



FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

INHOMOGENE KONDENSATE IM GROSS-NEVEU-MODELL

Theoretisch-Physikalisches Institut
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Tobias Bruschke

geboren am 05.02.2001 in Torgau

September 2022

Erstprüfer: Prof. Dr. Andreas Wipf
Zweitprüfer: M. Sc. Michael Mandl

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Grundlagen	5
1.1 Relativistische Wellenmechanik und Quantenfeldtheorie	5
1.2 Das GROSS-NEVEU-Modell	6
1.3 Regularisierung und Renormierung	8
1.4 Symmetrien und spontane Symmetriebrechung	8
2 Homogene Kondensate	10
2.1 Behandlung der fermionischen Determinante	10
2.2 Regularisierung mittels ζ -Funktion	11
2.3 Berechnung des effektiven Potentials homogener Kondensate	15
2.3.1 Fall $d=2$	16
2.3.2 Fall $d=3$	18
3 Inhomogene Kondensate	20
3.1 Inhomogene Kondensate in 1+1 Dimensionen	20
3.2 Inhomogene Kondensate in 2+1 Dimensionen	26
3.3 Stabilitätsanalyse der homogenen Potentialminima	30
3.3.1 Inhomogene Variation in 1+1 Dimensionen	35
3.3.2 Inhomogene Variation in 2+1 Dimensionen	41
3.4 Globale Approximation der Potentialvariation in 1+1 Dimensionen	45
3.4.1 Formulierung des Ansatzes mittels ADPT	45
3.4.2 Berechnung eines globalen Ausdruckes für die Potentialvariation	47
Zusammenfassung und Ausblick	52
A Anhang	54
B Abbildungsverzeichnis	68
C Literaturverzeichnis	69

Einleitung

Beim GROSS-NEVEU-Modell (GN) handelt es sich um eine 4-FERMI-Theorie, die 1974 in [1] ursprünglich eingeführt wurde, um spontane Symmetriebrechung zu untersuchen. Das dort behandelte Modell in $1 + 1$ Dimensionen ist unter anderem wegen seinen Ähnlichkeiten zur Quantenchromodynamik (QCD) interessant, einer Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung. Dazu gehören Renormierbarkeit, asymptotische Freiheit oder spontane Brechung chiraler Symmetrie. Während analytische und numerische Behandlungen in der QCD relativ aufwendig sind, ist es oft instruktiv, einfachere Modelle wie das GN-Modell oder andere 4-FERMI-Theorien zu untersuchen, die ähnliche Eigenschaften z.B. im Hinblick auf die vorhandenen Symmetrien besitzen. Neben dieser Anwendung der 4-FERMI-Theorien als sogenannte Toy-Modelle für QCD zeigen sich auch Anwendungen in der Festkörperphysik [2, 3, 4].

Betrachtet man den als „large- N_f -Limes“ bezeichneten Grenzfall unendlich vieler Fermionen-Flavors, so ergeben sich in $1 + 1$ Dimensionen bei verschwindender Fermionenmasse abhängig von Dichte und Temperatur 2 Phasen mit räumlich homogenen Grundzuständen der Theorie: eine chiral symmetrische Phase und eine Phase, in der chirale Symmetrie spontan gebrochen ist [5]. Zusätzlich tritt für kleine Temperaturen und große Dichten eine Phase räumlich inhomogener Grundzustände auf [6]. Diese inhomogenen Phasen treten sowohl bei endlicher Flavorzahl [7] als auch in anderen Modellen auf [8]. Sie haben erneut in der Festkörperphysik große Bedeutung, zum Beispiel für die Beschreibung von Phänomenen der Supraleitung [9, 10].

Untersuchungen des GN-Modells in $2 + 1$ Dimensionen mit Methoden der Gitterfeldtheorie ergaben ebenfalls Hinweise auf die Existenz inhomogener Phasen [11], die jedoch von der genutzten Regularisierungsmethode abhängig ist und bei Entfernung des Regulators bzw. Extrapolation zum Kontinuums-Limes verschwindet [12, 13].

Diese Arbeit befasst sich mit der Untersuchung inhomogener Grundzustände des GN-Modells in $1 + 1$ und $2 + 1$ Dimensionen. Dabei wird nach einer kurzen Zusammenfassung der nötigen Grundlagen und relevanten Größen in Kapitel 1 analytisch in Kapitel 2 ein bereits regularisierter und renormierter Ausdruck für die effektive Wirkung im Grenzwert unendlich vieler Fermionen hergeleitet und zunächst auf homogene Kondensate spezifiziert. Das Phasendiagramm in der $\mu - T$ -Ebene wird mittels eindimensionaler numerischer Minimierung berechnet. Die Verallgemeinerung auf inhomogene Kondensate erfolgt dann in Kapitel 3. Zum einen benutzen wir erneut numerische Minimierungsverfahren für die Detektion möglicher inhomogener Phasen, zum anderen suchen wir mithilfe von störungstheoretischen Ansätzen analytische Argumente für die Existenz bzw. Nicht-Existenz inhomogener Phasen in bestimmten Bereichen der $\mu - T$ -Ebene.

1 Grundlagen

In dieser Arbeit nutzen wir natürliche Einheiten, $\hbar = c = k_B = 1$. Wir benutzen konventionsgemäß lateinische Buchstaben für Indices der Raumkoordinaten und nehmen implizit Summation über doppelt auftretende Indices an. Die vorgestellten Grundlagen stammen, falls nicht explizit anders referenziert, aus [14, 15, 16, 17].

