y^2 \\
& K(q-Q)^3 : \frac{1}{2} h_{1a} W'_{1a} Y^2 \\
& K(q)K(q-Q)^3 : \frac{1}{4} h^2_{1a} Y^2 \\
& \hat{K}(Q) : -4V_{aa} W'^2_{aa} Y \\
& K(q)\hat{K}(Q) : 4(W'^2_{1a} Y^2 - h_{aa} V_{aa} W'_{aa} Y) \\
& K(q)^2 \hat{K}(Q) : 4h_{1a} W'_{1a} Y^2 - h^2_{aa} V_{aa} Y \\
& K(q)^3 \hat{K}(Q) : h^2_{1a} Y^2.
\end{aligned}$$



Wir können somit den Beitrag zum Fluss aus diesem Entwicklungsterm zu

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{Z}_2 = & \frac{-1}{2} \sum_{a=1}^N \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 [-h_{aa} V_{aa}^2 W_{aa}'^2 + 2V_{1a} W_{1a}'^3 Y + 2V_{aa} W_{aa}'^3 Y + \\ & [h_{aa}^3 V_{aa}^2 - 6h_{1a}^2 V_{1a} W_{1a}' Y + 18h_{1a} W_{1a}'^2 Y^2 + h_{1a} W_{1a}'^2 Y^2 - 6h_{aa}^2 V_{aa} W_{aa}' Y] q^2 + \\ & -6h_{1a}^3 Y^2 q^4] \frac{\rho}{(W_{aa}'^2 + q^2 h_{aa}^2)^3} \end{aligned} \quad (3.86)$$

bestimmen. Dabei gewannen wir einen Faktor zwei aus der Vertauschung  $Q$  gegen  $-Q$  und einen weiteren Faktor zwei aus der Zusammenfassung von  $\phi^2$  zu  $2\rho$ . Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{Z} = & \frac{-1}{2} \sum_{a=1}^N \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 [-h_{aa} V_{aa}^2 W_{aa}'^2 + 2V_{1a} W_{1a}'^3 Y + 2V_{aa} W_{aa}'^3 Y + \\ & [h_{aa}^3 V_{aa}^2 - 6h_{1a}^2 V_{1a} W_{1a}' Y + 18h_{1a} W_{1a}'^2 Y^2 - 6h_{aa}^2 V_{aa} W_{aa}' Y] q^2 + \\ & -6h_{1a}^3 Y^2 q^4] \frac{1}{(W_{aa}'^2 + q^2 h_{aa}^2)^3} - \frac{1}{2} \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 Y \frac{-W_{11}'^2 + q^2 h_{11}^2}{(W_{11}'^2 + q^2 h_{11}^2)^2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

gemäß Gleichung (3.31) und (3.65).

Wir bestimmen nun das Ergebnis der Entwicklung im Falle von  $c=2$ . Dabei sind nur die Elemente  $V_{12}$  und  $V_{21}$  nicht verschwindend.

$$\begin{aligned} K(q-Q) : & 2(h_{22,b} W_{11}' \delta_{a1} + h_{11,b} W_{22}' \delta_{a2}) V_{12} V_{12,b} - 2V_{12,b} W_{22}' W_{11,b}' Y \delta_{a2} \delta_{b2} \\ & - 2V_{21} W_{22}' W_{11}' Y \delta_{b2} \delta_{a2} \\ K(q)K(q-Q) : & (h_{11} h_{22,b} \delta_{a1} + h_{22} h_{11,b} \delta_{a2}) V_{12} V_{12,b} - h_{22} V_{21} W_{11,b}' Y \delta_{b2} \delta_{a2} \\ & - h_{22,b} V_{12,b} W_{11}' Y \delta_{a1} \delta_{b1} - h_{22} V_{12,b} W_{11,b}' Y \delta_{a2} \delta_{b2} \\ K(q-Q)K(q) : & -h_{22,b} V_{12} W_{11}' Y \delta_{b1} \delta_{a1} \\ K(q)^2 K(q-Q) : & -\frac{1}{2} h_{11} h_{22,b} V_{12} Y \delta_{a1} \delta_{b1} \\ K(q)K(q-Q)K(q) : & -\frac{1}{2} h_{11} h_{22,b} V_{12} Y \delta_{a1} \delta_{b1} + \frac{1}{2} h_{22,b} W_{11}' Y^2 \delta_{a1} \delta_{b1} \\ K(q)^2 K(q-Q)K(q) : & \frac{1}{4} h_{11} h_{22,b} Y^2 \delta_{a1} \delta_{b1} \\ K(q-Q)^3 : & \frac{1}{2} h_{11,b} W_{22}' Y^2 \delta_{a2} \delta_{b2} \\ K(q)K(q-Q)^3 : & \frac{1}{4} h_{22} h_{11,b} Y^2 \delta_{a2} \delta_{b2} \end{aligned}$$

Aus diesem folgt der Anteil obigem Entwicklungsterms zum Fluss zu

$$Z_{2,t} = \int dq \frac{-1}{(2\pi)^3} \rho \dot{r}_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{-h_{22} W_{11}'^2 V_{12}^2 + q^2 h_{22} [h_{11}^2 V_{12}^2 - 4h_{11} V_{12} Y W_{11}' + W_{11}'^2 Y^2] - q^4 h_{11}^2 h_{22} Y^2}{(W_{11}'^2 + q^2 h_{11}^2)^2 (W_{22}'^2 + q^2 h_{22}^2)} \right] \quad (3.88)$$

$$+ \frac{-h_{11} W_{22}'^2 V_{12}^2 - 2V_{12} W_{11}' W_{22}'^2 Y + q^2 [h_{11} h_{22}^2 V_{12}^2 - 2h_{22}^2 V_{21} W_{11}' Y + h_{11} W_{22}'^2 Y^2] - q^4 h_{11} h_{22}^2 Y^2}{(W_{11}'^2 + q^2 h_{11}^2) (W_{22}'^2 + q^2 h_{22}^2)^2}, \quad (3.89)$$

nachdem wir wieder den Faktor zwei aus der Vertauschung von  $Q$  gegen  $-Q$ , sowie  $\phi^2 = 2\rho$

berücksichtigen. Daraus schlussfolgernd ist die Flussgleichung zu

$$\partial_t 2U = \sum_{a=1}^N \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{-W'_{aa} \dot{r}_2(q)}{W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa}} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \partial_t Z &= \int dq \frac{-1}{(2\pi)^3} \rho \dot{r}_2 \frac{1}{2} \left[ \frac{-h_{22} W'^2_{11} V^2_{12} + q^2 h_{22} [h^2_{11} V^2_{12} - 4h_{11} V_{12} Y W'_{11} + W'^2_{11} Y^2] - q^4 h^2_{11} h_{22} Y^2}{(W'^2_{11} + q^2 h^2_{11})^2 (W'^2_{22} + q^2 h^2_{22})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-h_{11} W'^2_{22} V^2_{12} - 2V_{12} W'_{11} W'^2_{22} Y + q^2 [h_{11} h^2_{22} V^2_{12} - 2h^2_{22} V_{21} W'_{11} Y + h_{11} W'^2_{22} Y^2] - q^4 h_{11} h^2_{22} Y^2}{(W'^2_{11} + q^2 h^2_{11})(W'^2_{22} + q^2 h^2_{22})^2} \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$- \frac{1}{2} \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 Y \frac{-W'^2_{22} + q^2 h^2_{22}}{(W'^2_{22} + q^2 h^2_{22})^2} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{Z} &= \sum_{a=1}^N \int dq \frac{-1}{(2\pi)^3} \rho \dot{r}_2 \frac{1}{2} [-h_{aa} V^2_{aa} W'^2_{aa} + 2V_{1a} W'^3_{1a} Y + 2V_{aa} W'^3_{aa} Y \\ &\quad + (h^3_{aa} V^2_{aa} - 6h^2_{1a} V_{1a} W'_{1a} Y + 18h_{1a} W'^2_{1a} Y^2 - 6h^2_{aa} V_{aa} W'_{aa} Y) q^2 - 6h^3_{1a} Y^2 q^4] \frac{1}{(W'^2_{aa} + q^2 h^2_{aa})^3} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int dq \frac{1}{(2\pi)^3} \dot{r}_2 Y \frac{-W'^2_{11} + q^2 h^2_{11}}{(W'^2_{11} + q^2 h^2_{11})^2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$W'_{aa} = U' + 2\rho U'' \delta_{a1} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= 4U''' \rho \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + 2U'' (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \\ &= \begin{cases} 2U'' (\delta_{a1} \delta_{b2} + \delta_{a2} \delta_{b1}), & \text{Goldstone Mode} \\ (4U''' \rho + 4U'') \delta_{a1} \delta_{b1} + 2U'' \delta_{ab}, & \text{Radiale Mode} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$h_{aa} = r_2(q) + Z + Y \rho \delta_{a1} \quad (3.96) \blacksquare$$

gegeben. Führen wir dimensionslose Größen

$$\varrho := \frac{8\pi^2 Z}{Nk} \rho \quad (3.97)$$

$$u := \frac{1}{kZ} U' \quad (3.98)$$

$$\eta := -\frac{\dot{Z}}{Z} \quad (3.99)$$

$$\tilde{\eta} := -\frac{\dot{\tilde{Z}}}{\tilde{Z}} \quad (3.100)$$

$$y := \frac{kN}{8\pi^2 Z^2} Y \Rightarrow \rho Y = \varrho y Z \quad (3.101)$$

$$\Rightarrow \tilde{Z} = Z(1 + \varrho y) \quad (3.102)$$

ein, so ergibt sich

$$\partial_t u = -u(1-\eta) + \varrho u'(1+\eta) + \sum_{a=1}^N \int_0^\infty dpp^2 2\dot{r}(p) \frac{(w_{aa}^2 - p^2 g_{aa}^2)w'_{aa} + 2p^2 g_{aa} w_{aa} y \delta_{a1}}{N(w_{aa}^2 + p^2 g_{aa}^2)^2} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \eta = & 2 \int_0^\infty dpp^2 \varrho \dot{r} \left[ \frac{-g_{22} w_{11}^2 v_{12}^2 + p^2 g_{22} [g_{11}^2 v_{12}^2 - 4g_{11} v_{12} w_{11} y + w_{11}^2 y^2] - p^4 g_{11}^2 g_{22} y^2}{N(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2)^2 (w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)} \right. \\ & \left. + \frac{-g_{11} w_{22}^2 v_{12}^2 - 2v_{12} w_{11} w_{22} y + p^2 [g_{11} g_{22}^2 v_{12}^2 - 2g_{22}^2 v_{21} w_{11} y + g_{11} w_{22}^2 y^2] - p^4 g_{11} g_{22}^2 y^2}{N(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2) (w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)^2} \right] \\ & + \frac{2}{N} \int_0^\infty dpp^2 \dot{r} y \frac{-w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2}{(w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)^2} \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} = & 2 \sum_{a=1}^N \int_0^\infty dpp^2 \rho \dot{r} \frac{1}{N(1+\varrho y)(w_{aa}^2 + p^2 g_{aa}^2)^3} [-g_{aa} v_{aa}^2 w_{aa}^2 + 2v_{1a} w_{1a}^3 y + 2v_{aa} w_{aa}^3 y \\ & + [g_{aa}^3 v_{aa}^2 - 6g_{1a}^2 v_{1a} w_{1a} y + 18g_{1a} w_{1a}^2 y^2 - 6g_{aa}^2 v_{aa} w_{aa} y] p^2 - 6g_{1a}^3 y^2 p^4] \\ & + \frac{2}{N} \int_0^\infty dpp^2 \dot{r} y \frac{-w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2}{(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2)^2 (1+\varrho y)} \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$w_{aa} = u + 2\varrho u' \delta_{a1} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} v_{ab} = & 4u'' \varrho \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + 2u' (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \\ = & \begin{cases} 2u' (\delta_{a1} \delta_{b2} + \delta_{a2} \delta_{b1}), & \text{Goldstone Mode} \\ (4u'' \varrho + 4u') \delta_{a1} \delta_{b1} + 2u' \delta_{ab}, & \text{Radiale Mode} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$g_{aa} = 1 + r + y \varrho \delta_{a1} \quad (3.108)$$

$$(3.109)$$

als dimensionslose Flussgleichung, wobei wir schon den dreidimensionalen Impuls  $q$  auf eine eindimensionale, in Einheiten dimensionslose, Größe  $p$  zurückgeführt haben.  $r$  und  $\dot{r}$  sind zwei getrennte Funktionen, die nicht durch einfache Ableitung auseinander hervorgehen. Es sei an dieser Stelle schon auf die Symmetrie  $u \rightarrow -u$  hingewiesen, die sich an den obigen Gleichungen leicht nachvollziehen lässt. In späteren Betrachtungen wird deshalb häufig nur eine Hälfte der Lösungen betrachtet werden. Unter Einführung des Regulators

$$r_2 = Z \left( \frac{k}{|q|} - 1 \right) \theta(k^2 - q^2) \Rightarrow r = \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \theta(1-p) \quad \dot{r} = \left( (1-\eta) \frac{1}{p} + \eta \right) \theta(1-p) \quad (3.110)$$

erhalten wir den Fluss von  $u$  zu:

$$\begin{aligned}
\dot{u} = & -u(1-\eta) + \varrho u'(1+\eta) - \frac{N-1}{N} \left(1 - \frac{1}{3}\eta\right) \left[ u' \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \right] \\
& + \frac{3u' + 2\varrho u''}{N\varrho^2 y^2} \left[ \frac{4\eta(u+2\varrho u')}{\varrho y} \operatorname{atan} \left( \frac{1+\varrho y}{u+2\varrho u'}, \frac{1}{u+2\varrho u'} \right) \right. \\
& + \frac{2\eta - (1-\eta)\varrho y}{\varrho y} \log \left( 1 + \frac{\varrho y(2+\varrho y)}{1+(u+2\varrho u')^2} \right) + 2 \left( -2\eta + \frac{\varrho y(1+\varrho y)}{(1+\varrho y)^2 + (u+2\varrho u')^2} \right) \left. \right] \\
& - \frac{6\eta(-1+(u+2\varrho u')^2) + 4(1-\eta)\varrho y}{N\varrho^4 y^3} \operatorname{atan} \left( \frac{1+\varrho y}{u+2\varrho u'}, \frac{1}{u+2\varrho u'} \right) + \frac{2(u+2\varrho u')3\eta}{N\varrho^3 y^2} \\
& - \frac{2(u+2\varrho u')(3\eta - (1-\eta)\varrho y)}{N\varrho^4 y^3} \log \left( 1 + \frac{\varrho y(2+\varrho y)}{1+(u+2\varrho u')^2} \right) - \frac{2(u+2\varrho u')}{N\varrho(1+\varrho y)^2(u+2\varrho u')^2}.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Dabei haben wir die Differenz zweier Arcus Tangens Funktionen zusammenfassend als

$$\operatorname{atan}(x, y) = \arctan(x) - \arctan(y) \tag{3.112}$$

geschrieben. Die Anwendung von Additionstheoremen bedingt Kenntnisse über  $y$ . In der Herleitung wurde  $Z$  als konstant in den Feldern angenommen haben, aber die Gleichungen geben dies noch nicht wieder. Somit muss  $Z$  fixiert. Wir sind im Folgenden primär an der Fixpunktstruktur der gebrochenen Phase und somit der Stelle  $u(\varrho_0 \neq 0) = 0$  interessiert und setzen die Ableitungen  $u^{(i)}(\varrho_0) = a_i i!$ , korrespondierend mit einem späteren Potenzreihenansatz. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\eta = & \frac{1}{N\varrho_0(y_1-1)^2} \left[ ((y_1-1) - \eta(1+y_1)) \log \frac{y_1^2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} - 2\alpha\eta \operatorname{atan} \left( \frac{y_1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \right. \\
& \left. + 2(y_1-1) \left( \eta + \frac{\eta-1}{1+\alpha^2} + \frac{y_1}{y_1^2 + \alpha^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.113}$$

als Ergebnis für  $\eta$ . Analog folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta} = & \frac{1}{N\varrho_0 y_1} \left[ \frac{-5(y_1-1) + \eta(16+5(y_1-1))}{(y_1-1)^2} \log \left( \frac{y_1^2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) \right. \\
& + \frac{\eta(\frac{5}{2}\alpha - \beta)^2}{a_1(y_1-1)^2} \left( \operatorname{atan} \left( \frac{y_1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \right) + (N-1)(2-\eta)\alpha^2 \\
& + \left( -\frac{33}{2}\eta\alpha^8 + 10\eta\alpha^7\beta + \frac{1}{2}\alpha^6(18y_1^2 - 48y_1 + 30 - \eta(99 + 3y_1 + 69y_1^2 + 4\beta^2)) \right. \\
& + 2\alpha^5\beta(-2(y_1^2 + 4y_1 - 5) + 3\eta(1 + y_1 + 3y_1^2)) \\
& + \frac{1}{2}\alpha^4(-4\beta^2(2(y_1^2 - 1) + \eta(3 - y_1 + y_1^2)) + 12(y_1^4 - 4y_1^3 + 11y_1^2 - 8y_1) \\
& - 3\eta(12y_1^4 + y_1^3 + 71y_1^2 + 5y_1 + 16)) \\
& + 2\alpha^3\beta(8(1 - y_1(4 - 4y_1 + y_1^3)) + \eta(4y_1^4 + 3y_1^3 + y_1^2 + 3y_1 + 4)) \\
& + \frac{1}{2}\alpha^2(6(2 + 10y_1 - 5y_1^2 + 11y_1^3)(y_1 - 1) + \eta y_1(4\beta^2(y_1^2 - 5y_1 + 1) \\
& - 3(38y_1^3 + 5y_1^2 + 36y_1 + 4))) \\
& \left. + 2\alpha\beta y_1(2(y_1^2 + y_1 + 4)(y_1 - 1) - \eta y_1(2y_1^2 - 3y_1 - 4)) \right) \frac{1}{(y_1-1)(1+\alpha^2)^2(\alpha^2 + y_1^2)^2} \\
& + \frac{2}{(y_1-1)y_1^2} (\beta^2(2(1-y_1^2) - \eta y_1(2y_1-1)) + 8y_1^2 - 5y_1 + 4 - \eta y_1(13y_1+3)) \left. \right].
\end{aligned} \tag{3.114}$$

mit  $\alpha = 2\varrho_0 a_1$   $\beta = 4a_2\varrho_0^2$   $y_1 = 1 + \varrho_0 y$  (3.115)

Da wir uns am Fixpunkt befinden folgt, dass in den obigen Gleichungen  $y = \text{const}$  gelten muss und somit auch  $\eta = \tilde{\eta}$ , denn:

$$\tilde{\eta} = -\frac{\dot{\tilde{Z}}}{\tilde{Z}} = -\frac{\dot{Z}(1 + \varrho_0 y)}{Z(1 + \varrho_0 y)} = \eta \quad (3.116)$$

Wir haben mit der Differenz  $\eta - \tilde{\eta} = 0$  eine Bestimmungsgleichung für  $y$  in Abhängigkeit des Potentials am Fixpunkt und  $\eta$  direkt gegeben. Diese Erkenntnisse können wir in den Fluss von  $u$  einsetzen und in verschiedenen Trunkierungen die Eigenschaften des Potentials am Fixpunkt bestimmen. Im folgenden Kapitel wollen wir uns damit näher beschäftigen.

## 4 Untersuchung der Fixpunktlösung

In diesem Abschnitt werden wir uns im Wesentlichen mit Fixpunktlösungen in der gebrochenen Phase beschäftigen. Beim Betrachten verschiedener Näherungen wird gesehen, wie gut verschiedene Approximationen in einem Supersymmetrischen  $O(N)$  Modell sind. Nach kurzer Wiederholung des Falles "large  $N$ " wird der Fall eines endlichen  $N$ 's untersucht.

### 4.1 Der Fall "large $N$ "

Dieser Fall betrachtet die Lösungen, die sich ergeben, wenn wir die Flussgleichungen von  $\eta$  und  $\tilde{\eta}$  vernachlässigen, sowie in dem Fluss von  $u$  den Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  ausführen. Wir zitieren primär die Ergebnisse von [1]. Bevor wir den optimierten Regulator einsetzen, untersuchen wir die Fixpunktstruktur der gebrochenen Phase in einem regulatorunabhängigen Fall. Im Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  ergibt sich der Fluss unseres Potenzial zu:

$$\partial_t u = -u + \varrho u' + \int_0^1 dp 2p^2 \dot{r}_2 \frac{u^2 - p^2 g^2}{(u^2 + p^2 g^2)^2} u' = -u + \varrho u' + h(u^2) u'. \quad (4.1)$$

Wir machen den polynomiellen Ansatz

$$u(\rho, t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) (\varrho - \varrho_0(t))^i, \quad (4.2)$$

der uns die Fixpunktstruktur der gebrochenen Phase liefert. Dieser Ansatz wird in anschließenden Betrachtungen erneut Verwendung finden. Dabei ist  $I \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .  $I = \infty$  ist eine exakte Reihenentwicklung. Sonst findet eine Trunkierung statt. Wir erhalten für den Fluss von  $\varrho_0$

$$\partial_t \varrho_0 = \varrho_0 - h(0) \quad (4.3)$$

und für den Fluss der anderen Kopplungen

$$\begin{aligned} \partial_t a_i &= -a_i + i a_i + (i+1) \varrho_0 a_{i+1} - (i+1) a_{i+1} I(0) + f(a_1, \dots, a_{i-1}) - \partial_t \varrho_0 a_{i+1} (i+1) \\ &= (i-1) a_i + f(a_1, \dots, a_{i-1}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass die Funktion  $h$  quadratisch von  $u$  abhängt und deshalb keinen linearen Term  $(\varrho - \varrho_0)$  besitzt. Die kritischen Exponenten sind fixiert und leicht ablesbar, da die Stabilitätsmatrix eine Unterdiagonalstruktur aufweist. Des Weiteren ist die relevante Richtung zu  $(-1, 0, \dots)$  festgelegt, das heißt in  $\varrho$  Richtung und die Nullstelle des Potenzials durch den Wert des Integrals  $I(0)$  angegeben. Wir haben damit ein regulatorunabhängiges Verhalten am Fixpunkt. Dies gilt für das Potenzial und somit auch für die Physik, wie wir es allgemein fordern.

Wird der Regulator so gewählt, wie im letzten Kapitel angegeben, erhalten wir einfache Terme, da sich der Fluss zu

$$\partial_t u = -u + \varrho u - \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} u' \quad (4.5)$$

ergibt. Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, von der wir sogar implizit die exakte Lösung kennen. Interessieren wir uns für Fixpunktlösungen  $u_*$ , ist eine einfache Differentialgleichung erster Ordnung mit der impliziten Lösung

$$\varrho(u_*) = 1 + \frac{u_*^2}{1 + u_*^2} + 2u_* \arctan u_* + cu_* \quad (4.6)$$

gegeben. Wir erkennen, dass alle Fixpunktlösungen den Punkt  $(\varrho, u_*) = (1, 0)$  passieren und es keine weiteren nichttrivialen Lösungen für  $u_*(\varrho \neq 1) = 0$  gibt. Bei der Wahl obigen Ansatzes (4.2) ergibt sich die Fixpunktstruktur

$$\begin{aligned} \varrho_{0*} &= 1 \\ c &= 1/a_{1*} \\ a_{2*} &= -3a_{1*}^3 \\ a_{3*} &= 18a_{1*}^5 \quad \dots, \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit den Eigenwerten der Stabilitätsmatrix

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 1 \\ \theta_1 &= 0 \\ \theta_{i+1} &= -i \quad i \geq 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Diese kennen wir schon. Wir haben eine relevante Kopplung  $\varrho_0$  und eine marginale Richtung mit einem Eigenvektor, der aus nicht verschwindenden Einträgen in der  $a_1$  Komponente und beliebig vielen weiteren  $a_i$  Komponenten besteht. Die  $i$ 'te nichtrelevante Richtung setzt sich aus Kombinationen der  $a_{i+1}$ ,  $a_{i+2}$  und so weiter zusammen.

Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, welchen Einfluss Korrekturen haben, die durch Betrachtung der radialen Mode hinzukommen. Wir erwarten zum einen die Fixierung des Anstiegs im Fixpunkt  $a_{1*}$  auf einen festen Wert und zum anderen eine Korrektur für den kritischen Exponenten der marginalen Richtungen, so dass sich die Kopplung  $a_1$  als relevant oder irrelevant ergeben wird. Dies wollen wir näher untersuchen.

## 4.2 Endliches $N$ ohne Wellenfunktionsrenormierung - die LPA Näherung

Wir haben im Fall der Local Potential Approximation (LPA) die Flussgleichungen gegeben zu:

$$\partial_t u = -u + \rho u' - \frac{N-1}{N} \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} u' - \frac{1}{N} \frac{1-(u+2\rho u')^2}{(1+(u+2\rho u')^2)^2} (3u' + 2\rho u''). \tag{4.9}$$

Vernachlässigt wurden die Gleichungen für  $\eta$  und  $\tilde{\eta}$  sowie  $\eta = 0$  gesetzt. Dies korrespondiert mit einer konstanten Wellenfunktionsrenormierung. In diesem Sinne ist es keine systematische Erweiterung um Terme in  $1/N$ , da die Wellenfunktionsrenormierung  $\eta$  genauso wie die radiale Mode mit  $1/N$  unterdrückt werden.

Die Flussgleichung des Potentials weist eine deutlich kompliziertere Struktur als im vorherigen Grenzfall (4.5) auf. Es handelt sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Aus diesem Grund ist dem Autor keine exakte Lösung bekannt. Die Fixpunktgleichung als Differentialgleichung zweiter Ordnung wird sich als schwierig behandelbar herausstellen. Der Grund dafür wird vor allem in dem multiplikativen Term vor  $u''$  liegen. Darauf wird später eingegangen. Deshalb wird keine analytische Lösung angegeben. Stattdessen wird ein polynomieller Ansatz zur Problembehandlung verwendet.

### 4.2.1 Entwicklung an der Stelle $\varrho \neq 0$

Das Potenzial  $u$  wird im Punkt  $(\varrho_0, 0)$  entwickelt

$$u(\varrho, t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) (\varrho - \varrho_0(t))^i, \tag{4.10}$$

und im Zuge der Betrachtung der Ergebnisse mit denen der "large  $N$ " Lösung (4.7) und (4.8) verglichen. Obiger Ansatz liefert mittels eines Koeffizientenvergleichs in den Ordnungen von  $\varrho - \varrho_0(t)$  die Flussgleichungen der einzelnen Kopplungen

$$\begin{aligned} (\varrho - \varrho_0(t))^0 : \partial_t \varrho_0(t) &= f_0(\varrho_0(t), a_1(t), a_2(t)) \\ (\varrho - \varrho_0(t))^i : \partial_t a_i(t) &= f_i(\varrho_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_{i+2}(t)), \quad 1 \leq i \leq I. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei sind  $a_{I+1}$  und  $a_{I+2}$  zu fixieren. Wir finden eine spezielle Fixpunktlösung

$$\begin{aligned} \varrho_{0*} &= \frac{N-1}{N} \\ a_{1*} &= -\frac{1}{2\varrho_{0*}} \\ a_{2*} &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2\varrho_{0*}} \right)^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.12)$$

die zunächst betrachtet wird. Diese spezielle Lösung ist unter anderem kürzlich in [11] diskutiert worden. Nach der Wahl von  $a_{1*}$  und  $\varrho_{0*}$  sind die restlichen Kopplungen im Wesentlichen fixiert. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Fixpunktgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist. Bei der Wahl des obigen Ansatzes 4.12 verschwindet der Term vor  $u''$ , sodass wir uns an einem singulären Punkt befinden. Wir setzen unseren polynomiellen Ansatz an der obigen Stelle ein

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i(t) (\varrho - \varrho_0(t))^i - a_i(t) (\varrho - \varrho_0(t)) \dot{\varrho}_0(t) \quad (4.13)$$

$$-u(\varrho, t) + \varrho u'(\varrho, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) [(i-1)(\varrho - \varrho_0(t))^i + i\varrho_0(\varrho - \varrho_0)^{i-1}] \quad (4.14)$$

$$\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} u' = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) [i(\varrho - \varrho_0(t))^{i-1} + \mathcal{O}(\varrho - \varrho_0(t))^{i+1}] \quad (4.15)$$

$$u(\varrho, t) + 2\varrho u'(\varrho, t) = \sum_{i=1}^{\infty} [2(i+1)a_{i+1}(t)\varrho_0(t) + (2i+1)a_i] (\varrho - \varrho_0(t))^i \quad (4.16)$$

$$1 - (u(\varrho, t) + 2\varrho u'(\varrho, t))^2|_{a_i(t)=a_{i*}} = -2(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})(\varrho - \varrho_{0*})^2 + \mathcal{O}(\varrho - \varrho_{0*})^3 \quad (4.17)$$

$$1 + (u(\varrho, t) + 2\varrho u'(\varrho, t))^2|_{a_i(t)=a_{i*}} = 2 + 2(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})(\varrho - \varrho_{0*})^2 + \mathcal{O}(\varrho - \varrho_{0*})^3 \quad (4.18)$$

$$3u'(\varrho, t) + 2\varrho u''(\varrho, t) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t) [2(i-1)i(\varrho - \varrho_0(t))^{i-2}\varrho_0 + \mathcal{O}(\varrho - \varrho_0(t))^{i-1}] \quad (4.19)$$

$$3u'(\varrho, t) + 2\varrho u''(\varrho, t)|_{a_i(t)=a_{i*}} = (10a_{2*} + 12a_{3*})(\varrho - \varrho_{0*}) - \mathcal{O}(\varrho - \varrho_{0*})^2. \quad (4.20)$$

Das Ergebnis des Einsetzens ist jeweils, dass sich die lineare Ordnung im Term  $u(\varrho, t) + 2u'(\varrho, t)\varrho$  und der Absolutterm in  $3u'(\varrho, t) + 2\varrho u''(\varrho, t)$  zu null ergeben, sodass die folgende Betrachtung erheblich vereinfacht wird. In unserer Notation bedeutet ein Punkt weiterhin eine Ableitung nach der  $t$  Koordinate und ein Strich eine Ableitung nach dem halbierten Feldamplitudenquadrat  $\varrho$ .

Wir führen den Potenzvergleich in den niedrigsten Ordnung durch und erkennen, dass sich ab  $i = 2$  für die Terme mit  $a_i(t)(\varrho - \varrho_0(t))^{i-1}$ , das heißt die führenden Terme in den Koeffizienten  $a_i$ , im betrachteten Fixpunkt aufheben:

$$a_i(\varrho - \varrho_{0*})^{(i-1)} : -\dot{\varrho}_0(t)|_{\varrho_0(t)=\varrho_{0*}} = -\frac{N-1}{N}i + i\varrho_{0*} = 0 \quad \left( \varrho_{0*} = \frac{N-1}{N} \right) \quad (4.21)$$



Genutzt wurde, dass die Struktur des letzten Terms nur einen Beitrag der Ordnung  $(\varrho - \varrho_0(t))^i$  liefert. Dies liegt in der niedrigsten vorkommenden Ordnung der multiplikativen Terme begründet, die jeweils der Ableitungsordnung entspricht. So wird  $u(\varrho, t) + 2u'(\varrho, t)\varrho$  mit einem linearem Term und  $3u'(\varrho, t) + 2\varrho u''(\varrho, t)$  mit einem quadratischen multipliziert. Es folgt, dass die niedrigste Ordnung, in der der  $1/N$  Term beiträgt,  $(\varrho - \varrho_0)^3$  ist, womit sich erklärt, warum eine Wahlfreiheit in der Kopplung  $a_{3*}$  besteht.

Damit erhalten wir die Bestimmungsgleichung der  $a_{i*}$  für  $i \geq 3$  aus dem Potenzvergleich in  $(\varrho - \varrho_{0*})^i$ . Somit gilt explizit, dass ab  $a_3$  die niederen Kopplungen unabhängig von den höheren Kopplungen sind. Dementsprechend ergibt sich, dass die ersten  $a_{i*}$  von  $(a_{i*}(I))_{I \geq 3}$  jeweils eine stationäre Folge in  $I$  bilden und folgerichtig den Werten der allgemeinen Reihenentwicklung entsprechen. Man hat eine sehr gute Konvergenz der Trunkierungsglieder zu den exakten Werten. Des Weiteren hat die Stabilitätsmatrix somit im gewählten Fixpunkt eine Diagonalform. Die Ordnung  $(\varrho - \varrho_{0*})^i$  hat folgende von  $a_i$  abhängige Werte:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i \Big|_{\varrho_0(t)=\varrho_{0*}, a_j(t)=a_{j*}, j=1, \dots, i-1} &= (i-1)a_i - \frac{(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})}{N} \varrho_{0*} a_i (i-1)i \\ &\quad - 2 \frac{(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})}{N} \varrho_{0*} a_i(t)i + f(\varrho_{0*}, a_{1*}, \dots, a_{(i-1)*}) \\ &= (i-1)a_i - \frac{(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})}{N} \varrho_{0*} a_i (i+1)i + f(\varrho_{0*}, a_{1*}, \dots, a_{(i-1)*}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Funktion  $f$  ist durch die Gleichungen fixiert, spielt aber keine Rolle für die Betrachtungen.

Um die Diagonaleinträge der Stabilitätsmatrix  $S$  zu erhalten differenzieren wir unser Ergebnis nach  $a_i$  und haben aufgrund der Unterdiagonalform, wie wir für die erste Zeile noch nachweisen werden, die Eigenwerte der Stabilitätsmatrix gewonnen, da diese mit den Diagonaleinträgen übereinstimmen.

$$(S)_{i+1, i+1} = \lambda_i = (i-1) - (i+1)i \frac{(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})}{N} \varrho_{0*} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (4.23)$$

Die Betrachtung ist offensichtlich für alle  $a_i \geq 4$  richtig. Man kann die niedrigeren Ordnungen leicht per Hand nachrechnen und erhält das gleiche Ergebnis, sodass obige Beziehung allgemein gilt. Die erste Zeile der Stabilitätsmatrix folgt, indem wir die Ordnung  $(\varrho - \varrho_0(t))^0$  betrachten.

$$\dot{\varrho}_0 = \frac{N-1}{N} - \varrho_0 - \frac{(3a_1 + 4a_2\varrho_0)(-1 + 4a_1^2\varrho_0^2)}{a_1 N (1 + 4a_1^2\varrho_0^2)^2} \quad (4.24)$$

Im betrachteten Fixpunkt ist der hintere Term eine mindestens zweifache Nullstelle als Parameterfunktion von  $\varrho_0$  bzw  $a_1$  und unabhängig von  $a_2$ , da beide Faktoren im Zähler null sind.

$$\frac{\partial \dot{\varrho}_0}{\partial \varrho_0} = -1 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \dot{\varrho}_0}{\partial a_1} = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\varrho}_0}{\partial a_i} = 0 \quad (4.27)$$

Somit hat die Stabilitätsmatrix tatsächlich Unterdiagonalform und wir erhalten folgende Eigenwerte an diesem Fixpunkt:

$$\lambda_i = (i-1) - (i+1)i \frac{(5a_{2*} + 6a_{3*}\varrho_{0*})}{N} \varrho_{0*} \quad i = 0, \dots, \infty. \quad (4.28)$$

Dabei ist  $\lambda_i$  der  $i + 1$ te Diagonaleintrag, für  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

In unserer bisherigen Betrachtung haben wir uns noch nicht für den Wert von  $a_{3*}$  interessiert. Wir sehen, dass dieser maßgeblich die Vorzeichen der Eigenwerte beeinflusst. Wie oben beschrieben, haben wir in diesem Parameter noch eine Wahlfreiheit, denn es ergibt sich:

$$a_{3*1,2} = -\frac{45 - 4N\varrho_{0*} \pm 4\sqrt{(N+17)(N-1)}}{144\varrho_{0*}^3}. \quad (4.29)$$

Damit finden wir folgende Vorzeichen der Eigenwerte.

$$5a_{2*} + 6a_{3*1,2}\varrho_{0*} = \frac{45 - 45 + 4(N-1) \mp 4\sqrt{(N+17)(N-1)}}{24\varrho_{0*}^2} \quad (4.30)$$

$$= \frac{N-1 \mp \sqrt{(N+17)(N-1)}}{6\varrho_{0*}^2} \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow \lambda_i(a_{3*1}) > 0 \text{ für } N > 1, i > 0 \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \lambda_i(a_{3*2}) = (i-1) - \frac{(i+1)i}{6} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{17}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)} + 1 - \frac{1}{N}}{\frac{N-1}{N}} < (i-1) - \frac{(i+1)i}{6} \leq 0, i \in \mathbb{N} \quad (4.33)$$

Wir sehen, dass die Wahl von  $a_{3*1}$  darin resultiert, dass nur ein negativer Eigenwert und somit nur eine relevante Richtung vorliegt, während für den Fall  $a_{3*2}$  alle Eigenwerte negativ sind und somit nur relevante Richtungen vorliegen.