1.1 Relativistische Wellenmechanik und Quantenfeldtheorie

Eine Quantenfeldtheorie dient der Beschreibung von Elementarteilchen, die durch Felder $\psi(t, \mathbf{x})$ in der Raumzeit ausgedrückt werden und unter einer die Theorie charakterisierenden LAGRANGE-Dichte $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ wechselwirken. Das Raumzeitintegral über die LAGRANGE-Dichte

$$S[\psi] = \int d^d x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad (1.1)$$

bezeichnet man als Wirkung. Die Entwicklung der Felder in Raum und Zeit wird dann, wie beispielsweise für Teilchen in der klassischen Mechanik, durch das Prinzip extremaler Wirkung beschrieben und führt auf die EULER-LAGRANGE-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.2)$$

die als Differentialgleichungen bei gegebenen Anfangsbedingungen das Feld $\psi(t, \mathbf{x})$ bestimmen. Um physikalische Eigenschaften eines System zu beschreiben, interessieren im Allgemeinen die Erwartungswerte bestimmter Observablen der Felder. Im sogenannten Pfadintegralformalismus wird der Erwartungswert einer Observable \mathcal{O} auf dem beschriebenen System über eine gewichtete Summe möglicher Feldkonfigurationen

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{O}[\psi] e^{iS[\psi]} \quad (1.3)$$

definiert. Die als Zustandssumme bezeichnete Normierungskonstante

$$Z = \int \mathcal{D}\psi e^{iS[\psi]} \quad \text{bzw.} \quad Z = \int \mathcal{D}\psi e^{-S_E[\psi]} \quad (1.4)$$

ist deshalb von besonderem Interesse, um eben solche Erwartungswerte und weitere thermodynamische Größen berechnen zu können. Wir haben hier die euklidische Wirkung S_E eingeführt, die aus der im MINKOWSKI-Raum definierten Wirkung durch die als WICK-Rotation bezeichnete Ersetzung der Zeitvariable $t \rightarrow i\tau$ und entsprechender analytischer Fortsetzung der Wirkung zu imaginären Zeiten gewonnen werden kann. Die Durchführung der WICK-Rotation ermöglicht es, durch die Einführung von Randbedingungen entlang der Zeitachse mit Ausdehnung $\Delta\tau = \beta$ eine

effektive Temperatur $T = \frac{1}{\beta}$ zu definieren. Die euklidische Wirkung übernimmt dann die Rolle eines klassischen Hamiltonoperators und die Formulierung der Zustandssumme ist in Analogie zur Definition aus der Thermodynamik

$$Z = \text{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right) \quad (1.5)$$

zu verstehen.

1.2 Das Gross-Neveu-Modell

Beim GROSS-NEVEU-Modell, vorgestellt in [1], handelt es sich um eine relativistische Quantenfeldtheorie zur Beschreibung von Fermionen mit LAGRANGE-Dichte

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \frac{g^2}{2N_f}(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (1.6)$$

mit einem der Kopplungsstärke der Wechselwirkung entsprechenden Parameter g^2 . Die Fermionen werden durch die als unabhängig voneinander betrachteten Spinorfelder ψ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ beschrieben. Während etwa Teilchen mit Spin 1 unter LORENTZ-Transformationen wie Vektoren transformieren und deshalb durch solche beschrieben werden, transformieren die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen beschreibenden Spinorfelder unter zu den entsprechenden LORENTZ-Transformationen Λ gehörenden Elementen $S(\Lambda)$ der Spingruppe und unterscheiden sich damit von normalen 4-Vektoren. Es sei angemerkt, dass $\bar{\psi}\psi$ im Gegensatz zu $\psi^\dagger\psi$ ein LORENTZ-Skalar ist. Irreduzible Darstellungen der Spingruppe sind in d Raumzeitdimensionen $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -dimensional, weshalb es für unsere Zwecke genügt, sich die Spinoren als Elemente eines komplexen $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -dimensionalen Vektorraumes vorzustellen. Genau genommen enthält in der oben genutzten Notation die Variable ψ nicht nur einen, sondern N_f solcher Spinoren, die man als verschiedene Flavors bezeichnet, also $\psi = (\psi_a)_{a=1}^{N_f}$. Die Notwendigkeit der Einführung der Spinoren folgt aus dem Versuch, eine zur SCHRÖDINGER-Gleichung analoge Gleichung für die Beschreibung von Quantenmaterie einzuführen, die die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllt sowie eine Linearkombination der ersten Ableitungen nach Raum- und Zeitkoordinaten darstellt. Die gesuchte Gleichung ist die DIRAC-Gleichung

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (1.7)$$

mit dem bereits in (1.6) auftretenden DIRAC-Operator $i\cancel{\partial} - m$, der hier zur Kompaktheit die FEYNMAN-Slash-Notation $\cancel{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ nutzt. Neben den Spinoreigenschaften des Feldes ψ benötigt man zum Aufstellen dieser Gleichung die $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \times 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -dimensionalen γ -Matrizen. Deren definierende Eigenschaft ist die Erfüllung der als CLIFFORD-Algebra bezeichneten Antikommutationsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (1.8)$$

Der in den Fermionen quartische Term $(\bar{\psi}\psi)^2$ in (1.6) sorgt für die Zuordnung des GROSS-NEVEU-Modells zu den 4-FERMI-Theorien. Er ist allgemein analytisch und numerisch schwer zu handhaben, weshalb man Abhilfe z.B. durch die Durchführung der HUBBARD-STRATONOVICH-

Transformation sucht, hier basierend auf [18]. Diese bedient sich der Gleichung

$$\int \mathcal{D}\sigma \exp\left(-\frac{N_f}{2g^2}\sigma^2 - \sigma\bar{\psi}\psi\right) = \exp\left(\frac{g^2}{2N_f}(\bar{\psi}\psi)^2\right), \quad (1.9)$$

für ein Hilfsfeld $\sigma(x)$ und kann als GAUSSSCHE Integral verstanden werden, wobei ein irrelevanter Vorfaktor unterdrückt wurde. Einsetzen von (1.6) in die Definition von (1.4) im MINKOWSKI-Raum, Durchführung der WICK-Rotation und anschließender HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation liefert

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma \exp\left(-\int d^d x \left(\bar{\psi}\mathcal{D}_{N_f}\psi + \frac{N_f}{2g^2}\sigma^2\right)\right) \quad (1.10)$$

$$= \int \mathcal{D}\sigma (\det \mathcal{D})^{N_f} \exp\left(-\frac{N_f}{2g^2} \int d^d x \sigma^2\right) \quad (1.11)$$

$$= \int \mathcal{D}\sigma \exp\left(-N_f \left[\frac{1}{2g^2} \int d^d x \sigma^2 - \ln \det \mathcal{D}\right]\right). \quad (1.12)$$

Wir haben zur Durchführung des Integrals über die fermionischen Felder das GAUSSSCHE Integral

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi}\mathcal{D}\psi} = \det \mathcal{D} \quad (1.13)$$

genutzt, zum Beispiel nachzulesen in [19]. Die Notation $\mathcal{D}_{N_f} \equiv \mathcal{D} \otimes \mathbb{1}_{N_f}$ soll verdeutlichen, dass der Operator \mathcal{D} separat auf alle Flavorkomponenten ψ_a von ψ wirkt. \mathcal{D} ist nach dieser Prozedur gegeben durch $\mathcal{D} = \not{\partial} + \sigma$ bzw. $\mathcal{D} = \not{\partial} + \sigma + \mu\gamma^0$, wenn zusätzlich noch der Einfluss eines chemischen Potentials μ berücksichtigt werden soll. Weiterhin haben wir die Masse m auf 0 gesetzt, um die in Abschnitt 1.4 thematisierte chirale Symmetrie nicht explizit zu brechen. Nach der WICK-Rotation ist als Metrik $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ zu verwenden und wir können alle γ -Matrizen hermitesch wählen. Anhand des Ausdrucks (1.10) sehen wir, dass wir die LAGRANGE-Dichte des GROSS-NEVEU-Modells effektiv umschreiben konnten in

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\not{\partial} + \mu\gamma^0 + \sigma) \psi + \frac{N_f}{2g^2}\sigma^2. \quad (1.14)$$

Die sich aus dieser LAGRANGE-Dichte ergebenden EULER-LAGRANGE-Gleichungen für das Feld $\sigma(x)$ erlauben bis auf einen Vorfaktor von der WICK-Rotation die Rückgewinnung des ursprünglichen Ausdrucks (1.6) sowie die Identifikation

$$\sigma = -\frac{g^2}{N_f}\bar{\psi}\psi \quad \text{bzw.} \quad \langle \sigma \rangle = -\frac{g^2}{N_f}\bar{\psi}\psi. \quad (1.15)$$

Im Grenzfall $N_f \rightarrow \infty$ gilt für die Zustandssumme (1.12) die Sattelpunktsnäherung. Das bedeutet, in der Zustandssumme tragen nur solche Feldkonfigurationen bei, bei denen der Exponent maximal wird und die somit am geringsten unterdrückt werden. Wir erhalten

$$S_{\text{eff}} := \frac{1}{N_f} \ln Z \xrightarrow{N_f \rightarrow \infty} -\min_{\sigma(x)} \left\{ \frac{1}{2g^2} \int d^d x \sigma^2 - \ln \det (\not{\partial} + \sigma + \mu\gamma^0) \right\}. \quad (1.16)$$

Ziel dieser Arbeit wird es also sein, diese sogenannte effektive Wirkung S_{eff} anhand des Minimums des vom Feld $\sigma(x)$ abhängigen Ausdrucks zu bestimmen. Trägt nur die minimierende

Feldkonfiguration σ_{\min} zur Zustandssumme bei, gilt $\langle \sigma \rangle = \sigma_{\min}$ und man sagt, dass die sogenannte Molekularfeld- oder mean-field-Näherung exakt wird. Für endliche N_f tragen auch andere Feldkonfigurationen zur Zustandssumme bei. Die Beschränkung auf $\langle \sigma \rangle$ ist dann nur eine Näherung, die gegebenenfalls um Korrekturterme erweitert werden muss.

1.3 Regularisierung und Renormierung

In Quantenfeldtheorien treten üblicherweise divergente Ausdrücke auf, die dazu führen, dass man bestimmten Größen keinen endlichen Wert zuordnen kann. Man versucht deshalb, in einem als Regularisierung bezeichneten Verfahren zunächst endliche Terme zu gewinnen, die möglicherweise von unphysikalischen Parametern abhängen und danach in der sogenannten Renormierung die unphysikalischen Parameter durch physikalische Größen, z.B. Massen, zu ersetzen, die prinzipiell in Experimenten zugänglich sind. Nicht jede Theorie ist renormierbar.

Eine typische Regularisierungsmethode bei sogenannten UV-Divergenzen, die auftreten, wenn etwa Integrale bis zu unendlichen Impulsen über nicht hinreichend schnell abfallende Funktionen zu berechnen sind, besteht in der Einführung eines endlichen Abschneideparameters als obere Integralgrenze, oft als Λ bezeichnet. Ergebnisse hängen dann natürlich von der Wahl von Λ ab. In der Renormierung versucht man dann, für $\Lambda \rightarrow \infty$ bei einem endlichen Ergebnis zu bleiben, zum Beispiel durch die Umdefinierung der Kopplungsgrößen, Massen oder Vakuumsenergien bzw. allgemein freien Parametern der Theorie.