Im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  erhalten wir aus der Lösung mit einer relevanten Richtung die gleichen kritischen Exponenten wie im Fall "large  $N$ " (4.8) aber wir haben keine Wahlfreiheit in der Kopplung  $a_{1*}$ , sondern sie ist in diesem Grenzfall zu  $\pm \frac{1}{2}$  fixiert. Wir betrachten noch die zu den kritischen Exponenten gehörigen Richtungen, da sich hier ein wesentlicher Unterschied zum Fall "large  $N$ " ergibt.

**$\theta_0$  : die relevante Richtung** Der Eigenvektor, der zu diesem Eigenwert der negativen Stabilitätsmatrix gehört, ist am Beispiel von  $N = 100$  gegeben zu:

$$(0.155, 0.002, -0.009, 0.028, -0.076, 0.190, -0.447, 0.537, -0.667, \dots)^t.$$

Wir erkennen, dass die Einträge, die Änderungen in höheren Kopplungen entsprechen, nicht nur nicht verschwindend sind, sondern sogar anwachsen. Dies steht im Gegensatz zu unseren Erkenntnissen aus der "large  $N$ " Lösung. Dieser Unterschied ist erheblich. Es bedeutet, dass bei einer mangelnden Feineinstellung der Parameter in dieser Richtung alle Kopplungen laufen. Diese Richtung ist aber die Einzige, die eine  $\varrho_0$  Komponente enthält, sodass nur eine Abweichung der Nullpunktstelle vom Fixpunktwert dieses Laufen aller Kopplungen verursachen wird. Das heißt, es ist weiter nur an dieser Komponente eine exakte Wahl nötig. Betrachtet man das Verhalten des Eigenvektors im Grenzfall, so werden die Anteile der Kopplungen  $a_i$  unterdrückt, so dass sich das Verhalten wie im "large  $N$ " Fall ergibt. Die Werte für die Kopplungen werden mit dem Index der Kopplung größer. Bei einer exakten Lösung, über die wir nicht verfügen, wäre zu prüfen, ob die Grenzwertbildung vom Polynom der Trunkierungsordnung zur Reihe und der Übergang von einer endlichen Anzahl an Feldrichtungen zu unendlich Vielen vertauscht.

**$\theta_i$  : die irrelevanten Richtungen** Wir sehen, dass von den Eigenvektoren die ersten  $i$  Einträge null und im Allgemeinen die Restlichen ungleich null sind. Dies wird durch die Unterdiagonalstruktur der Matrix bedingt, wie man sich leicht überlegt. In diesen Richtungen ist auch die Richtung vertreten, die zum im Grenzfall vieler Feldrichtungen verschwinden Exponenten  $\theta_1$  gehört.

**Existenzintervall der Lösung** Wir wissen bisher, dass obige Lösung in einer Umgebung der Nullstelle existiert. Im Folgenden werden wir untersuchen, welches globale Verhalten die Lösung hat, insbesondere ob die Lösung für alle  $\varrho$  existiert. Beim Betrachten der analytischen Lösung des Falles "large  $N$ " sehen wir, dass die Lösung ein Minimum in  $\varrho$  in Abhängigkeit von der Konstanten  $c$  besitzt. Im Falle des Anstiegs  $u'_*(\varrho_{0*}) = \frac{-1}{2}$  gilt  $c = -2$ . Damit liegt das Minimum von  $\varrho$  bei  $\varrho_{min} \approx 0.642$  und wir haben im physikalischen Regime  $\varrho > 0$  keine durchgehend existente Lösung. Vergleiche dazu auch [1]. Wenn der Übergang unserer Lösung in den Fall "large  $N$ " stetig ist, erwarten wir, dass der Definitionsbereich des Potentials ein Intervall der Art  $(\varrho_{div,N}, \infty)$  mit  $\varrho_{div,N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.642$  ist.

Betrachten wir die groben Schätzungen für die Konvergenzradien, wie sie in Tabelle 4.1 gegeben sind, und vergleichen mit dem Existenzintervall der Lösung, ist eine Annäherung der Werte ersichtlich. Dabei wissen wir aus der allgemeinen Theorie, dass der exakte Konvergenzradius eine untere Schranke für die Intervallgrenzen vorgibt. Wir vergleichen bei großen  $N$  den Wert des Konvergenzradius mit  $1 - 0.642 = 0.358$  der minimalen Ausdehnung der "large  $N$ " Lösung von der Nullstelle. Beide Werte nähern sich dabei gut an. Zugleich stellen wir fest, dass für alle  $N > 1$  die Lösung nicht überall im physikalischen Regime existiert.

Feldrichtungen $N$	$r_{k1}$	$r_{k2}$	$\varrho_{0*}$	$\varrho_{div}$	$\varrho_{0*} - \varrho_{div}$
2	0,383	0.349	0.5	0,150	0,35
3	0,446	0.399	0.6	0,257	0,410
5	0,473	0.425	0.8	0,364	0,436
10	0,469	0.424	0.9	0,467	0,433
20	0,449	0.407	0.95	0,535	0,415
30	0,437	0.396	0.96	0,564	0,403
50	0,422	0.383	0.98	0,590	0,390
100	0,407	0.370	0.99	0,613	0,377
200	0,398	0.363	0.995	0,627	0,368
500	0,391	0.360	0.998	0,636	0,362
1000	0.389	0.359	0.999	0,640	0,359
$10^9$	0.387	0.358	$\approx 1$	-	-
$10^{12}$	0.387	0.358	$\approx 1$	-	-

Tabelle 4.1: In den Spalten zwei und drei finden wir zwei Schätzungen für den Konvergenzradius. Der erste Wert ergibt sich aus  $r_k \approx a_{19*}/a_{20*}$ , während der zweite eine Extrapolation der Reihe  $\frac{a_{i-1*}}{a_i}$  für  $i \rightarrow \infty$  ist. Exemplarisch zur Extrapolation und der Konvergenz der  $\frac{a_{i-1*}}{a_{i*}}$  haben wir in Abbildung 4.1 für  $N = 10$  die Folge der Quotienten dargestellt. In diesem Plot ist die einfache, für unsere Extrapolation genutzte, Funktion  $\frac{cn}{a+n}$  eingefügt. In der vierten Spalte sind die jeweiligen Fixpunktwerte der Nullstelle des Potentials angegeben, während in der vorletzten Spalte die Stellen angegeben sind, an denen die erste Ableitung von  $u$  nach  $\varrho$  in der numerischen Entwicklung divergiert und im Sinne einer besseren Vergleichbarkeit in der letzten Spalte  $\varrho_{0*} - \varrho_{div}$ . Dies ist der Wert, der mit den Spalten zwei und drei zu vergleichen ist. Bei sehr großen  $N$  versagt die numerische Entwicklung, da die Ungenauigkeiten zu groß werden, weshalb auf eine Angabe von Werten verzichtet wird.

Da die Reihe der Koeffizienten  $a_{i*}$  reell und alternierend ist, ist damit zu rechnen, dass in Richtung kleinerer  $\varrho$  die Potenzreihe divergiert. Für eine nähere Untersuchung entwickeln wir die Lösung numerisch weiter und erkennen für verschiedene  $N$  in Abbildung 4.2, dass die Lösung für kleine positive  $\varrho$  nicht existiert. Der Konvergenzradius  $r_k$  gibt in guter Nä-

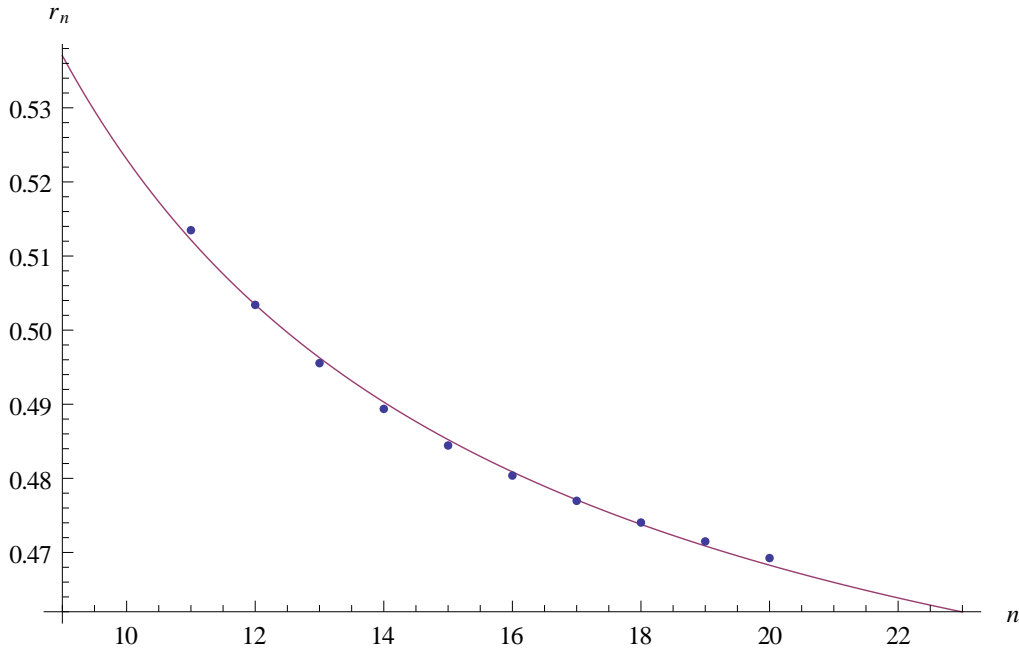


Abbildung 4.1: Die blauen Punkte sind die  $\frac{a_{n-1*}}{a_{n*}}$  aufgetragen über  $n$ , während die durchgehende Linie eine einfache Interpolationsfunktion  $\frac{cn}{a+n}$  ist, mit  $a = -1,98$  und  $c = -0.4$ . Damit findet man den Konvergenzradius extrapoliert zu  $r_k \approx |c| = 0.424$ . Die Güte der Extrapolation ist dabei von  $N$  abhängig.

herung an, wo  $u'$  unendlich wird:  $u'_*(\varrho_{0*} - r_k) \approx \infty$ , auf der Trajektorie der Fixpunktlösung. Anders gesprochen besitzt die Funktion  $\varrho(u)_*$  dort ein Minimum, welches größer null ist. Damit hat sich das Intervall auf dem die Lösung eindeutig existiert vergrößert, verglichen mit der früheren Approximation und dem jetzt fixierten Anstieg, aber es ist noch nicht auf den gesamten physikalischen Bereich ausgedehnt. Vergleiche dazu Abbildungen 4.2 und 4.3.

Der Effekt, dass die dimensionslosen Größen für kleine Feldamplituden nicht definiert sind, kann durch einen Übergang zum Infraroten annähernd vernachlässigt werden. Gehen wir zu dimensionsbehafteten Größen über und betrachten den Fall beliebig kleiner  $k$ , wird der Bereich verschwindend klein, sodass im Bereich kleiner Impulse dieses Problem verschwindet.

Evolvieren wir unsere Fixpunktlösung in Richtung positiver  $\varrho$  von  $\varrho_{0*}$  aus, so treffen wir auf keine weiteren solchen Extremstellen in der Funktion  $u_*$ .

Wir haben somit eine exakte Lösung. Es stellt sich die Frage nach weiteren Lösungen, wenn wir die Parameter nicht wie in (4.12) fixieren.

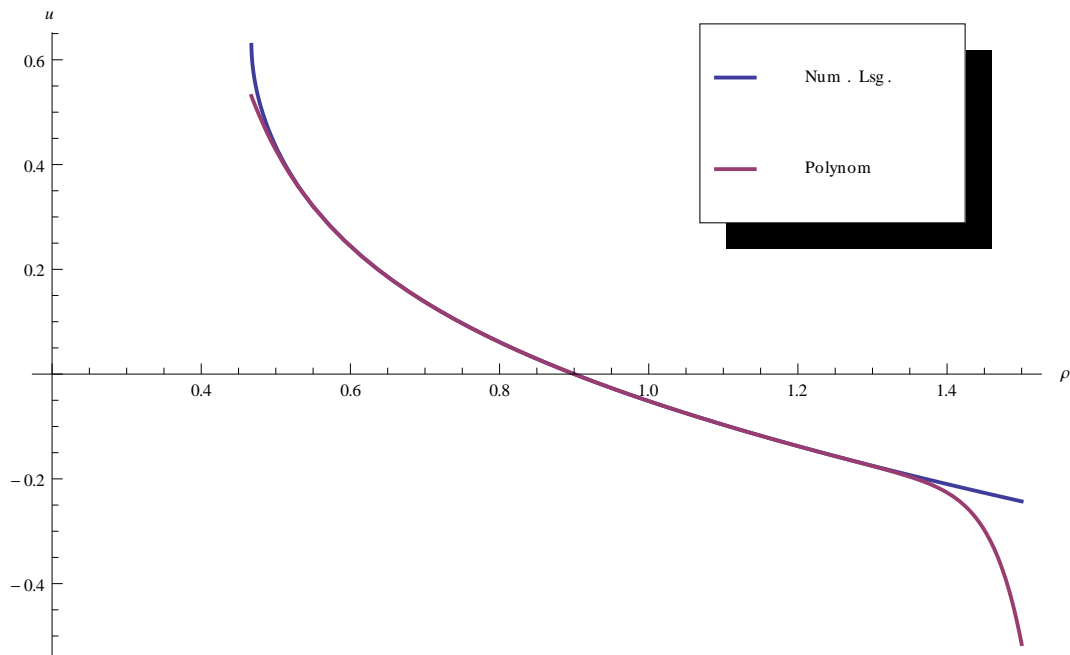


Abbildung 4.2: Die numerische Lösung für  $N = 10$  hat einen divergierenden Anstieg bei  $\rho_{div} \approx 0,467$ . Die rote Linie ist ein polynomieller Ansatz des Grades 15. In Richtung wachsender  $\rho$  ist die Lösung einfach fortsetzbar, da die Stelle  $u = 1$  passiert wird. Vergleiche hierzu die Erkenntnisse aus (4.92).

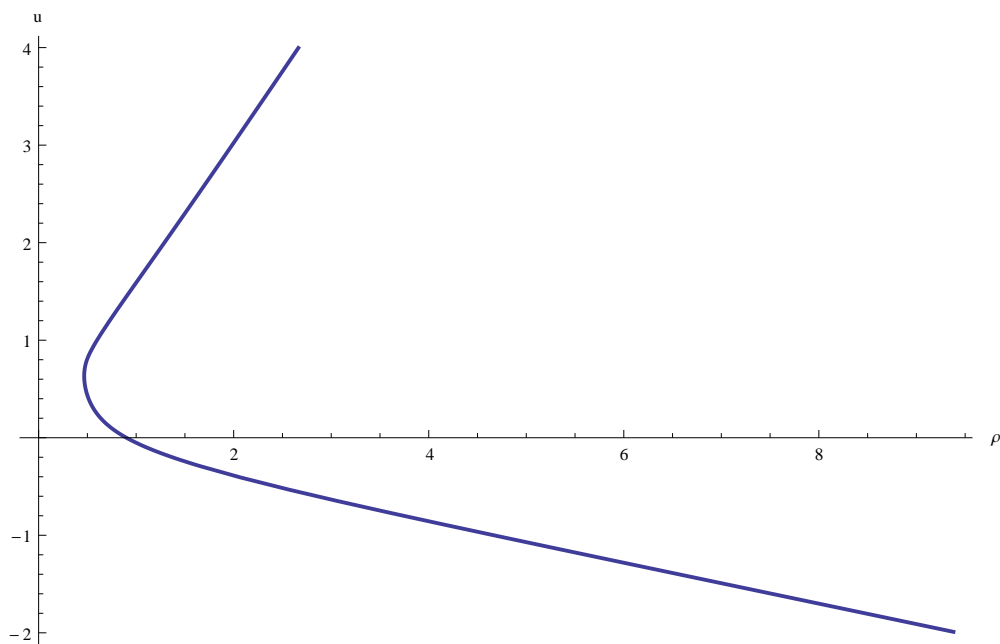


Abbildung 4.3: Wir sehen hier, wie sich die Funktion  $\rho(u_*)$  verhält. Insbesondere ist festzustellen, dass die Abbruchstelle unserer Entwicklung ein Minimum der dargestellten Funktion ist.