Die von uns gewählte Regularisierungsmethode mithilfe der ζ -Funktion [20] basiert stattdessen auf analytischer Fortsetzung, siehe z.B. [21]. In für uns hinreichend vereinfachter Form gilt:

Seien $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf offenen Mengen $U \subset V \subseteq \mathbb{C}$. Gilt $f|_U \equiv F|_U$, so bezeichnet man F als analytische Fortsetzung von f auf V . Die analytische Fortsetzung einer Funktion f ist eindeutig.

Ein Standardbeispiel hierfür ist die Γ -Funktion, gegeben über die analytische Fortsetzung der Definition

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad \text{für } \Re(z) > 0. \quad (1.17)$$

Während die rechte Seite der Gleichung (1.17) nur für $\Re(z) > 0$ wohldefiniert ist, ist $\Gamma(z)$ eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} mit einfachen Polen bei $z \in -\mathbb{N}_0$.

1.4 Symmetrien und spontane Symmetriebrechung

Von besonderem Interesse in der Quantenfeldtheorie sind Symmetrien, da sie erlauben, strukturelle Ähnlichkeiten und übergeordnete Prinzipien zwischen verschiedenen Theorien zu erkennen. Genauere Diskussionen sind beispielsweise in [22] zu finden. Symmetrie beschreibt die Eigenschaft der Forminvarianz der LAGRANGE-Dichte und insbesondere der Bewegungsgleichungen gegenüber Transformationen aus sogenannten Symmetriegruppen. Als externe Symmetrien bezeichnet man im Allgemeinen Invarianz unter Transformationen der Raumzeit, zum Beispiel

unter LORENTZ-Transformationen

$$x^\mu \rightarrow x'^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu, \quad (1.18)$$

Paritätstransformationen

$$(x^0, x^1, \dots, x^a, \dots) \rightarrow (x^0, x^1, \dots, -x^a, \dots) \quad (1.19)$$

oder Zeitumkehr

$$x^0 \rightarrow -x^0. \quad (1.20)$$

Neben diesen besitzt das GROSS-NEVEU-Modell gemäß Definition (1.6) mit verschwindendem Masseterm $m = 0$ noch sogenannte innere Symmetrien bezüglich Transformationen, die nicht auf die Raumzeit, sondern im Raum der Felder bzw. Feldkomponenten wirken. Ein Beispiel ist die Flavor-Symmetrie, repräsentiert durch Symmetrie unter unitären Transformationen auf dem N_f -komponentigen Raum der Flavors,

$$\psi_a \rightarrow \psi'_a = U_{ab} \psi_b \quad \bar{\psi}_a \rightarrow \bar{\psi}'_a = \bar{\psi}_b (U^\dagger)_{ab}. \quad (1.21)$$

Für uns von größerem Interesse ist hingegen die diskrete chirale Symmetrie. Diese erhält man durch Einführung einer Matrix γ^5 mit den Eigenschaften $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ und $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$. Die genaue Konstruktion dieser Matrix hängt von der Dimension der Raumzeit, der gewählten Darstellung sowie der Signatur der Metrik ab [23]. Die Symmetrie besteht dann in der Invarianz gegenüber der Transformation

$$\psi_a \rightarrow \psi'_a = \gamma^5 \psi_a \quad \bar{\psi}_a \rightarrow \bar{\psi}'_a = -\bar{\psi}_a \gamma^5. \quad (1.22)$$

Man sieht ein, dass ein Masseterm $m \neq 0$ diese Symmetrie bricht. Neben einer solchen expliziten Symmetriebrechung kann eine Theorie auch spontane Symmetriebrechung aufweisen. Das ist dann der Fall, wenn der Grundzustand oder Vakuumerwartungswert der Theorie geringere Symmetrie zeigt, als die LAGRANGE-Dichte. In unserem Fall gilt für die chirale Transformation

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle \rightarrow -\langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad (1.23)$$

weshalb ein von 0 verschiedener Vakuumerwartungswert $\langle \sigma \rangle$ die spontane Brechung chiraler Symmetrie indiziert.

2 Homogene Kondensate

Die folgende Untersuchung orientiert sich an [24]. Ziel ist es, einen regularisierten und renormierten Ausdruck für die effektive Wirkung herzuleiten und dann auf homogene Felder $\sigma(x)$ zu spezifizieren. Diese Annahme scheint zunächst sinnvoll, da sie der Translationsinvarianz der LAGRANGE-Dichte gerecht wird.

2.1 Behandlung der fermionischen Determinante

Wir betrachten zunächst den matrixwertigen Operator $\mathcal{D} := \not{\partial} + \sigma + \mu\gamma^0$, wobei scheinbar skalare Terme als proportional zur Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ anzusehen sind. Wir erkennen

$$\det \mathcal{D} = \det \gamma^0 \mathcal{D}, \quad (2.1)$$

wobei wir abhängig von der Dimension womöglich einen σ -unabhängigen Vorfaktor der Determinante unterschlagen haben. Jedoch kann man zeigen, dass in Definition (1.3) dieselbe aus Gleichung (1.13) stammende Determinante sowohl in der Zustandssumme im Nenner als auch im Integranden im Zähler auftritt, entsprechend kürzt sich ein solcher Vorfaktor, weshalb die Erwartungswerte von Observablen unverändert bleiben und das Vergehen aus physikalischer Perspektive unproblematisch ist. Mit der definierenden Eigenschaft der γ -Matrizen, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, woraus in der euklidischen Metrik unter anderem $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ folgt, ergibt sich

$$\gamma^0 \mathcal{D} = \underbrace{\partial_0 + \mu}_{=: \mathcal{D}_0} + \underbrace{\gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 \sigma}_{=: h_\sigma}. \quad (2.2)$$

Es interessieren die Eigenwerte dieses Operators. Im Rahmen der gesamten Arbeit soll das Feld $\sigma(x)$ zeitunabhängig sein, also $[\partial_0, \sigma] = 0$, weshalb die Eigenfunktionen von $\gamma^0 \mathcal{D}$ faktorisieren,

$$\Psi_{\text{nm}}(t, x) = e^{i\omega_n t} \Phi_m(x) \quad (2.3)$$

$$\gamma^0 \mathcal{D} \Psi_{\text{nm}}(t, x) = (i\omega_n + \mu + \epsilon_m) \Psi_{\text{nm}}(t, x), \quad (2.4)$$

wobei die $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ -komponentigen, spinorwertigen Funktionen $\Phi_m(x)$ die Eigenwertgleichung $h_\sigma \Phi_m(x) = \epsilon_m \Phi_m(x)$ des raumabhängigen hermiteschen Operators h_σ lösen. Die Eigenwertgleichung des zeitabhängigen Teils wird gelöst durch einen Exponentialansatz und den in diesem Kontext MATSUBARA-Frequenzen genannten Eigenwerten $\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{Z}$, sodass die antiperiodische Randbedingung $\Psi(t, x) = -\Psi(t + \beta, x)$ entlang der Zeitrichtung erfüllt ist. Nichttriviale Eigenwerte ϵ_m treten immer paarweise mit unterschiedlichem Vorzeichen auf [24].

Damit können wir festhalten, dass

$$\det \gamma^0 \mathcal{D} = \prod_{\omega_n, \epsilon_m} (i\omega_n + \mu + \epsilon_m) \quad (2.5)$$

$$= \prod_{\omega_n, \epsilon_m > 0} \left((i\omega_n + \mu)^2 - \epsilon_m^2 \right) \cdot \prod_{\omega_n, \epsilon_m = 0} (i\omega_n + \mu) . \quad (2.6)$$

Wegen $i\omega_n = (i\omega_{-n-1})^*$ ist $\det \gamma^0 \mathcal{D} \in \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt

$$(\det \gamma^0 \mathcal{D})^2 = \prod_{\omega_n, \epsilon_m} \left((i\omega_n + \mu)^2 - \epsilon_m^2 \right) = \prod_{\omega_n, \epsilon_m} \left((\omega_n - i\mu)^2 + \epsilon_m^2 \right) \quad (2.7)$$

sowie

$$\ln \det \gamma^0 \mathcal{D} = \frac{1}{2} \ln (\det \gamma^0 \mathcal{D})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\omega_n, \epsilon_m} \ln \underbrace{\left((\omega_n - i\mu)^2 + \epsilon_m^2 \right)}_{=: \lambda_{nm}} . \quad (2.8)$$

Im Falle eines homogenen Feldes $\sigma(x) = \sigma = \text{const.}$ gilt $\epsilon_m^2 = \sigma^2 + p_m^2$ mit Impulsen $p_m \propto m \in \mathbb{Z}$, dementsprechend divergiert die Summe (2.8) und liefert zunächst keine sinnvolle Aussage. Für inhomogene Felder gilt die gleiche Form der Eigenwerte zumindest asymptotisch für $m \rightarrow \pm\infty$. Offensichtlich ist nun also eine Regularisierung nötig. Es sollte weiterhin das Argument des Logarithmus dimensionslos sein und korrekter Weise eine passende Skalierungskonstante μ_s der gleichen Dimension wie die Eigenwerte von \mathcal{D} eingeführt werden, sodass $\ln \det \left(\frac{\mathcal{D}}{\mu_s} \right)$ dimensionslos ist. Wir nehmen eine solche Skalierung zunächst implizit an und werden sie an gegebener Stelle explizit berücksichtigen.

2.2 Regularisierung mittels ζ -Funktion

Eine einfache Umformung ergibt

$$\ln \det \gamma^0 \mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \ln \lambda_{nm} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{n,m} \lambda_{nm}^{-s} \quad (2.9)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}(s) , \quad (2.10)$$

wobei wir die Zeta-Funktion $\zeta_{\mathcal{H}}(s) := \sum_{n,m} \lambda_{nm}^{-s}$ des Operators $\mathcal{H} := -\mathcal{D}_0^2 + h_\sigma^2$ mit den Eigenwerten λ_{nm} eingeführt haben. Das Gleichheitszeichen ist hier und im Folgenden im Rahmen analytischer Fortsetzung zu verstehen, da die ursprüngliche Determinante wie die ζ -Funktion bei $s = 0$ nicht definiert ist.

Mithilfe der Definition der Γ -Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t} , \quad (2.11)$$

sowie der normierten MELLIN-Transformation der Funktion $e^{-t\lambda}$ bezüglich t ,

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t\lambda}, \quad (2.12)$$

welche leicht durch den Variablenwechsel $t \rightarrow \lambda t$ im Integral nachvollzogen werden kann, können wir das Ergebnis weiter bearbeiten.

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \sum_n e^{-t(\omega_n - i\mu)^2} \sum_m e^{-t\epsilon_m^2} \quad (2.13)$$

Wir nutzen nun die POISSON-Resummation, um die Summen über die Exponentialfunktionen umzuschreiben. Für allgemeine Funktionen $f(x)$ erhalten wir mithilfe der Identität

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} L\delta(x + mL) \quad (2.14)$$

durch Multiplikation mit $f(x)$ und anschließender Integration über x

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}\left(\frac{n}{L}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Lf(mL) \quad (2.15)$$

mit der Konvention $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i2\pi kx}$ für die Fouriertransformierte von f . Wir können damit bestimmte Summen über Funktionswerte einer Funktion mit Summen über die Funktionswerte der zugehörigen Fouriertransformierten ersetzen. Durch Anwendung der POISSON-Resummation auf die erste Summe des Ausdrucks (2.13) erhalten wir

$$K_{\beta}(t) = \sum_n e^{-t(\omega_n - i\mu)^2} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi t}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu}. \quad (2.16)$$