**Weitere Lösungen** Das Gleichungssystem gegeben durch die Flüsse (4.11) hat im Fixpunkt  $I + 3$  Unbekannte aber nur  $I + 1$  Gleichungen. Wir entscheiden uns die Kopplungen  $a_{I+1}$  und  $a_{I+2}$  zu null zu fixieren, um eindeutige Lösungen zu finden. Dies entspricht einer Trunkierung des Potenzials. Entwickeln wir an einer geeigneten Stelle in geeigneter Weise,

so werden die höheren Kopplungen zunehmend irrelevant werden in dem Sinne, dass die kritischen Exponenten in diesen Richtungen zunehmend kleiner werden, das heißt in ihrem Betrag größer werden. Dies gilt es zu prüfen. Ist es gegeben so, wird die Folge der vorderen Kopplungen  $(a_{i^*}(I))_I$  schnell in  $I$  konvergieren, da eine bessere Feineinstellung dieser Parameter nötig ist und nicht sehr von den späteren Kopplungen beeinflusst werden. Insgesamt ist die Geschwindigkeit der Konvergenz ein Aspekt der Güte des Fixpunkts. Die Art der Trunkierung, wie wir sie hier wählen, weist allerdings einen gewissen Mangel auf. Es ist nicht gesichert, dass die Kopplungen  $a_{I+1}$  und  $a_{I+2}$  aufgefasst als Funktionen der kleineren Kopplungen eine Nullstelle in einer gewählten Lösungsklasse aufweisen. Ist dem nicht so wird diese Lösungsklasse nicht gefunden. Wir haben somit folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$0 = \dot{a}_i = f_{i,I}(a_0, a_1, \dots, a_i + 2) \quad (4.34)$$

$$\vdots \quad (4.35)$$

$$0 = \dot{a}_{I-1}(t) = f_{I-1,I}(a_0, a_1, \dots, a_I) \quad (4.36)$$

$$0 = \dot{a}_I(t) = f_{I-1,I}(a_0, a_1, \dots, a_I) \quad (4.37)$$

$$\text{mit } \varrho_0(t) =: a_0(t). \quad (4.38)$$

Gehen wir in der Trunkierung eine Stufe weiter, so werden sich die letzten beiden Gleichungen auch ändern. Diese Änderung wirkt sich auf die Lösungswerte der Kopplungen aus. Dieser Effekt sollte, wie oben diskutiert, gering sein in den niederen Kopplungen verglichen mit dem Wert von  $I$ .

Wir finden in Abhängigkeit von der Trunkierung eine verschiedene Anzahl von Lösungen. Ein Beispiel für die Mannigfaltigkeit der Lösungen sei am Beispiel  $I = 6$  und  $N = 100$  in Tabelle 4.2 gegeben.

# rel. Richt.	$\varrho_{0^*}$	$a_{1^*}$	$a_{2^*}$	$a_{3^*}$	$a_{4^*}$	$a_{5^*}$	$a_{6^*}$
1	0.99	-0.505	0.383	-0.569	0.984	-1.85	3.66
2	0.991	-0.418	0.223	-0.239	0.297	-0.387	0.517
2	0.998	-0.868	2.03	-3.86	8.58	-232	$128 \cdot 10^1$
3	0.985	-0.789	-0.213	0.361	56.0	-59.1	$-181 \cdot 10^1$
5	1.00	-0.675	2.10	-0.438	-5.87	-68.4	936
5	0.984	-0.623	-0.617	4.34	16.1	-38.8	-798
7	0.99	-0.505	0.383	5.59	-3.57	-105	28.0

Tabelle 4.2: Aufgetragen sind in einer Trunkierung bis zum sechsten Grad und  $N = 100$  verschiedene Lösungen der Fixpunktgleichung sortiert nach der Anzahl ihrer relevanten Kopplungen und mit einer Genauigkeit von drei signifikanten Stellen.

Diese Lösungen wurden mittels **FindRoot** in Mathematica ermittelt, wobei noch mehr reelle Lösungen existieren. Man sieht, dass nur drei der auftretenden Lösungen konsequent alternierende Kopplungen haben. Dies ist die analytische Lösung mit einer relevanten Richtung und die beiden Lösungen mit zwei relevanten Richtungen in dieser Trunkierung. Es sei auf zwei Aspekte hingewiesen. Zum einen nimmt die Lösungsmannigfaltigkeit mit wachsender Anzahl an Kopplungen zu und zum anderen ist nicht sichergestellt, dass alle Lösungen für alle Trunkierungen existieren. Es besteht sogar die Möglichkeit, dass Lösungen verschwinden beziehungsweise in eine Klasse mit einer höheren Anzahl an relevanten Richtungen übergehen. Dies geschieht zum Beispiel mit der Lösung Nummer drei aus Tabelle 4.2. Wir sind an Lösungen interessiert, die unabhängig von der Trunkierung eine beschränkte Anzahl relevante Richtungen haben, das heißt, die Lösung ist infrarotstabil.

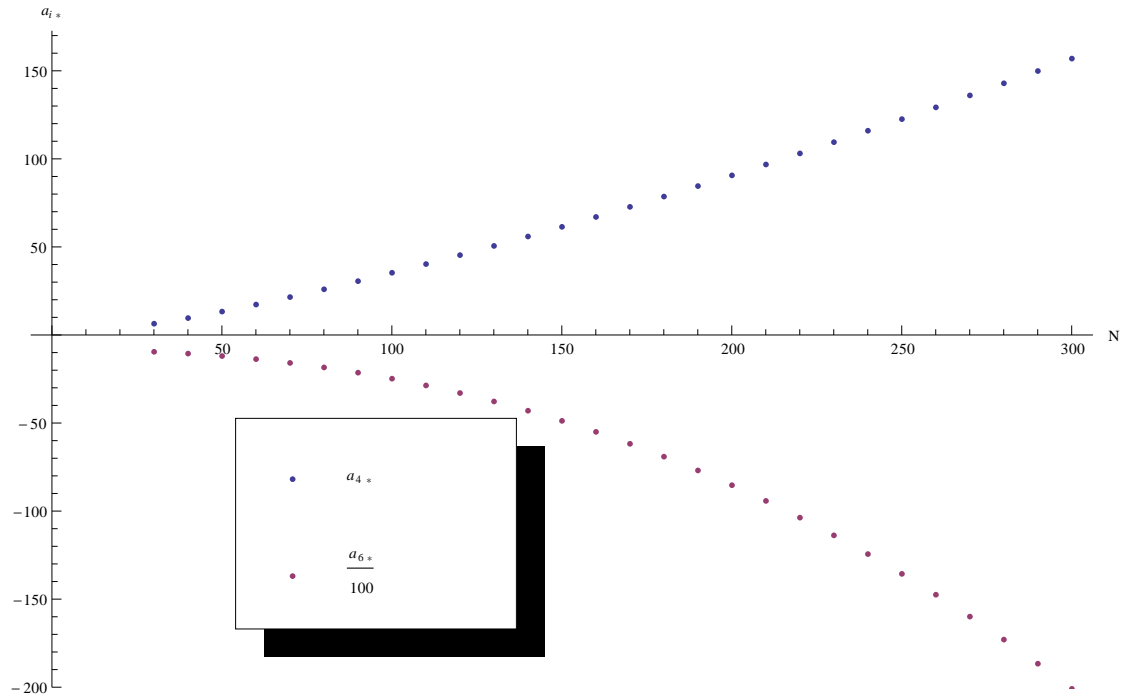


Abbildung 4.4: Aufgetragen sind die vierte und sechste Kopplung der Fixpunktlösung mit drei relevanten Richtungen aus Tabelle 4.2. Es wurde  $I = 8$  gewählt. Wir sehen eine deutliche Divergenz in  $N$ .

Im Speziellem interessieren uns Lösungen mit möglichst wenigen relevanten Richtungen. Wir betrachten deshalb die Lösungen der Zeilen zwei und vier der Tabelle 4.2 weiter, die stabil gegenüber einer Erhöhung der Trunkierung sind. Untersuchen wir die Kopplungen dieser Lösung erkennen wir, dass sie mit wachsender Anzahl an Feldrichtungen divergieren. Wir betrachten hierzu die Kopplungen  $a_{4*}$  und  $a_{5*}$  in Abbildung 4.4, die bei  $I = 8$  berechnet wurden. Dies ist der Grund warum diese Lösung und auch andere mit mehr als zwei relevanten Richtungen nicht in der "large  $N$ " Lösung vorkamen.

Die Lösung mit nur zwei relevanten Richtungen hat einen endlichen Konvergenzradius im Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  und somit endliche Kopplungen, wie eine Rechnung zeigt. Die eine relevante Richtung wird zu einer marginalen in dieser Entwicklung. Wir vergleichen dazu Abbildung 4.5. Die Monotonie von  $\theta_2$  wechselt in der Umgebung der Stelle  $N = 28.120$  mit  $\theta_2 \approx -0,879$ . Das lokale Minimum ( $\theta_2 \approx -0,903$ ) wird in der Nähe von  $N = 14,037$  angenommen.

In der Umgebung des lokalen Minimums beginnt sich die Konvergenzeigenschaft in  $I$  signifikant zu verschlechtern. Während bei  $N = 20$  die Erhöhung von  $I = 12$  auf 16 die Nullstelle relativ um 2,5‰ ändert, sind es bei  $N = 15$  schon 1,2‰. Bei  $N = 10$  ist für  $I = 16$  die Variation 6,7‰ und im Fall von  $N = 5$  wird in der Trunkierungsordnung 16 keine Lösung numerisch gefunden. Wir diskutieren dies am Beispiel  $N = 3$  ausführlicher. Zwei Möglichkeiten für ein gegebenes  $N$  die nächste Stufe der Trunkierung zu bestimmen sind leicht ersichtlich. Man benutze die Werte der Lösung für die niedrigere Trunkierung und suchen in deren Nähe die Lösung der höheren Trunkierung.

Die Alternative ist bei einem anderem  $N$  die Lösung für die höhere Trunkierung zu bestimmen und sich iterativ durch ein Modifizieren von  $N$  der gesuchten Lösung zu nähern. Dabei darf die Anzahl der Feldrichtungen als reeller Parameter beliebig variiert werden. Wir sehen in Tabelle 4.3, das Verhalten beim Durchführen der beiden Verfahren. Bei einer Extrapolation des Verlaufs von  $\theta_2$  entsteht ein Vorzeichenwechsel. Damit existierten 3 re-

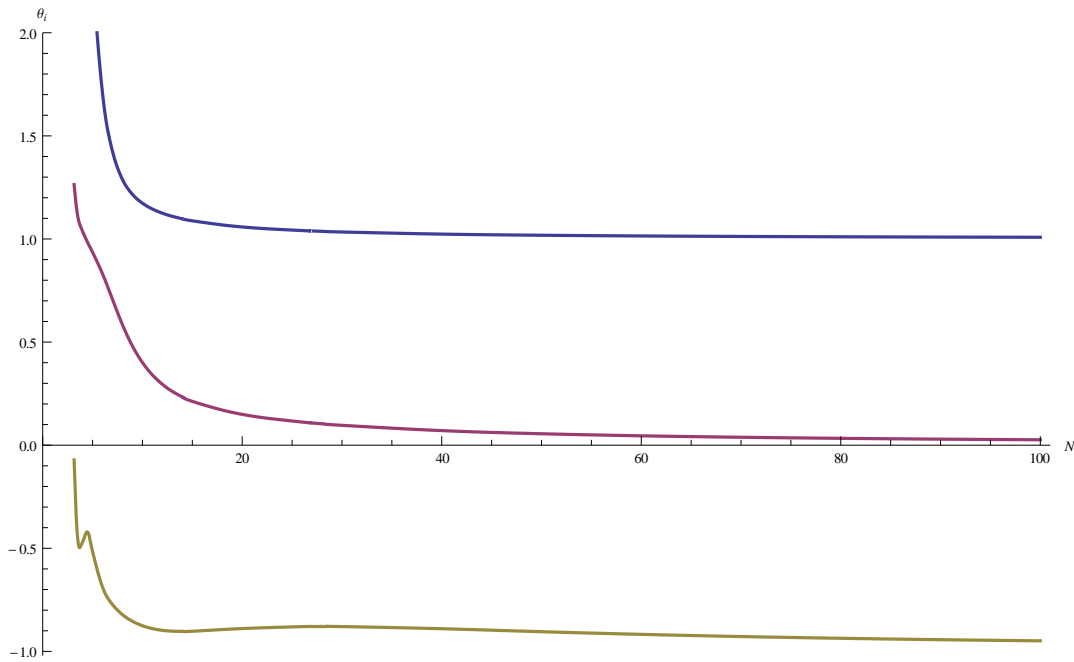


Abbildung 4.5: Bei einer Trunkierung von  $I = 12$  sind die ersten drei kritischen Exponenten für verschiedene  $N$  aufgetragen. Die Datenpunkte sind quadratische interpoliert. Die Existenz der vier abgebildeten Extremas der Funktion  $\theta_2(N)$  ist gesichert und kein Interpolationseffekt. Die Exponenten konvergieren gegen die "large  $N$ " Werte  $\theta_0 \rightarrow 1$ ,  $\theta_1 \rightarrow 0$  und  $\theta_2 \rightarrow -1$ .

levante Richtungen. Für kleine  $N$  ist die Realisierung dieser Fixpunktstruktur fraglich. Ab einem Wert von  $N > 20$  scheint die Lösungsklasse die gewünschte Stabilität zu gewinnen. Dies kann aber nur ein Richtwert sein. So ist für  $N = 10$  und  $I = 18$  weiterhin eine Lösung gefunden worden.

I	$\varrho_{0*}$	$a_{1*}$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	N	$\varrho_{0*}$	$a_{1*}$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$
6	0.692	-0,591	2,89	0,926	-0,844	4	0.820	-0,401	3,69	1,04	-0,470
7	0.701	-0,566	3,65	0,998	-1,04	3,5	0,782	-0.435	5,32	1,11	-0,448
8	0.708	-0,542	4,37	1,03	-0,718	3,3	0.761	-0.457	6,56	1,17	-0,335
9	0.714	-0,527	5,29	1,09	-0,690	3,2	0.748	-0.473	7,60	1,21	-0,211
10	0,718	-0,514	4.67	1,00	-0,789	3,15	0,740	-0.486	8.62	1,26	-0.0714
11	0,720	-0.510	8,10	1,23	-0,208	3,1436	0,738	-0,491	9,09	1,29	-0,00146

Tabelle 4.3: Wir sehen in der linken Hälfte der Tabelle die Veränderung der ersten beiden Kopplungen und der ersten drei kritischen Exponenten unter einer Erhöhung der Trunkierung im Fall  $N = 3$ . Es ist auch ein Unterschied im Trunkierungsverhalten für gerade und ungerade  $I$  zu erkennen. In der rechten Hälfte sind die gleichen Größen aufgetragen für den Fall eines fixierten  $I = 12$  und variablen  $N \rightarrow 3+$ . Man beachte in beiden Fällen die Divergenz der nullten Kopplung.

Betrachten wir aber das Intervall auf der diese Lösung existiert, erkennen wir in Abbildung 4.6, dass es endlich ist. Wie schon argumentiert, wird somit für die dimensional Größen die Lösung im Infraroten verschwinden. Wir werden diese Lösung aufgrund dieser beiden Nachteile hinter die exakte zurücktreten lassen. Man beachte aber, dass Korrekturen



aus einer genaueren Entwicklung die Probleme dieser Potentialverläufe beheben könnten. Deshalb haben wir sie an dieser Stelle weiter ausgearbeitet, als die anderen existenten Lösungen, die nicht in die "large  $N$ " Lösung fließen.

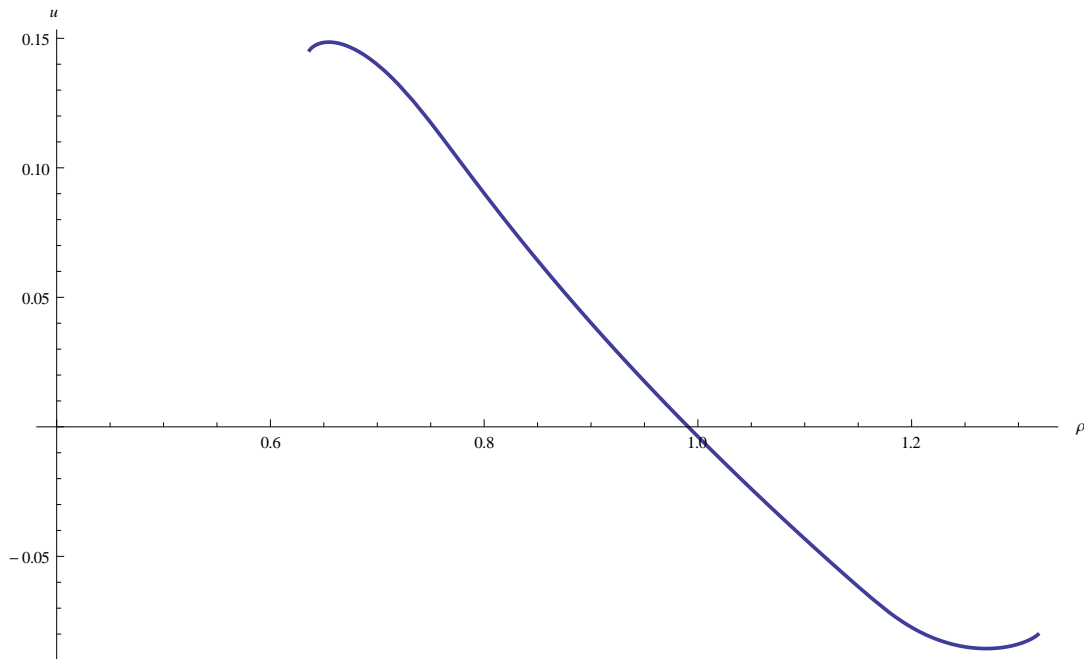


Abbildung 4.6: Wir sehen am Beispiel  $N = 100$  den Bereich in der die Lösung mit zwei relevanten Richtungen existiert. Es wird am Ende dieses Abschnitts gezeigt, dass jede Lösung mit Extrema kleiner eins in der Nähe dieser Extremstellen endet.