Nehmen wir nun an, dass $\sigma(x) = \sigma = \text{const.}$ gelte. In dem Fall lässt sich auch die zweite Summe über eine POISSON-Resummation vereinfachen. Die Eigenwerte $\epsilon_{\mathbf{m}}^2$ mit $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ nehmen dann in $d-1$ Raumdimensionen die Form $\sigma^2 + \frac{4\pi^2\mathbf{m}^2}{L^2}$ an und wir können für den \mathbf{m} -abhängigen Teil der Summe

$$K_L^{d-1}(t) = \sum_{\mathbf{m}} e^{-t\epsilon_{\mathbf{m}}^2} = \frac{L^{d-1}}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}(d-1)}} \sum_{\mathbf{m}} e^{-\frac{L^2\mathbf{m}^2}{4t}} e^{-t\sigma^2} \quad (2.17)$$

schreiben, indem wir für die Quantenzahl jeder der $d-1$ Raumrichtungen eine POISSON-Resummation durchführen.

Unser Ergebnis für die ζ -Funktion lautet nun

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1-\frac{1}{2}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \sum_{\mathbf{m}} e^{-t\epsilon_{\mathbf{m}}^2} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\beta L^{d-1}}{\sqrt{4\pi}^d} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1-\frac{d}{2}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \sum_{\mathbf{m}} e^{-\frac{L^2\mathbf{m}^2}{4t}} e^{-t\sigma^2}, \quad (2.19)$$

wobei in der ersten Zeile die POISSON-Resummation nur bezüglich der MATSUBARA-Frequenzen durchgeführt wurde, nicht aber über die Eigenwerte $\epsilon_{\mathbf{m}}$.

Etwas irreführend ist die Notation der Summe über \mathbf{m} bzw. $\epsilon_{\mathbf{m}}$. Der ursprüngliche Operator h_σ ist in $1 + 1$ und $2 + 1$ Dimensionen mit einer entsprechenden irreduziblen Darstellung der γ -Matrizen ein 2×2 -Matrixoperator, dessen Eigenfunktionen 2-komponentige Spinoren und für konstante σ proportional zu einem Phasenfaktor $e^{ip\mathbf{m}\mathbf{x}}$ sind. Für gleiche Vektoren von Impulsquantenzahlen \mathbf{m} existieren zu jedem $\epsilon_{\mathbf{m}}$ genau 2 linear unabhängige Spinoren im zugehörigen Eigenraum, der Eigenwert ist also 2-fach entartet. Die Summe $\sum_{\mathbf{m}}$ läuft also nicht einmal, sondern doppelt über \mathbb{Z}^{d-1} , anders als es die bisherige Notation suggeriert. Dieses Argument entspringt der sogenannten Supersymmetrie des Operators h_σ^2 . In $1 + 1$ Dimensionen können wir z.B. unter Wahl einer expliziten Darstellung der γ -Matrizen

$$h_\sigma^2 = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + \sigma(x)^2 + \sigma'(x) & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + \sigma(x)^2 - \sigma'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

mit $\mathcal{A} = \partial_x + \sigma(x)$ schreiben. Die hermiteschen Operatoren $h_\sigma^{2,+} := \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$ und $h_\sigma^{2,-} := \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ nennt man dann Partner-Hamiltonians und $\sigma(x)$ das Superpotential. Es ergibt sich, dass $h_\sigma^{2,+}$ und $h_\sigma^{2,-}$ bis auf 0-Moden das gleiche Spektrum haben. Genauere Ausführungen zur Supersymmetrie sind unter anderem in [25] zu finden. Diese Entartung soll durch einen Degeneriertheitsfaktor d_s berücksichtigt werden, sodass wir nun schreiben wollen

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}} \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{1}{2}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{d-1}} e^{-t\epsilon_{\mathbf{m}}^2}, \quad (2.21)$$

$$= \frac{\beta L^{d-1}}{\sqrt{4\pi}^d} \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{d}{2}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{d-1}} e^{-\frac{L^2\mathbf{m}^2}{4t}} e^{-t\sigma^2}. \quad (2.22)$$

Diese Schreibweise erlaubt die Vorstellung der Eigenwerte $\epsilon_{\mathbf{m}}^2$ eines einkomponentigen Operators $h_\sigma^{2,+}$ oder $h_\sigma^{2,-}$ anstelle des mehrkomponentigen Operators h_σ^2 . Wir nehmen implizit diese Bedeutung der Notation h_σ^2 an. Für allgemeine Raumzeitdimensionen d bei Benutzung der genannten irreduziblen Darstellungen ist der Degeneriertheitsfaktor gegeben durch $d_s = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$. Unabhängig von der Anzahl der Operatorkomponenten sind die Eigenwerte für homogene σ natürlich zusätzlich entartet bezüglich der Spiegelung einzelner Impulskomponenten $m_i \rightarrow -m_i$, diese Entartung ist hier noch nicht berücksichtigt.