Wir haben bei unserer bisherigen Diskussion die triviale Lösung außer Acht gelassen. Da die Funktion  $\partial_t u$  ungerade in  $u$  ist, ist offensichtlich  $u = 0$  auch eine Lösung:

**die Gaußsche Fixpunktlösung** Betrachten wir die Flussgleichung der nullten Kopplung genauer

$$\partial_t \varrho_0(t) = \frac{N-1}{N} - \varrho_0 + \frac{(1 - 4\varrho_0^2 a_1^2)(3a_1 + 4\varrho_0 a_2)}{Na_1(1 + 4\varrho_0^2 a_1^2)^2}, \quad (4.39)$$

erkennen wir, dass der Grenzwert, in dem wir uns in die triviale Lösung begeben, nicht beliebig ist. Wir fixieren zunächst, dass  $\frac{a_2}{a_1} \rightarrow c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sichergestellt ist. Diese Forderung resultiert aus der Tatsache, dass die Ableitung nach  $a_1$  im Fluss von  $\varrho_0$  nicht divergieren soll, insbesondere da dieser Term im Fluss vor jeder Kopplung auftaucht. Wir verbleiben mit einer Unterdiagonalform der Stabilitätsmatrix

$$S_{i,i} = i - 2 \quad (4.40)$$

$$S_{i,i+1} = \begin{cases} -\frac{2(i-1)i}{N}, & i > 1 \\ -\frac{4c\varrho_0}{N}, & i = 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

$$S_{i,i+2} = \begin{cases} -\frac{2i(i+1)\varrho_0}{N}, & i > 1 \\ -\frac{4\varrho_0}{a_1 N}, & i = 1 \end{cases} \quad (4.42)$$

$$S_{i,j} = 0, \quad \text{falls } j - 1 \notin \{0, 1, 2\} \quad (4.43)$$

und somit den Eigenwerten  $\lambda_i = i - 1$   $i \in \mathbb{N}_0$ . Wir sehen, dass das erste Element der dritten Spalte divergiert, und stellen uns die Frage nach den Eigenvektoren der Matrix. Die zu den ersten beiden Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind einfach zu

$$\lambda_0 : v_0 = (1, 0, \dots)^t \quad (4.44)$$

$$\lambda_1 : v_1 = \left(-\frac{4c_2\varrho_0}{N}, 1, 0, \dots\right)^t \quad (4.45)$$

bestimmt. Im ersten Fall stimmt dies exakt mit dem "large  $N$ " Fall überein und im zweiten im Grenzwert oder im Falle  $d = 0$ . Bei den restlichen Eigenvektoren sind nur die ersten  $i + 1$  Einträge nicht verschwindend. Dabei gilt, dass  $(v_i)_{i+1} = 1$  und  $(v_i)_1 \propto \frac{1}{a_1}$ , wobei  $\propto$  eine Unterdrückung in einer negativen Potenz von  $N$  beinhaltet.

Wir wollen uns die Umgebung dieser Fixpunktlösung anschauen. In der Umgebung von  $a_{i^*} = 0$  ergibt sich

$$\varrho_0 = \frac{N + 2}{N + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{N + 2}{N} \quad (4.46)$$

im betrachteten Fall. Ein divergierendes  $\frac{a_2}{a_1}$  führt uns in die ungebrochene Phase, die wir hier noch nicht betrachten wollen. Der Term sei somit endlich oder null. Wir betrachten den Fluss der ersten Kopplung unter dieser Voraussetzung  $a_2 = c_2 a_1^\beta$  mit  $\beta \geq 1$  und erhalten folgende Terme, die in führender Ordnung Beiträge liefern:

$$0 = a_2 + \varrho_0 a_1^3 + 2 \frac{a_2^2}{a_1} - 3a_3 = c_2 a_1^\beta + \varrho_0 a_1^3 + 2c_2^2 a_1^{2\beta-1} - 3a_3 \quad (4.47)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 \propto a_1^\beta, & \beta \in (1, 3) \\ a_3 \propto a_1^3, & \beta \geq 3 \vee (\beta = 1, c = -1/2) \\ a_3 \propto a_1, & \beta = 1, c \neq -1/2 \end{cases} \quad (4.48)$$

Das hier hergeleitete Verhalten von  $a_3$  und damit auch allgemein  $a_i = c_i a_1^{\beta_i}$  mit  $\beta = 2 > 1$  im betrachteten Fall, ist für die Ergebnisse der dritten Spalte der Stabilitätsmatrix von essenzieller Bedeutung, denn der möglicherweise divergente Anteil ergibt sich zu

$$\partial_t a_{i,\text{div}} = (i + 1)a_{i+1} \partial_t \varrho_0 \Rightarrow \partial_t \partial_{a_2} a_{i,\text{div}} \propto \frac{a_{i+1}}{a_1}, \quad i \geq 1. \quad (4.49)$$

Gehen wir in den Bereich  $\beta \in (1, 2)$ , modifiziert sich die Stabilitätsmatrix nur im Eintrag  $S_{1,2} = -\frac{4c_2\varrho_0}{Na_1^{2-\beta}}$ . Wird  $\beta = 1$  und  $\beta_i = 1$  gesetzt, so ergeben sich Modifikationen:

$$S_{i,2} = \begin{cases} \frac{-4c_2\varrho_0}{Na_1}, & i = 1 \\ \frac{-8c_2^2\varrho_0}{N}, & i = 2 \\ \frac{-4ic_2c_i}{N}, & i > 2 \end{cases} \quad S_{i,3} = \begin{cases} \frac{-4\varrho_0}{Na_1}, & i = 1 \\ \frac{4(4c_2\varrho_0-1)}{N}, & i = 2 \\ \frac{4ic_i}{N} + \delta_{i,3}, & i > 2 \end{cases} \quad S_{i,i+1} = -\frac{2(i-1)i + 4ic_2\varrho_0}{N} \quad (4.50)$$

$$S_{1,1} = -1 + \frac{4c_2}{N} \quad (4.51)$$

Die restlichen Einträge bleiben gleich. Es ergibt sich:

$$S = \begin{pmatrix} -1 + \frac{4c_2}{N} & \frac{-4c_2\varrho_0}{Na_1} & \frac{-4\varrho_0}{Na_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-8c_2^2\varrho_0}{N} & \frac{4(4c_2\varrho_0-1)}{N} & \frac{-12\varrho_0}{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12c_2c_3\varrho_0}{N} & \frac{12c_3}{N} + 1 & \frac{-12-12c_2\varrho_0}{N} & \frac{-24\varrho_0}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-16c_2c_4\varrho_0}{N} & \frac{16c_4}{N} & 2 & \frac{-24-16c_2\varrho_0}{N} & \frac{-40\varrho_0}{N} & 0 \\ 0 & \frac{-20c_2c_5\varrho_0}{N} & \frac{20c_5}{N} & 0 & 3 & \frac{-40-20c_2\varrho_0}{N} & \frac{-60\varrho_0}{N} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Wir haben somit einen Eigenwert der identisch  $\theta_0 = -1 + \frac{4c_2}{N}$  ist. Das Vorzeichen dieses Eigenwertes ist abhängig von der Wahl von  $c_2$ . Der Eigenvektor zu dieser Richtung bleibt trivial  $(1, 0, \dots)$ . Offensichtlich gilt  $(0, 1, 0, \dots)S(0, 1, 0, \dots)^t < 0$ . Eine Darstellung des betrachteten Vektors mit Eigenvektoren der Matrix hat nur einen verschwindenden Anteil des nullten Eigenvektors. Es folgt, dass noch mindestens ein weiterer negativer Eigenwert existieren muss. Dies heißt aber, dass in den Kopplungen eine Störung, die linear in  $a_2$  und  $a_1$  ist nicht unterdrückt wird, sondern im Infraroten verstärkt wird. Damit ist die Gaußsche Fixpunktlösung nicht stabil unter einer Störung dieser Art. Dies stimmt mit den Ergebnissen für ein bosonisches Modell in drei Dimensionen überein [12].

Da in der obigen Matrix im Grenzwert divergente Terme auftreten, berechnen wir die Stabilitätsmatrix, der Lösung der Fixpunktgleichung, wenn wir die ersten beiden Kopplungen zu  $a_1 = a_2 = 10^{-15}$  fixieren und bei der zwölften Ordnung  $I = 10$  trunkieren. Es soll damit die Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen geprüft werden. Offensichtlich setzen wir in diesem Fall in den Flussgleichungen für  $a_{11}$  und  $a_{12}$  nicht null, da sonst das Gleichungssystem überbestimmt wäre. Wir erkennen aber ein Abfallverhalten in den letzten Kopplungen gegen null, sodass wir uns weiter in der Nähe der Gaußschen Lösung bewegen. Wir erhalten am Beispiel  $N = 10$  sogar drei relevante Richtungen mit den kritischen Exponenten:

$$\theta_0 = -2,54657 \quad , \quad \theta_{1/2} = -1,57964 \pm 5,90607i \quad (4.53)$$

Es zeigt sich, dass bei einer Erhöhung auf  $N = 100$  und Beibehaltung der restlichen Parameter das Paar aufspaltet und man nur noch zwei relevante Richtungen hat. Somit ist die Instabilität im Sinne von mindestens zwei relevanten Richtungen exemplarisch überprüft.

Geleitet von der Idee, dass wir an den Grenzwert großer Feldrichtungszahlen anschließen wollen, verbleiben wir mit einer nichttrivialen Lösung für die gebrochene Phase, die wir analytisch gefunden haben. Wir werden uns im Folgenden vergewissern, dass diese Lösung unabhängig vom gewählten Regulator existiert.

**Andere Regulatoren** Um dies zu überprüfen, wählen wir einen anderen Regulator, mit dem weiterhin analytisch gerechnet werden kann. Ein Vertreter der Familie der dimensionslosen Regulatoren

$$\tau_n = \left( \frac{1}{p^n} - 1 \right) \theta(1 - p) \quad (4.54)$$

$$\dot{\tau}_n = n \frac{1}{p^n} \theta(k - p) \quad (4.55)$$

mit festem  $n$  wird verwendet. Dies entspricht der Familie der  $\left( \frac{k^n}{|q|^n} - 1 \right) \theta(k^2 - q^2)$  Regulatoren, nachdem wir zu dimensionslosen Größen übergegangen sind. Wie schon früher ist  $q$  der dreidimensionale Impulsvektor und  $p$  sein Betrag. Diese erfüllen, wie bereits gezeigt, die Anforderungen, die wir an einen Regulator stellen. Leider ist ein exakter Ansatz wie bei unserem vorherigen Regulator in diesem Fall nicht mehr möglich, das heißt die Kopplungen können nicht mehr von den höheren unabhängig gewählt werden. Es folgt eine Untersuchung dieses Sachverhalts. Man betrachte die Differenzialgleichung des Flusses in

unserer Näherung

$$\begin{aligned} \partial_t u = -u + \varrho u' + \frac{N-1}{N} \int_0^1 dp p^2 \frac{2 \left( u^2 - p^2 \left( \frac{1}{p^n} \right)^2 \right) n \frac{1}{p^n}}{\left( u^2 + p^2 \left( \frac{1}{p^n} \right)^2 \right)^2} u' + \\ \frac{1}{N} \int_0^1 dp p^2 \frac{2 \left( (u + 2\varrho u')^2 - p^2 \left( \frac{1}{p^n} \right)^2 \right) n \frac{1}{p^n}}{\left( (u + 2\varrho u')^2 + p^2 \left( \frac{1}{p^n} \right)^2 \right)^2} (3u' + 2\varrho u''). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Mit dem Polynomansatz

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\varrho - \varrho_0(t))^i, \quad (4.57)$$

den wir gegebenenfalls noch trunkieren, haben wir im Fixpunkt folgende Gleichungen zu erfüllen, damit unsere Stabilitätsmatrix wieder eine Unterdiagonalform annimmt, das heißt die niederen von den höheren Koeffizienten entkoppeln.

$$\varrho_{0*} = \frac{N-1}{N} \int_0^1 dp p^2 2np^n = \frac{N-1}{N} \frac{2n}{n+1} \quad (4.58)$$

$$0 = \frac{1}{N} \int_0^1 dp p^2 \frac{2n \left( 4\varrho_{0*}^2 a_{1*}^2 - p^{2(1-n)} \right) p^{-n}}{\left( 4\varrho_{0*}^2 a_{1*}^2 + p^{2(1-n)} \right)^2} \Rightarrow a_{1*} = f(n, N) \quad (4.59)$$

$$0 = 3a_{1*} + 4\varrho_0 a_{2*} \Rightarrow a_{2*} = -\frac{3a_{1*}}{4\varrho_0} \quad (4.60)$$

Bei der Wahl der ersten Gleichung haben wir uns von unseren Erkenntnissen der "large  $N$ " Lösung leiten lassen und sie direkt ohne Korrektur übernommen. Dabei fixiert die erste Gleichung den Koeffizienten vor  $u'_*$  in der ersten Zeile von (4.56) auf einen Term der mindestens linear in  $(\varrho - \varrho_{0*})$  ist, die zweite Gleichung das Integral der zweiten Zeile auf einen Term, der mindestens linear in der Entwicklung ist, und die dritte Gleichung das Integral der letzten Zeile auf einen Term quadratisch in  $(\varrho - \varrho_{0*})$ . Des Weiteren wird  $3u'_* + 2\varrho u''_*$  auch mindestens linear in der Taylorentwicklung, nach der Fixierung der dritten Zeile. Dafür musste aber schon  $a_{2*}$  fixiert werden, sodass zu prüfen ist, ob die Flüsse der ersten drei Kopplungen  $\varrho_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  null sind, da höhere Kopplungen nicht mehr beitragen. Dazu betrachten wir die Ordnungen eins, zwei und drei in der Taylorentwicklung der Funktion um  $\varrho_{0*}$ :

$$(\varrho - \varrho_{0*})^0 : \varrho_{0*} - \frac{N-1}{N} \frac{2n}{n+1} = 0 \checkmark \quad (4.61)$$

$$(\varrho - \varrho_{0*})^1 : -a_{1*} + a_{1*} + 2\varrho_{0*} a_{2*} - 2 \frac{N-1}{N} \frac{2n}{n+1} a_{2*} = 0 \checkmark \quad (4.62)$$

$$(\varrho - \varrho_{0*})^2 : -a_{2*} + 2a_{2*} + 3\varrho_{0*} a_{3*} - 3 \frac{N-1}{N} \frac{2n}{n+1} a_{3*} + \frac{N-1}{N} a_{1*}^3 \frac{6n}{3n-1} \quad (4.63)$$

$$\Rightarrow a_{1*} = \pm \frac{N-1}{2N} \frac{\sqrt{3n^2 + 2n - 1}}{2n}. \quad (4.64)$$

Wir haben somit zwei Gleichungen für  $a_{1*}$ , die beide gleichzeitig zu erfüllen sind. Betrachten wir das Integral aus (4.59) und setzen unsere Beziehungen für  $\varrho_{0*}$  und  $a_{1*}$  ein, so erhalten

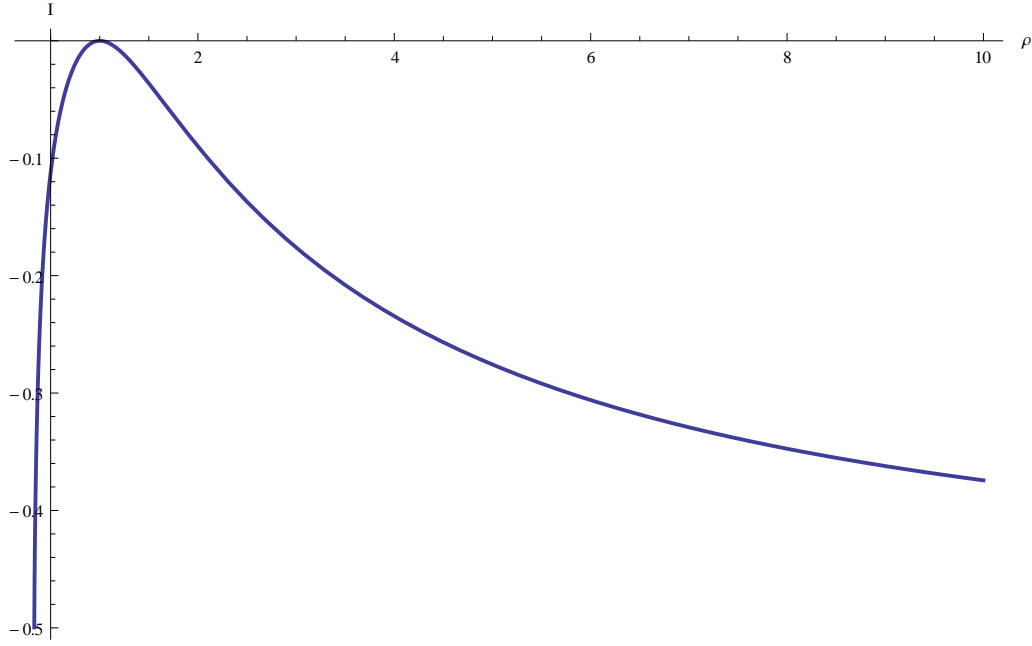


Abbildung 4.7: Aufgetragen ist die Funktion  $I(n)$ , die uns eine Bedingung für die Anwendbarkeit unseres Ansatzes zum Finden der exakten Kopplungen liefert.

wir:

$$I(n) = \int_0^1 dp \frac{\frac{3n-1}{n+1} - p^{2(1-n)}}{\left(\frac{3n-1}{n+1} + p^{2(1-n)}\right)^2} 2np^{2-n} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.65)$$

Diese Funktion von  $n$  hat eine Nullstelle und ein Maximum bei  $n = 1$  und ist für  $n \geq 1$  monoton fallend und für  $1/3 < n < 1$  monoton wachsend. Die Tatsache, dass es sich um ein Maximum handelt, ist mittels der ersten und zweiten Ableitung an der Stelle  $n = 1$  leicht nachrechenbar. Der restliche Funktionsverlauf kann numerisch errechnet werden 4.7. Wir geben zusätzlich noch eine Abschätzung an, indem wir das Integral zerlegen:

$$I(n) = I_1 + I_2 \quad (4.66)$$

$$I_1 = \int_0^{p_1} dp \frac{\frac{3n-1}{n+1} - p^{2(1-n)}}{\left(\frac{3n-1}{n+1} + p^{2(1-n)}\right)^2} 2np^{2-n} \geq \int_0^{p_1} dp \frac{\frac{3n-1}{n+1} - p^{2(1-n)}}{(2p^{2(1-n)})^2} 2np^{2-n} = \frac{n(-p_1^{1+n} + p_1^{-1+3n})}{2(n+1)} \quad (4.67)$$

$$I_2 = \int_{p_1}^1 dp \frac{\frac{3n-1}{n+1} - p^{2(1-n)}}{\left(\frac{3n-1}{n+1} + p^{2(1-n)}\right)^2} 2np^{2-n} \geq \int_{p_1}^0 dp \frac{\frac{3n-1}{n+1} - p^{2(1-n)}}{(2p^{2(1-n)})^2} 2np^{2-n} = -\frac{n(-p_1^{1+n} + p_1^{-1+3n})}{2(n+1)} \quad (4.68)$$

$$\Rightarrow I(n) \leq 0, p_1 = \left(\frac{3n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2(1-n)}} \text{ die Nullstelle des Integranden.} \quad (4.69)$$

Dabei gilt in allen Ungleichungen nur das Gleichheitszeichen, falls  $n = 1$  gilt, denn es gilt  $p < p_1$  ( $p > p_1$ )  $\Rightarrow p^{2(1-n)} > \frac{3n-1}{n+1}$ ,  $n > 1$  ( $n < 1$ ) und  $p > p_1$  ( $p < p_1$ )  $\Rightarrow p^{2(1-n)} < \frac{3n-1}{n+1}$ ,  $n > 1$  ( $n < 1$ ). Somit ist die Behauptung, dass nur eine Nullstelle existiert gezeigt.

Wird  $n = 3$  gewählt, so bestimmt sich die Flussgleichung zu:

$$\partial_t u = -u + \varrho u' + 3 \frac{N-1}{N} u' \left( \frac{\log(1+u^2)}{2u^2} - \frac{1}{1+u^2} \right) + \quad (4.70)$$

$$\frac{3}{N} (3u' + 2\varrho u'') \left( \frac{-1}{1+(u+2\varrho u')^2} + \frac{\log(1+(u+2\varrho u')^2)}{2(u+2\varrho u')^2} \right). \quad (4.71)$$

Wir haben hier den Vorfaktor  $\frac{2n}{n+1} = \frac{3}{2}$  bei der Lage der Nullstellen des Fixpunktpotenzials zu bedenken. Die Nullstelle im "large  $N$ " Limes ist in der Folge bei  $\varrho_{0*} = 1.5$  zu erwarten. Diese wird durch die Einführung einer neuen Feldamplituden  $\tilde{\varrho} = \frac{2}{3}\varrho$  auf eins skaliert.

Man beachte, dass in der dimensionellen Größe  $\varrho$  im infraroten Grenzwert  $\varrho \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$  diese Skalierung keine wesentliche Rolle spielt. Die kritischen Exponenten, die wir aus unserer Stabilitätsmatrix erhalten, sind von dieser Skalierung unabhängig, weil aus jeder Zeile und Spalte ein Element in jedem Produkt der Determinante vorkommt und die Spalten genau invers zu den Zeilen bei dieser Substitution skalieren.

Wir bestimmen in Abhängigkeit von der Trunkierung Lösungen mit einer relevanten Richtung und haben diese in Tabelle 4.4 für  $N = 100$  zusammengefasst. Wie zu sehen ist, existiert die Lösung unabhängig von  $I$  und die Folgen der Kopplungen in der Trunkierung zeigen ein sehr gutes Konvergenzverhalten, wobei die Stationarität in der Tabelle durch die Beschränkung auf drei signifikante Stellen zurückzuführen ist. Betrachten wir

I	$\tilde{\varrho}_{0*}$	$a_{1*}$	$a_{2*}$	$a_{3*}$	$a_{4*}$	$a_{5*}$
7	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.42	18.9
8	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.44	18.6
9	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.43	18.7
10	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.43	18.7
11	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.43	18.7
12	0.990	0.908	-1.07	2.43	-6.43	18.7

Tabelle 4.4: Aufgetragen sind die ersten sechs Kopplungen der Fixpunktlösung mit einer relevanten Richtung, mit einer Genauigkeit von drei signifikanten Stellen in verschiedenen Trunkierungen  $I$ . Man beachte die sehr gute Konvergenz der Werte. Die Anzahl der Feldrichtungen  $N$  ist in diesem Fall 100.

die kritischen Exponenten, welche sich mit diesem Regulator ergeben, folgt in Abhängigkeit von der Trunkierung das Bild aus Tabelle 4.5. Ein ähnliches Verhalten wurde durch eine Berechnung auch für den Regulator mit  $n = 2$  festgestellt.

I	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
7	0.996	-0.0647	-1.18	-2.29	$-3.86 - 0.53i$	$-3.86 + 0.533i$	$-6.37 - 1.8i$
8	0.996	-0.0645	-1.17	-2.37	-3.35	$-4.97 - 0.98i$	$-4.96 + 0.98i$
9	0.996	-0.0645	-1.18	-2.33	-3.80	-4.12	$-6.12 - 1.5i$
10	0.996	-0.0645	-1.18	-2.35	-3.47	$-5.04 - 0.66i$	$-5.04 + 0.66i$
11	0.996	-0.0645	-1.18	-2.34	-3.60	-4.50	$-6.12 - 1.2i$
12	0.996	-0.0645	-1.18	-2.34	-3.52	$-5.14 - 0.33i$	$-5.14 + 0.33i$
13	0.996	-0.0645	-1.18	-2.34	-3.56	-4.66	$-6.21 - 0.88i$
14	0.996	-0.0645	-1.18	-2.34	-3.54	-4.93	-5.56
15	0.996	-0.0645	-1.18	-2.34	-3.55	-4.74	$-6.32 - 0.63i$
exakt	1	-0.0290	-1.09	-2.17	-4.44	-5.61	-6.81

Tabelle 4.5: Wir sehen die kritischen Exponenten in Abhängigkeit von der Trunkierung bei einem Regulator  $\tau_3$  und in der letzten Zeile die exakten Werte, die wir erhalten, verwenden wir den Regulator  $r = \tau_1$ . Die Werte liegen nahe beieinander, stimmen aber nicht exakt überein. Dies ist zu erwarten, da die Art wie schnell oder langsam das Potenzial fließt abhängig vom Regulator ist. Im Zuge der Universalitätshypothese sollten die dort vorkommenden Exponenten verglichen werden, die sich aus obigen berechnen lassen. Dies soll aber an dieser Stelle nicht geschehen. Wir sehen, dass in der Trunkierung Paare von komplex konjugierten Exponenten vorkommen, aber auch, dass diese Paarstruktur sich mit zunehmender Trunkierung auflöst und jede Richtung verschieden schnell fließt, wie es bei unserer exakten Lösung auch der Fall war. Es sei angemerkt, dass bei den gelisteten Trunkierungen alle höheren als die angegebenen Exponenten je zwei komplex konjugierte Werte haben.

#### 4.2.2 Die ungebrochene Phase $\varrho_0 = 0$

Nachdem wir die gebrochene Phase betrachtet haben, wollen wir uns im Folgendem mit der ungebrochenen Phase zuwenden. Dazu wählen wir einen polynomiellen Ansatz um die Stelle  $\varrho = 0$

$$u = \sum_{i=0}^I a_i(t) \varrho^i \quad (4.72)$$

Man kann die Frage stellen, ob aufgrund der Form der Differenzialgleichung ein Ansatz der Art  $a_i \varrho^{i+\beta}$  geeigneter gewesen wäre. Wie eine kurze Rechnung zeigt, erfordert die Regularität des physikalischen Potenzials  $v_{\text{bos}} = u^2 \varrho$ , dass  $\beta = 0$  gilt. Betrachten wir die niedrigste Ordnung in  $\varrho$ :

$$0 = \frac{(-1 + N)\beta a_0(t) (-1 + \varrho^{2\beta} a_0(t)^2)}{N\varrho (1 + \varrho^{2\beta} a_0(t)^2)^2} + \frac{\beta(1 + 2\beta)a_0(t) (-1 + (1 + 2\beta)^2 \varrho^{2\beta} a_0(t)^2)}{N\varrho (1 + (1 + 2\beta)^2 \varrho^{2\beta} a_0(t)^2)^2} \quad (4.73)$$

Existierende Grenzwerte wurden ein- und vorkommende Zeitableitungen null gesetzt. Wir untersuchen die Fälle  $\beta < 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\beta > 0$ . Ist  $\beta$  echt null, so ist die Gleichung erfüllt. Weil die niedrigste  $\varrho$  Potenz schon -1 war, ergibt sich, dass die verbleibenden höheren Ordnungen regulär sind. Ist  $\beta < 0$  ergibt sich folgendes Verhalten nahe dem Ursprung:

$$0 = \frac{(-1 + N)\beta}{N(\varrho^{2\beta+1} a_0(t))} + \frac{\beta}{N((1 + 2\beta)\varrho^{2\beta+1} a_0(t))} \quad (4.74)$$

Da die Regularität im Ursprung von der Wahl  $\beta = -0.5$  verletzt wird und  $\beta = 0$  ausgeschlossen ist, muss  $\beta = \frac{-N}{2(N-1)}$  gelten. Bedenken wir aber, dass unser physikalisches Potenzial  $v_{\text{bos}} =$

$u^2 \rho$  ist, ergibt sich eine Divergenz bei  $\rho = 0$  für alle endlichen  $N$ . Ist  $\beta$  positiv haben wir folgendes Verhalten:

$$0 = \frac{(-1 + N)\beta a_0(t)(-1)}{N\rho} + \frac{\beta(1 + 2\beta)a_0(t)(-1)}{N\rho}. \quad (4.75)$$

Es resultiert  $\beta = 0$  oder  $\beta = -\frac{N}{2}$ , was beides nicht im betrachteten Bereich liegt. Wir verbleiben mit der Lösung  $\beta = 0$ .

Untersuchen wir die gegebene Differenzialgleichung in der ungebrochenen Phase genauer, so erkennen wir, dass aufgrund des Faktors  $\rho$  vor der zweiten Ableitung der Fluss der  $i$ 'ten Kopplung von der  $i + 2$ 'ten unabhängig wird. Insbesondere sind die Beiträge der radialen Mode und der Goldstone Moden an der Stelle  $\rho = 0$  bis auf einen Faktor  $(N - 1)/3$  gleich. Dies führt dazu, dass die Koeffizienten durch die Wahl von  $a_0$  schon fixiert sind. Wir erhalten somit folgende Struktur unserer Fixpunktlösung:

$$a_{0*} = \text{const.} \quad (4.76)$$

$$a_{1*} = a_{1*}(a_{0*}) \quad (4.77)$$

$$a_{2*} = a_{2*}(a_{0*}, a_{1*}(a_{0*})) = a_{2*}(a_{0*}) \quad (4.78)$$

$$\vdots \quad (4.79)$$

$$a_{i*} = a_{i*}(a_{0*}). \quad (4.80)$$

Suchen wir Lösungen, die obige Trunkierung erfüllen, so ist das äquivalent zur Suche nach Nullstellen von  $a_{I+1}(a_0)$ . Dann und nur dann ist das Gleichungssystem  $f_i = 0$  erfüllt. Wir werden somit in unserer Trunkierung keine Lösungen realisieren, bei denen die Absolutwerte der Koeffizienten monoton wachsen. Es existieren zwei technische Möglichkeiten die Koeffizienten der Trunkierung zu ermitteln. Wir verwenden an dieser Stelle den Ansatz, die Nullstelle zu finden und erhalten damit folgende reelle Lösungen für  $N=20$  in den jeweiligen Trunkierungen, wobei hier nur Ergebnisse mit  $a_0 > 0$  aufgelistet werden, da eine Symmetrie  $u$  gegen  $-u$  besteht und  $u = 0$  die triviale Lösung ist:

$$I = 1 : a_{0*} = 1, 73205 \quad (4.81)$$

$$I = 2 : \text{keine Lösung} \quad (4.82)$$

$$I = 3 : a_{0*} = 0, 179519, a_{0*} = 6, 26972 \quad (4.83)$$

$$I = 4 : a_{0*} = 0, 139487, a_{0*} = 0, 261869, a_{0*} = 2, 84784 \quad (4.84)$$

$$I = 5 : a_{0*} = 0, 352934 \quad (4.85)$$

$$I = 6 : a_{0*} = 0, 166795, a_{0*} = 0, 40913 \quad (4.86)$$

$$I = 7 : a_{0*} = 0, 44671, a_{0*} = 3, 48104. \quad (4.87)$$

$a_{0*} > 1$  Insbesondere für die Wertetupel mit  $a_{0*} > 1$  ist keine Konvergenz zu erkennen. Dies ist der schlecht gewählten Trunkierung geschuldet, bedingt durch das schnelle Anwachsen der Kopplungen. Wir können damit in diesem Regime keine Konvergenz zu einem Fixpunkt feststellen. Deshalb betrachten wir die Anzahl an relevanten Richtungen in Abhängigkeit vom gewählten Absolutwert der Reihe, wobei wir alle Koeffizienten exakt bestimmen, aber nur endliche Stabilitätsmatrizen betrachten. Wenn eine gute Konvergenz vorliegt, so erwarten wir, dass sich die ersten relevanten Richtungen stabilisieren und gegen einen festen Wert konvergieren. Dies ist nicht der Fall, wie wir in Tabelle 4.6 sehen.

Wir erkennen, dass sich die kritischen Exponenten nicht stabilisieren. Es ist sogar der Fall, dass mit steigender Trunkierung irrelevante Richtungen relevant werden und keine offensichtliche Beschränkung der Zahl der relevanten Richtungen vorhanden ist. Damit folgt aber, dass die symmetrische Phase mit einem Absolutwert größer eins nicht infrarotstabil



$I$	$\theta_r^{1,2}(1.5)$	$\theta_r^{3,4}(1.5)$	$\theta_r^{1,2}(1.4)$	$\theta_r^{3,4}(1.4)$	$\theta_r^{1,2}(1.35)$	$\theta_r^{3,4}(1.35)$	$\theta_r^{1,2}(1.3)$	$\theta_r^{3,4}(1.3)$
8	5.9	-23.6	-9.0	-37.5	-18.9	-47.0	-31.5	-59.5
9	10.2	-25.6	-8.0	-45.7	-20.0	-54.4	-35.3	-69.7
10	15.3	-27.1	-6.5	-47.7	-20.8	-61.9	-39.0	-80.3
13	35.7	-28.3	1.4	-61.7	-21.1	-84.4	-49.5	-114
16	64.1	-24.0	14.5	-73.1	-18.0	-106	-58.8	-149
19	101	-13.5	33.2	-81.3	-11.2	-127	-66.7	-186
20	115	-8.6	40.6	-83.3	-8.0	-134	-68.9	-198

Tabelle 4.6: Wir haben für verschiedene Dimensionen  $I$  der Stabilitätsmatrix  $S \in \text{mat}(I, I, \mathbb{R})$  bei einer festen Wahl von  $a_{0*}$  und  $N = 10$  den Realteil  $\theta_r$  von vier sich ergebenden kritischen Exponenten  $\theta_i(a_{0*})$  aufgetragen. Dabei wurden alle  $I+3$  Kopplungen  $a_{i*}$  berechnet. Eine Trunkierung  $a_{I+1} = a_{I+2} = 0$  verändert die Ergebnisse nicht wesentlich.

ist oder nur bedingt stabil, sofern ein Effekt das Wachstum der Zahl der relevanten Richtungen beschränken sollte. Dies ist aber bis zur betrachteten Ordnung  $I = 20$  nicht zu erkennen. Leider verfügen wir nur für die Hauptdiagonale und die ersten beiden Nebendiagonalen über einfache analytische Ausdrücke, stellen aber fest, dass die Eigenwerte der Matrizen

$$M_i = \begin{pmatrix} S_{i,i} & S_{i,i+1} \\ S_{i+1,i} & S_{i+1,i+1} \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

gegen  $-\infty$  in  $i$  divergieren.  $S$  ist die untrunkierte Stabilitätsmatrix. Dies kann aber auch nur als ein Indiz dienen, da auch die Zeilensumme beziehungsweise Spaltensumme divergiert und dem Autor bekannte Sätze somit nicht hinreichend aussagekräftig sind. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine exaktere Angabe verzichtet.

Wir betrachten in Abbildung 4.8, wie sich bei einer Änderung der Anzahl der Feldrichtungen die Anzahl an relevanten Richtungen ändert. Dieses Verhalten ist auch für den Fall  $a_{0*} < \sqrt{3}$  repräsentativ wie überprüft wurde. Wir wollen dieser Grafik, wie auch der Tabelle 4.6, noch einige Aufmerksamkeit widmen. Die Tatsache, dass die Trunkierung einen solch starken Einfluss auf die relevanten Richtungen hat, ist im schlechten Entwicklungspunkt zu suchen. Wie bereits beschrieben, sollten sich diese Werte stabilisieren, wenn man sich an einem Fixpunkt befindet. Des Weiteren ist das Ändern der Anzahl der relevanten Richtungen in  $N$  für verschiedene Richtungen auch dadurch motiviert, dass wir keine Lösungen der Trunkierungen betrachten, sondern willkürlich  $a_{0*}$  fixiert haben. Dies ist aber keine konsistente Herangehensweise, die uns aber in diesem Fall, aufgrund einer mangelnden Konvergenz der trunkierten Fixpunktlösung, aufgedrängt wurde. Wir verbleiben damit, dass diese Lösungen keine guten Fixpunktlösungen sind.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass mögliche Fixpunkte mit  $|u_*(0)| > 1$  keine stabilen Lösungen sind. Sie sind jedoch die Einzigen, die global im physikalischen Bereich  $\varrho \geq 0$  existieren, wie wir in Abbildung 4.9 und unseren folgenden Betrachtungen sehen.