Für $\mu, T \rightarrow 0$ liefern in der obigen Summe (2.22) Terme mit $n \neq 0$ keinen Beitrag. Wir betrachten die im Integranden temperaturunabhängige Komponente der ζ -Funktion,

$$\zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = \frac{\beta L^{d-1}}{\sqrt{4\pi}^d} \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{d}{2}} e^{-t\sigma^2} \left(1 + \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{d-1} \setminus \{\mathbf{0}\}} e^{-\frac{L^2\mathbf{m}^2}{4t}} \right). \quad (2.23)$$

Für die Durchführung des Integrals mit dem ersten Summanden in der Klammer nutzen wir aus, dass in der obigen Formel bis auf einen Faktor $\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{d}{2})}$ die normierte MELLIN-Transformation von $(\sigma^2)^{\frac{d}{2}-s}$ steht. Für die Auswertung des zweiten Summanden hilft eine Integraldarstellung

der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art K_ν , entnommen aus [26], nämlich

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty dt e^{-t - \frac{z^2}{4t}} \frac{1}{t^{\nu+1}} \quad (2.24)$$

$$\stackrel{x = \frac{\beta}{t}, \gamma := \frac{z^2}{4\beta}}{\iff} K_\nu(2\sqrt{\beta\gamma}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x} - \gamma x}. \quad (2.25)$$

Weiterhin ist $K_\nu = K_{-\nu}$, was durch den Variablenwechsel $x = \frac{z^2}{4t}$ im ersten Integral leicht nachzuvollziehen ist. Damit erhalten wir insgesamt

$$\zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = \frac{V}{\sqrt{4\pi}^d} d_s \left(\frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} \sigma^{d-2s} + \frac{2}{\Gamma(s)} \sigma^{d-2s} \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{2}{|\mathbf{m}| \sigma L} \right)^{\frac{d}{2}-s} K_{\frac{d}{2}-s}(|\mathbf{m}| \sigma L) \right) \quad (2.26)$$

mit dem Raumzeitvolumen $V = \beta L^{d-1}$ als Produkt aus zeitlicher Ausdehnung β und räumlicher Ausdehnung $V_S = L^{d-1}$, worüber die (anti-)periodischen Randbedingungen definiert werden. Korrekterweise müssten wir auch $|\sigma|$ schreiben, beschränken uns hier aber alternativ auf $\sigma \geq 0$. Die richtigen Einheiten erhält man wie zuvor angedeutet durch die Ersetzungen

$$\sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\mu_s} \quad L \rightarrow L\mu_s \quad \beta \rightarrow \beta\mu_s \quad V \rightarrow V\mu_s^d. \quad (2.27)$$

Um nun den temperaturabhängigen Teil in (2.21) zu berechnen, betrachten wir nur Terme mit $n \neq 0$ und benutzen wie zuvor auch die Integraldarstellung der modifizierten Besselfunktionen,

$$\zeta_{\mathcal{H}}^{(1)}(s) = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi} \Gamma(s)} d_s \sum_{n \neq 0, \mathbf{m}} 2(-1)^n \left(\frac{|n|\beta}{2|\epsilon_{\mathbf{m}}|} \right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(|n|\beta|\epsilon_{\mathbf{m}}|) e^{-n\beta\mu} \quad (2.28)$$

$$= \frac{2\beta}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} d_s \sum_{n > 0, \mathbf{m}} (-1)^n \left(\frac{n\beta}{2|\epsilon_{\mathbf{m}}|} \right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(n\beta|\epsilon_{\mathbf{m}}|) \cosh(n\beta\mu). \quad (2.29)$$

Für $s \rightarrow 0$ geht die Γ -Funktion gegen ∞ , während die restlichen Terme sowie ihre Ableitungen endlich sind. Damit vereinfacht sich die gesamte Ableitung zu

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(1)}(s) = \frac{2\beta d_s}{\sqrt{\pi}} \sum_{n > 0, \mathbf{m}} (-1)^n \left(\frac{n\beta}{2|\epsilon_{\mathbf{m}}|} \right)^{-\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(n\beta|\epsilon_{\mathbf{m}}|) \cosh(n\beta\mu) \quad (2.30)$$

$$= \frac{2\beta d_s}{\sqrt{\pi}} \sum_{n > 0, \mathbf{m}} (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} (e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}|+\mu)})^n + (e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}|-\mu)})^n}{n\beta} \quad (2.31)$$

$$= -d_s \sum_{\mathbf{m}} \left(\ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}|+\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}|-\mu)}) \right), \quad (2.32)$$

wobei zur Umformung die Identitäten $K_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ und $\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$ benutzt wurden. Der letzte Ausdruck geht nach Einsetzen des endlichen Volumenelementes $\Delta^{(d-1)} p = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{d-1} \Delta^{(d-1)} m$ im $(d-1)$ -dimensionalen Raum der Impulse \mathbf{p} , wobei natürlich

$\Delta^{(d-1)}m = 1^{(d-1)}$ gilt, für große L gegen das Integral

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(1)}(s) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} -d_s \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}p \left(\ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}| + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_{\mathbf{m}}| - \mu)}) \right). \quad (2.33)$$

2.3 Berechnung des effektiven Potentials homogener Kondensate

Die Wirkung skaliert mit dem Raumzeitvolumen V . Wir normieren sie daher auf dieses und definieren das Potential $U_{\text{eff}} := \frac{S_{\text{eff}}}{V}$, für welches dann gilt

$$U_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2g^2} - \frac{1}{V} \ln \det \mathcal{D} \quad (2.34)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2V} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}(s). \quad (2.35)$$

Wie auch für die ζ -Funktionen unterscheiden wir zwischen einem Beitrag für $\mu, T = 0$ und Rest, also

$$U_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2V} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) \quad U_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{2V} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(1)}(s), \quad (2.36)$$

und setzen die zuvor erhaltenen Ausdrücke für die ζ -Funktion bei homogenen Feldern σ ein.