Das Verhalten in Abbildung 4.9 ist repräsentativ für alle Lösungen dieser Klasse. Aus

$$a_{1*} = \frac{N}{N+2} \frac{a_{0*}^2 - 1}{(a_{0*}^2 + 1)^2} a_{0*} \quad (4.89)$$

$$a_{2*} = \frac{N^2(8+N)}{(2+N)^2(4+N)} \frac{(-3+a_0^2)(1+a_0^2)^3 a_0^3}{(a_0^2-1)^3} \quad (4.90)$$

folgt, dass der Anstieg im Ursprung stets positiv ist bei einem  $a_{0*} > 1$ . Da die Funktion  $u_*$  mindestens einmal stetig differenzierbar in  $\varrho$  ist, schließen wir, dass die Funktion nur dann

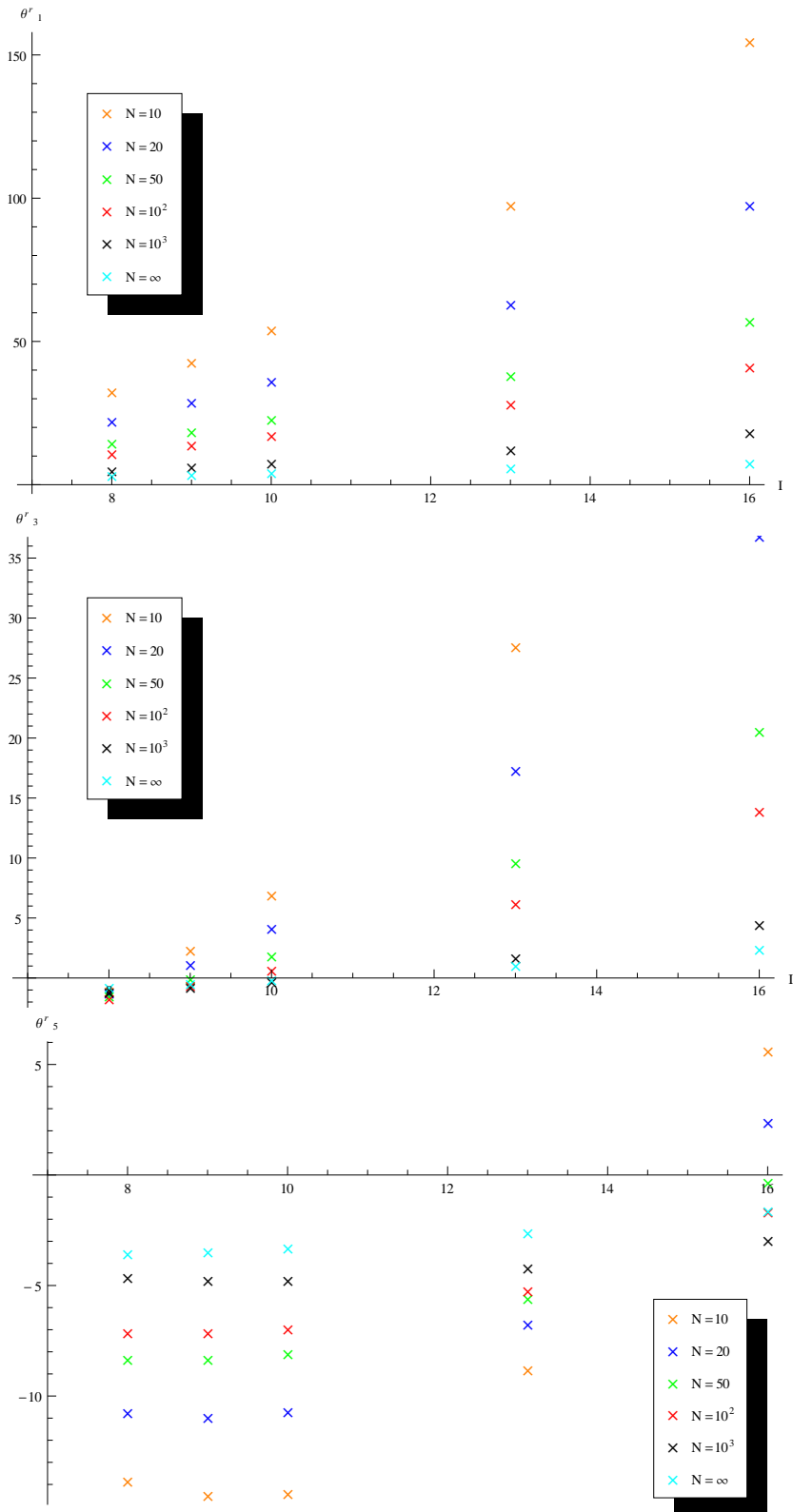


Abbildung 4.8: Erkennbar ist, wie durch eine Erhöhung der Anzahl Feldrichtungen die Werte der kritischen Exponenten  $\theta_r$  geändert werden. Insbesondere werden die relevanten kritischen Exponenten langsam verkleinert. Dieser Prozess ist aber beschränkt, wie wir am Vergleich mit dem Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  sehen, wo offensichtlich sowohl für  $a_{0*}$  größer als auch kleiner  $\sqrt{3}$  bei endlicher Trunkierung relevante Richtungen existieren und auch keine Konvergenz in  $I$  zu erkennen ist. Es zeigt sich auch, wie die Werte von  $\theta$  einen Umkehrpunkt aufweisen.

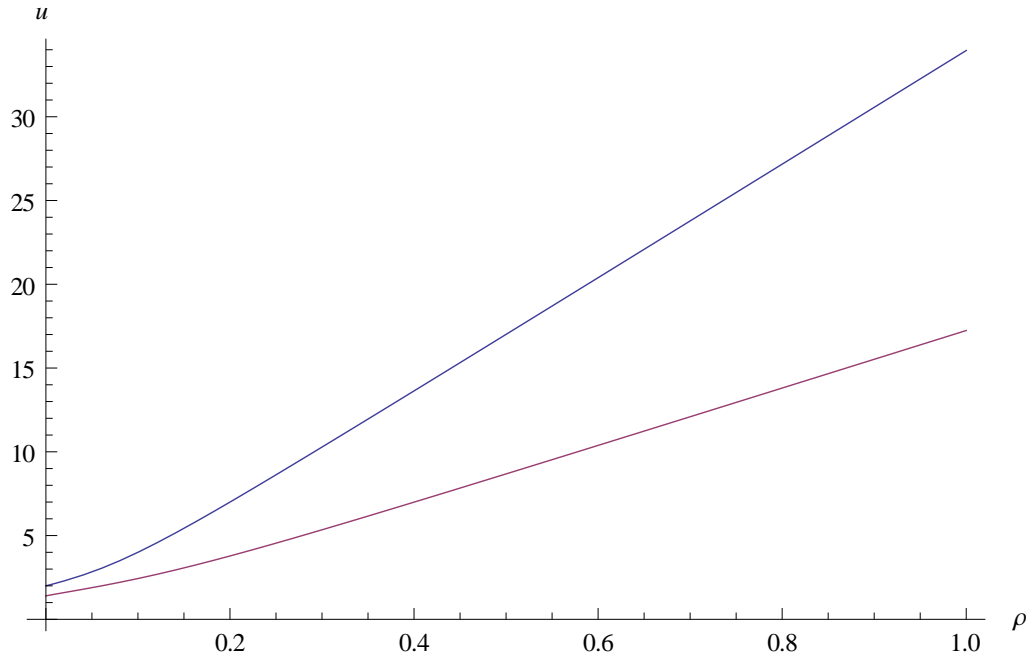


Abbildung 4.9: Zwei numerische Lösung für die Fixpunktgleichung mit einem Startwert  $u_*(0) > 1$  sind angegeben. Die blaue Kurve hat einen Startwert  $a_0 = 2 > \sqrt{3}$ , während die Rote mit  $a_0 = 1.4 < \sqrt{3}$  startet. Dementsprechend unterscheidet sich das Vorzeichen der Krümmung bei  $\varrho = 0$ . Vergleiche hierzu (4.90).

wieder fallen kann, wenn die Stelle  $u' = 0$  durchlaufen wird. Betrachten wir die Funktion an dieser Stelle, so ergibt sich, unter Berücksichtigung der Erkenntnis, dass  $u_*$  an dieser Stelle weiter größer eins ist:

$$0 = -u_* + \frac{1}{N} \frac{u_*^2 - 1}{(u_*^2 + 1)^2} 2\varrho u_*'' \Rightarrow \operatorname{sgn}(u_*'') = \operatorname{sgn}\left(\frac{u_*}{u_*^2 - 1}\right) > 0 \quad (4.91)$$

Schlussfolgern wäre die Krümmung an einer solchen Stelle positiv und der Anstieg würde wieder zunehmen. Damit ist die Funktion  $u_*$  monoton wachsend. Es wird sich für große Feldamplituden eine lineare Beziehung zwischen  $u_*$  und  $\varrho$  einstellen, weil die Brüche in der Fixpunktgleichung jeweils vom Nenner dominiert werden und somit entweder  $u_* \approx$  konstant und somit linear gilt, oder die Brüche vernachlässigbar klein werden.

Die numerische Rechnung zeigt, dass der zweite Fall im Allgemeinen realisiert wird, was mit der zuletzt bewiesenen Aussage, über den Anstieg folgt. Fordern wir, dass  $u$  zweifach stetig differenzierbar sei, so ergibt sich, dass in einer Umgebung der oben betrachteten Stelle schon  $u_*'' > 0$  galt, so dass  $u_*'$  nicht auf null abfallen konnte. Damit ist aber der Anstieg stets positiv. Des weiteren erfordert ein beschränktes  $u_*$  ein prinzipielles Abfallverhalten von  $u_*'$  stärker als  $\frac{1}{\varrho}$  und somit wird im Grenzwert großer Amplituden die Gleichung (4.91) realisiert. In diesem Regime ist die Krümmung positiv und bewirkt ein Wachstum von  $u'$ , was im Gegensatz zum Abklingverhalten steht. Wir schließen, dass unser Potenzial nicht konstant wird, sondern weiter monoton wächst. Dieses Verhalten erwarten wir immer, sobald die Funktion einmal einen Funktionswert größer eins angenommen hat. Es gilt also

$$|u_*(\varrho_1)| = c > 1, \operatorname{sgn}(u_*(\varrho_1)) = \operatorname{sgn}(u_*'(\varrho_1)) \Rightarrow \forall \varrho > \varrho_1 \exists u_* \text{ monoton,} \quad (4.92)$$

Hierbei ist  $u_*$  eine zusammenhängende Lösung der Fixpunktgleichung. Wir haben die Symmetrie  $u \rightarrow -u$  in unserer Notation einbezogen. Diese Erkenntnisse sind, wie bereits erwähnt, auch auf die Lösungen der ungebrochenen Phase anwendbar.

$0 < a_{0*} < 1$  Ein ähnliches Verhalten der kritischen Exponenten ergibt sich auch im Fall einer Lösung, deren Absolutwert bei  $\varrho = 0$  kleiner als eins ist. Wir wollen diesen Fall aber aus einer anderen Perspektive betrachten. Bekannt ist, dass die Differenzialgleichung an der Stelle

$$F := 1 - (u_* + 2\varrho u'_*)^2 = 0 \quad (4.93)$$

einen singulären Punkt besitzt. An der Stelle  $\varrho = 0$  und im betrachteten Fall  $|u_{0*}| < 1$  ist  $F$  offensichtlich positiv. Gehen wir zu großen  $\varrho$  über, so muss entweder  $u'_*$  verschwinden oder die Funktion  $F$  hat eine Nullstelle.

Betrachten wir den Fall eines verschwindenden Anstieges. Aufgrund der Erkenntnisse die wir für den Fall  $u_* > 1$  gewonnen haben, muss  $u_*$  gegen null streben. Es gilt aber weiterhin die Relation folgend aus (4.91), modifiziert um den Term  $\varrho u'_*$

$$u_*'' = N \frac{u_* - \varrho u'_*}{2\varrho} \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)^2} \Rightarrow u_*'' \approx -C \frac{u_*}{\varrho} \Rightarrow u. \quad (4.94)$$

Die Lösung obiger Differenzialgleichung ist aber

$$u_* = c_1\varrho + c_2\varrho \left( C \int_{-\infty}^{C\varrho} \frac{e^t}{t} dt - \frac{e^{C\varrho}}{\varrho} \right) \quad (4.95)$$

eine im nichttrivialen Fall unbeschränkte Funktion, die für große  $\varrho$  divergiert. Damit schließen wir aus, dass die Funktion  $F$  rein positiv ist.

Es verbleibt der Fall, dass  $F$  eine Nullstelle aufweist. Damit muss an diesem Punkt die Differentialgleichung

$$0 \stackrel{!}{=} -u_* + \varrho u'_* - \frac{N-1}{N} \frac{1-u_*^2}{(1+u_*^2)^2} u'_* =: G \quad (4.96)$$

erfüllt sein. Dies folgt aus der Forderung, dass  $u_*$  an allen Stellen stetig sein soll. Dazu betrachten wir die Differenzialgleichung als eine Gleichung im Raum  $S'(\mathbb{R})$ , dem dualen Raum der temperierten Funktionen. Fordern wir, dass  $(3u'_* + 2\varrho u_*'')F$  nicht verschwinden soll, so muss sich  $u_*''$  an dieser Stelle wie eine Ableitung einer Delta Distribution verhalten. Es ergibt sich ein Verhalten von  $u'_*$  wie eine Delta Distribution und eine unstetige Funktion  $u_*$ . Das Vorkommen der Funktion  $u'_*$  in  $F$  lässt dieses Vorgehen allerdings scheitern, da das Quadrat einer Delta Distribution nicht sinnvoll definiert ist. Eine Alternative ist ein Verhalten von  $u_*''$  an der Stelle  $\varrho_n$  mit  $F(\varrho_n) = 0$  wie  $c|\varrho - \varrho_n|^{-\frac{1}{2}}$ . Denn damit ergibt sich im linksseitigen Grenzwert an dieser Stelle als nicht verschwindender Beitrag:

$$F u_*'' = (0 + 2u_*\varrho c(\varrho_n - \varrho)^{\frac{1}{2}})c(\varrho_n - \varrho)^{-\frac{1}{2}} = 2c^2\varrho > 0 \quad (4.97)$$

Hätten wir einen anderen Exponenten als  $-\frac{1}{2}$  für die Entwicklung im Punkt  $\varrho_n$  gewählt, so hätten wir entweder eine Divergenz oder ein Verschwinden des Terms. Wir wissen aber aus der numerischen Integration 4.10, dass  $G < 0$  im linksseitigen Grenzwert ist. Dabei haben wir vom Punkt  $(0, a_{0*})$ ,  $a_{0*} < 1$  der  $\varrho, u_*$  Ebene zu größer werdenden  $\varrho$  die Lösung entwickelt. Die gesamte Differenzialgleichung wird somit erneut nicht erfüllt, denn an der Stelle  $\varrho = \varrho_n$  im linksseitigen Grenzwert gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} G - \frac{F u_*''}{2} < 0 \quad (4.98)$$

Wir stellen fest, dass die Forderung nach einer regulären Lösung auf ein Ende des Lösungszweiges führt. Damit existiert für alle  $N > 1$  keine Lösung, die für alle  $\varrho \geq 0$  existiert und

eine Nullstelle aufweist. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass der rechtsseitige Grenzwert das entgegengesetzte Vorzeichen im Term  $Fu''_*$  aufweist. Damit würde auch ein positiver Wert von  $G$  ausgeschlossen werden. Damit folgt wieder, dass  $G$  an der Nullstelle von  $F$  auch verschwinden muss. Dann kann  $u''_*$  regulär gewählt werden. Die Forderung, dass  $u''_*$  links- und rechtsseitig sich stetig der singulären Stelle annähert, wird erfüllt, weil es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt.

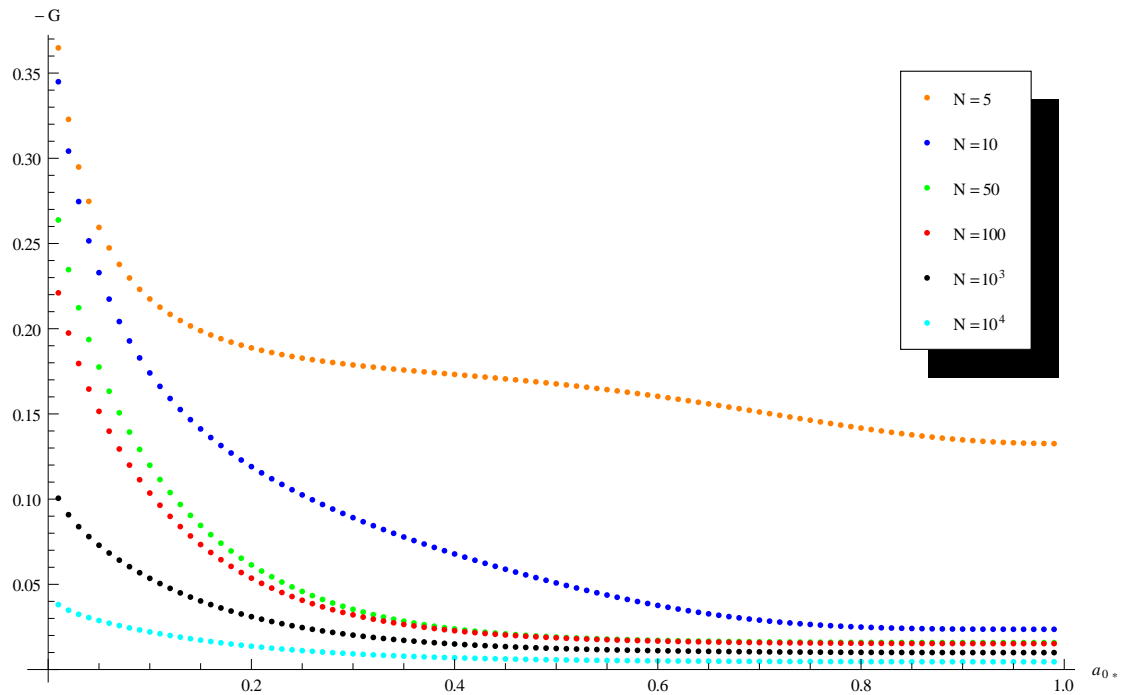


Abbildung 4.10: Wir sehen für verschiedene  $N$  den Funktionswert von  $-G$  an einer Stelle, an der die numerische Integration stoppt.

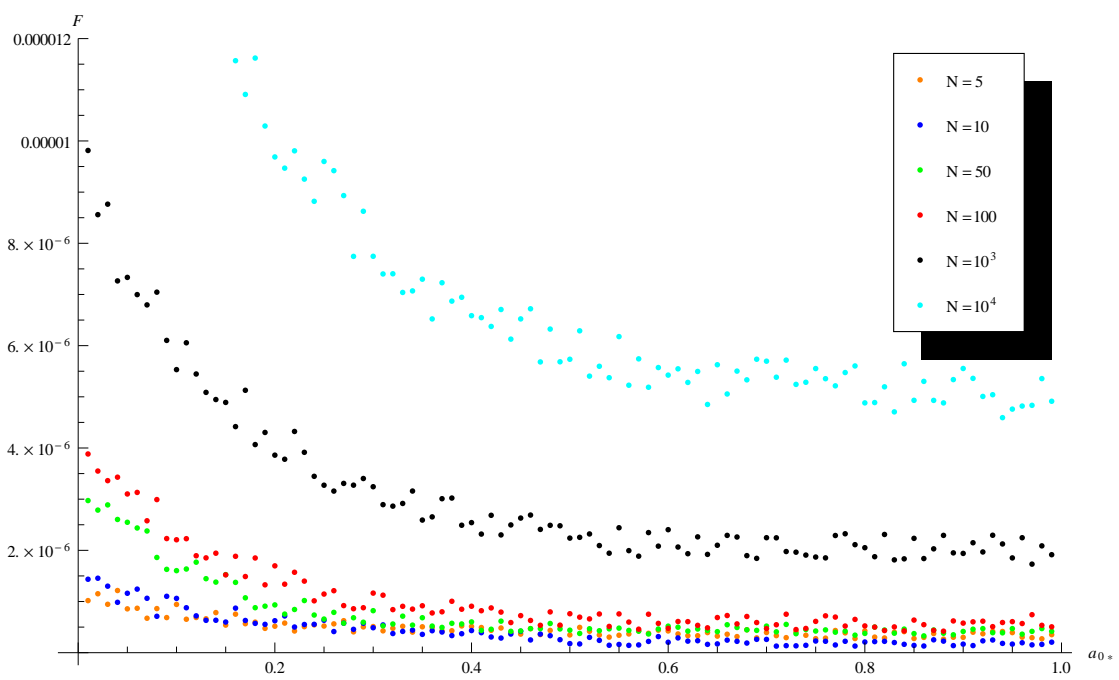


Abbildung 4.11: Aufgetragen ist jeweils  $F$  an Stellen an denen die Integration anhält. Vergleichen wir mit Abbildung 4.10, sehen wir deutlich kleinere Werte, sodass die Krümmung divergiert. Dabei beachte man, dass  $u''_*$  mit  $N$  skaliert.

## 5 Zusammenfassung

Wir wollen abschließend die Ergebnisse der Arbeit zusammentragen. Die Herleitung der Flussgleichung hat folgende dimensionslose Flussgleichung ergeben:

$$\partial_t u = -u(1 - \eta) + \varrho u'(1 + \eta) + \sum_{a=1}^N \int_0^\infty dp p^2 2\dot{r}(p) \frac{(w_{aa}^2 - p^2 g_{aa}^2) w'_{aa} + 2p^2 g_{aa} w_{aa} y \delta_{a1}}{N(w_{aa}^2 + p^2 g_{aa}^2)^2} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \eta = & 2 \int_0^\infty dp p^2 \varrho \dot{r} \left[ \frac{-g_{22} w_{11}^2 v_{12}^2 + p^2 g_{22} [g_{11}^2 v_{12}^2 - 4g_{11} v_{12} w_{11} y + w_{11}^2 y^2] - p^4 g_{11}^2 g_{22} y^2}{N(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2)^2 (w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)} \right. \\ & \left. + \frac{-g_{11} w_{22}^2 v_{12}^2 - 2v_{12} w_{11} w_{22} y + p^2 [g_{11} g_{22}^2 v_{12}^2 - 2g_{22}^2 v_{21} w_{11} y + g_{11} w_{22}^2 y^2] - p^4 g_{11} g_{22}^2 y^2}{N(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2)(w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)^2} \right] \\ & + \frac{2}{N} \int_0^\infty dp p^2 \dot{r} y \frac{-w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2}{(w_{22}^2 + p^2 g_{22}^2)^2} \quad (5.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} = & 2 \sum_{a=1}^N \int_0^\infty dp p^2 \rho \dot{r} \frac{1}{N(1 + \varrho y)(w_{aa}^2 + p^2 g_{aa}^2)^3} [-g_{aa} v_{aa}^2 w_{aa}^2 + 2v_{1a} w_{1a}^3 y + 2v_{aa} w_{aa}^3 y \\ & + [g_{aa}^3 v_{aa}^2 - 6g_{1a}^2 v_{1a} w_{1a} y + 18g_{1a} w_{1a}^2 y^2 - 6g_{aa}^2 v_{aa} w_{aa} y] p^2 - 6g_{1a}^3 y^2 p^4] \\ & + \frac{2}{N} \int_0^\infty dp p^2 \dot{r} y \frac{-w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2}{(w_{11}^2 + p^2 g_{11}^2)^2 (1 + \varrho y)} \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$w_{aa} = u + 2\varrho u' \delta_{a1} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} v_{ab} = & 4u'' \varrho \delta_{a1} \delta_{b1} \delta_{c1} + 2u' (\delta_{bc} \delta_{a1} + \delta_{ac} \delta_{b1} + \delta_{ab} \delta_{c1}) \\ = & \begin{cases} 2u' (\delta_{a1} \delta_{b2} + \delta_{a2} \delta_{b1}), & \text{Goldstone Mode} \\ (4u'' \varrho + 4u') \delta_{a1} \delta_{b1} + 2u' \delta_{ab}, & \text{Radiale Mode} \end{cases} \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$g_{aa} = 1 + r + y \varrho \delta_{a1} \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

In der weiteren Betrachtung wurden  $\eta$  und  $\tilde{\eta}$  Null gesetzt und somit die LPA betrachtet. Die Wahl des optimierten Regulators führte auf die Flussgleichung (4.9). Ausgehend von dieser wurde eine Lösung mit einer relevanten Richtung gefunden, von der gezeigt werden konnte, dass ihre Existenz regulatorunabhängig ist. Folgende kritische Exponenten konnten extrahiert werden:

$$\theta_i = (1 - i) - \frac{(i + 1)i}{6} \left( \sqrt{\frac{17 + N}{N - 1}} - 1 \right) \quad (5.8)$$

Diese gehören zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung zwischen der Phase der spontan gebrochenen Symmetrie und der Phase der erhaltenen  $O(N)$  Symmetrie. Das dimensionslose Fixpunktpotenzial existiert dabei nicht für alle  $\varrho > 0$ , sondern erst ab einem gewissen Mindestwert in  $\varrho$ . Es ist zu beachten, dass unabhängig von  $N$  der nullte kritische Exponent zu eins fixiert ist.

Des Weiteren existiert eine zweite Lösung mit zwei relevanten Richtungen, die aber für eine kleine Anzahl an Feldrichtungen nicht stabil in der Trunkierung ist. In LPA war das Existenzintervall des Fixpunktpotenzials dieser Lösungsklasse in dimensionsbehafteten Größen und dem Grenzwert  $k \rightarrow 0$  verschwindend. In dieser Familie von Lösungen ist die nullte Kopplung nicht unabhängig von  $N$ , sondern wächst mit der Zahl der Feldrichtungen. Zudem

wurde festgestellt, dass die Gaußsche Lösung über mindestens zwei relevante Richtungen verfügt. Beide Lösungen sind in einem nachfolgendem Schritt unter Berücksichtigung der anomalen Dimension zu untersuchen. Bisherige Analysen zeigen einen wesentlichen Einfluss auf die Kopplungen im Fall einer relevanten Richtung. Dies wird Gegenstand weiterer Forschung sein.

Es wurde zusätzlich eine Entwicklung an der Stelle  $\varrho = 0$  durchgeführt. Dabei zeigte sich, dass eine Lösung die global existiert nur im Fall  $|u_*(0)| > 1$  zu finden war. Diese Potentiale hatten in einer polynomiellen Entwicklung in verschiedenen Trunkierungen eine sehr schlechte Konvergenz der kritischen Exponenten. Im Fall  $|u_*(0) < 1|$  zeigte sich erneut ein verschwindendes Existenzintervall.



## 6 Symbolverzeichnis

An dieser Stelle sind die Symbole der Kapitel  $\tilde{A}_4^1$  über die Herleitung der Flussgleichung und die Untersuchung der Fixpunktstruktur zusammengefasst. Symbole aus den theoretischen Grundlagen sind sofern hier nicht aufgeführt bei ihrer Verwendung in den jeweiligen Abschnitten erklärt.

Symbol	Bedeutung	Definition
$a_i$	Die Kopplungen des Polynomansatzes	(4.2)
$D$	Die superkovariante Ableitung	(2.92)
$\mathcal{G}$	Die Menge der Grassmannzahlen	
$K$	Der Ableitungsoperator im Superraum	(2.94)
$\mathcal{L}$	Die Lagrangedichte	(2.95)
$F$	Der Hilfsfeld Anteil des betrachteten Superfeldes	-
$O(N)$	Gruppe der Drehspiegelungen	
$p$	Der Betrag von $q$	$p =  q $
$q$	Der d-dimensionale Impuls	-
$\not{q}$	Speziell Kontrahiertes $q$	$\not{q} = q^\mu \gamma_\mu$
$R_k(q)$	Der Regulator	(2.121)
$r_1$	Eine Komponente des Regulators	-
$r_2$	Eine Komponente des Regulators	-
$r$	Das dimensionslose $r_2$	-
$\tau_i$	Verschiedene dimensionslose Regulatoren	(4.54)
$S[\cdot]$	Die Wirkung nach Wickrotation ( $S_e[\cdot]$ )	(2.54)
$S$	Die Stabilitätsmatrix	(2.130)
$U$	Das Superpotenzial	-
$u$	Das dimensionslose Potenzial	(3.98)
$x$	Die d-dimensionale Raumzeitkoordinate	-
$Y$	Der radiale Wellenfunktionsrenormierungsanteil	-
$y$	Das dimensionslose $Y$	(3.101)
$Z[J]$	Die Zustandssumme mit Quellen $J_e$	(2.55)
$Z$	Die Wellenfunktionsrenormierung	-
$\tilde{Z}$	Die radiale Wellenfunktionsrenormierung	-
$\eta$	Die anomale Dimension	(3.99)
$\tilde{\eta}$	Die radiale anomale Dimension	(3.100)
$\gamma_\mu$	Die Gamma Matrizen	(2.37), (2.38),(2.56)
$\Gamma_k[\phi]$	Die gemittelte effektive Mittelwertwirkung	(2.112),(2.120)
$\phi$	Das gemittelte Superfeld	(2.113)
$\varphi$	Der bosonische Anteil des betrachteten Superfeldes	-
$\psi$	Der fermionische Anteil des betrachteten Superfeldes	-
$\bar{\psi}$	Der dirackonjugierte Spinor von $\psi$	(2.40)
$\theta$	Der Grassmannspinor des betrachteten Superfeldes	-
$\theta_i$	Die kritischen Exponenten	(2.133)
$\rho$	Ein Maß für die Feldamplitude	(2.95),(3.2)
$\varrho$	Das dimensionslose $\rho$	(3.97)
$\varrho_0$	Der Entwicklungspunkt der ungebrochenen Phase	-
$\delta_{..}$	Das Kronecker Symbol	-
$\delta(\cdot)$	Die Delta Distribution	-
$\delta.$	Eine Ableitung nach $\cdot$	-
$\delta\phi$	Der Variationsanteil des Feldes	-
$(\cdot)_*$	Zur Fixpunktlösung gehörendes $\cdot$	-

$(\cdot)'$	Eine Ableitung nach $\rho, \varrho$	-
$(\dot{\cdot})$	Eine Ableitung nach $t$	-

Tabelle 6.1: Symbolverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

4.1	Extrapolation Konvergenzradius . . . . .	44
4.2	Vergleich polynomielle und numerische Lösung . . . . .	45
4.3	Lösung $\varrho(u)$ . . . . .	45
4.4	Divergenz der Kopplungen in $N$ . . . . .	47
4.5	Kritische Exponenten bei zwei relevanten Richtungen . . . . .	48
4.6	Lösung mit zwei relevanten Richtungen . . . . .	49
4.7	Integralfunktion der Regulatoren $\tau_n$ . . . . .	53
4.8	Kritische Exponenten für $u_*(0) > 1$ . . . . .	58
4.9	Numerische Lösungen für $u_*(0) > 1$ . . . . .	59
4.10	Untersuchung singulärer Punkt 1. . . . .	61
4.11	Untersuchung singulärer Punkt 2. . . . .	62

## Tabellenverzeichnis

4.1	Konvergenzradien exakte Lösung . . . . .	43
4.2	Verschiedene Lösungen für fixiertes $I$ und $N$ . . . . .	46
4.3	Konvergenz zu $I = 12$ bei $N = 3$ . . . . .	48
4.4	Lösung für die Lösung mit einer relevante Richtung bei einem anderen Regulator . . . . .	54
4.5	Kritische Exponenten für die Lösung mit einer relevante Richtung bei einem anderen Regulator . . . . .	55
4.6	Laufen kritischer Exponenten bei $u_*(0) > 1$ . . . . .	57
6.1	Symbolverzeichnis . . . . .	66

## Literatur

- [1] Litim, Daniel F.; Mastaler, Marianne; C.,Synatschke-Czerwonka, Franziska; Wipf, Andreas: “Critical behavior of supersymmetric  $O(N)$  models in the large- $N$  limit ” (Artikel), arxiv:1107.3011v1 [hep-th] 15. Jul 2011
- [2] Synatschke, Franziska; Braun, Jens; Wipf, Andreas: “ $\mathcal{N}$  Wess Zumino Model in  $d = 3$  at zero and finite temperature” (Artikel), arxiv:1107.3011v1 [hep-th] 15. Jul 2011
- [3] Chen, Jin-Quan: “Group Representation Theory for Physicists”, Singapore; World Scientific Publishing, 1989
- [4] Zeidler, Eberhard: “Quantum Field Theory I”, Basics in Mathematics and Physics, 2. Auflage, Berlin Heidelberg; Springer Verlag, 2009
- [5] Wipf, Andreas: “Supersymmetry: Poincaré groups and algebras” (pdf-Datei). Internet:  
<http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lectures/susy/susy3.ps.gz> (Zugriff: 30.07.2012, 15.28 MESZ).
- [6] Wipf, Andreas: “Supersymmetry: Spinors” (pdf-Datei). Internet:  
<http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lectures/susy/susy4.ps.gz> (Zugriff: 31.07.2012, 16.33 MESZ).
- [7] Weinberg, Steven: “The Quantum Theory of Fields”, Taschenbuchauflage, Cambridge; Cambridge University Press, 2005
- [8] Wipf, Andreas: “Supersymmetry: Birth of Supersymmetry” (pdf-Datei). Internet: <http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lectures/susyalt/susy2.ps.gz> (Zugriff: 31.07.2012, 16.46 MESZ).
- [9] Berges, Jürgen; Tetradis, Nikolaos; Wetterich, Christof: “Non-Pertubative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics” (Artikel), arXiv:hep-ph/0005122v1 12 May 2000
- [10] Wetterich, Christof: “The average action for scalar fields near phase transitions ”(Artikel), Z.Phys C57,451-469 (1993)
- [11] Heilmann, M; Litim, D.F.; Synatschke-Czerwonka, F.; Wipf, A.: “Phases of supersymmetric  $O(N)$  theories” (Artikel), arxiv:1208.5389v1 [hep-th] 27. Aug 2012
- [12] Bohr,0 ; Schaefer, B.-J.; Wambach, J: “Renormalization Group Flow Equations and the Phase Transition in  $O(N)$ -models” (Artikel),

## Danksagung

Ich möchte an erster Stelle Professor Andreas Wipf dafür danken mir die Bearbeitung dieses Themas ermöglicht zu haben. Dank Ihm und Marianne Heilmann sind in umfangreichen Diskussionen viele Ideen dieser Arbeit entstanden.

Weiterer Dank gebührt meinen Bürokollegen René Sondenheimer und Stefan Lippoldt, die wertvolle Hinweise zu manchen Ideen lieferten.

Meinen Eltern, die mich während meines gesamten Studiums unterstützten und auch im speziellen diese Arbeit durch die Bereitschaft zum Korrekturlesen um manchen Fehler brachten, wie auch meiner Schwester Karin und meinem Schwager Andreas möchte ich an dieser Stelle Dank sagen.

## Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort, Abgabedatum

Unterschrift des Verfasser

Seitens des Verfasser bestehen keine Einwände, die vorliegende Masterarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Ort, Abgabedatum

Unterschrift des Verfasser