Die im Folgenden genutzten Eigenschaften der Γ -Funktion können z.B. aus [27] entnommen werden. Mit $|\Gamma(s \rightarrow s_0 \in -\mathbb{N}_0)| \rightarrow \infty$, wobei insbesondere wegen $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ und $\Gamma(1) = 1$ konkret $\Gamma(s \rightarrow 0) \rightarrow \frac{\Gamma(1)}{s}$ und damit auch $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\Gamma(s))^{-1} = 1$ gilt, bleibt bei der Ableitung der zweite Term in Gleichung (2.26) bis auf das Verschwinden des Vorfaktors $\frac{1}{\Gamma(s)}$ unverändert, während für den ersten Term eine Fallunterscheidung nötig ist, je nachdem ob $\frac{d}{2} \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Für ungerade d ist das nicht der Fall und wir erhalten mit dem endlichen Wert $\Gamma(-\frac{d}{2}) = (-2)^{\frac{d+1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{d!!}$ sowie der bereits erwähnten Divergenz von $\Gamma(s)$ das Ergebnis

$$U_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{d+1}{2}} \frac{d_s 2^{\frac{d+1}{2}} \sqrt{\pi}}{2^d \sqrt{\pi}^d d!!} \sigma^d + \left(\frac{\sigma}{2\pi L} \right)^{\frac{d}{2}} d_s \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{K_{\frac{d}{2}}(|\mathbf{m}| \sigma L)}{|\mathbf{m}|^{\frac{d}{2}}} \quad (2.37)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2g^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\pi} \right)^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{\sigma^d}{d!!} + \left(\frac{\sigma}{2\pi L} \right)^{\frac{d}{2}} d_s \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{K_{\frac{d}{2}}(|\mathbf{m}| \sigma L)}{|\mathbf{m}|^{\frac{d}{2}}}, \quad (2.38)$$

wobei wir noch $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor = \frac{d-1}{2}$ für $d \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ und $d_s = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ im zweiten Summanden eingesetzt haben.

Für gerade d ist $\frac{d}{2} \in \mathbb{N}_0$. Wir brauchen unter anderem den Wert von $\frac{\Gamma(s-\frac{d}{2})}{\Gamma(s)}$ bei 0 sowie dessen Ableitung, wobei Zähler und Nenner divergieren. Wir wenden dazu iterativ $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ an und erhalten

$$\frac{\Gamma(s-\frac{d}{2})}{\Gamma(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)\dots(s-\frac{d}{2})} = \prod_{j=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{s-j}. \quad (2.39)$$

Es folgt

$$\frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} \Big|_{s=0} = \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{\frac{d!}{2!}} \quad (2.40)$$

und außerdem

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} = \sum_{k=1}^{\frac{d}{2}} \left(-\frac{1}{s-k} \prod_{j=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{s-j} \right) \Big|_{s=0} = \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{\frac{d!}{2!}} \sum_{k=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{k}. \quad (2.41)$$

Einsetzen in U_{eff} liefert

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^{(0)} &= \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2} \frac{d_s}{\sqrt{4\pi}^d} \left(\sigma^d \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{\frac{d!}{2!}} \sum_{k=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}}{\frac{d!}{2!}} \left(-\ln \left(\frac{\sigma^2}{\mu_s^2} \right) \sigma^d \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma^d \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{2}{|\mathbf{m}| \sigma L} \right)^{\frac{d}{2}} K_{-\frac{d}{2}}(|\mathbf{m}| \sigma L) \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\sigma^d}{d!!} \left(\sum_{k=1}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{k} - \ln \left(\frac{\sigma^2}{\mu_s^2} \right) \right) + \left(\frac{\sigma}{\pi L} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{K_{-\frac{d}{2}}(|\mathbf{m}| \sigma L)}{|\mathbf{m}|^{\frac{d}{2}}}, \quad (2.43)$$

wobei wir noch $2^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2} \right)! = d!!$ für $d \in 2\mathbb{N}_0$ angewendet haben. Die Gleichungen (2.38) und (2.43) enthalten bereits die korrekten Ergebnisse unter Berücksichtigung des Skalenparameters μ_s . Man beachte, dass die angegebene Ersetzungsvorschrift (2.27) nicht für den Divisor in $U_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{V}$ gilt.

Gleichung (2.33) liefert für den zweiten Teil des effektiven Potentials

$$U_{\text{eff}}^{(1)} = -d_s \frac{1}{2\beta(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}p \left(\ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{m}} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{m}} - \mu)}) \right). \quad (2.44)$$

2.3.1 Fall d=2

In 1 + 1 Dimensionen erhalten wir

$$U_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{\sigma^2}{2g^2} - \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(1 - \ln \left(\frac{\sigma^2}{\mu_s^2} \right) \right) + \frac{2\sigma}{\pi L} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\sigma L)}{m} \quad (2.45)$$

$$U_{\text{eff}}^{(1)} = -\frac{1}{\pi\beta} \int_0^\infty dp \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2+p^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2+p^2} - \mu)}) \right). \quad (2.46)$$

Fordert man für $T, \mu = 0$ und $L \rightarrow \infty$ ein fixes Minimum von U_{eff} bei σ_s , wobei dann nur die ersten 2 Summanden von $U_{\text{eff}}^{(0)}$ beitragen, so kann man die Kopplungskonstante g und den Skalenfaktor μ_s ersetzen und erhält

$$U_{\text{eff}}^{(0, L \rightarrow \infty)} = \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right). \quad (2.47)$$

Diese Wahl entspricht der Durchführung der Renormierung mit der Renormierungsbedingung

$$\min_{\sigma(x)=\text{const.}} U_{\text{eff}}^{(0, L=\infty)} \stackrel{!}{=} U_{\text{eff}}^{(0, L=\infty)}(\sigma_s). \quad (2.48)$$

Im Fall $\mu \neq 0, T \rightarrow 0$, also $\beta \rightarrow \infty$, ist die Integration in $U_{\text{eff}}^{(1)}$ analytisch durchführbar. Genauer gilt

$$e^{-\beta f(p)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } f(p) > 0 \\ \infty & \text{für } f(p) < 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

sodass wir für $\sigma < \mu$ folgern können

$$U_{\text{eff}}^{(1)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi\beta} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} dp \ln \left(e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2 + p^2} - \mu)} \right) \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} dp \left(\sqrt{\sigma^2 + p^2} - \mu \right) \quad (2.51)$$

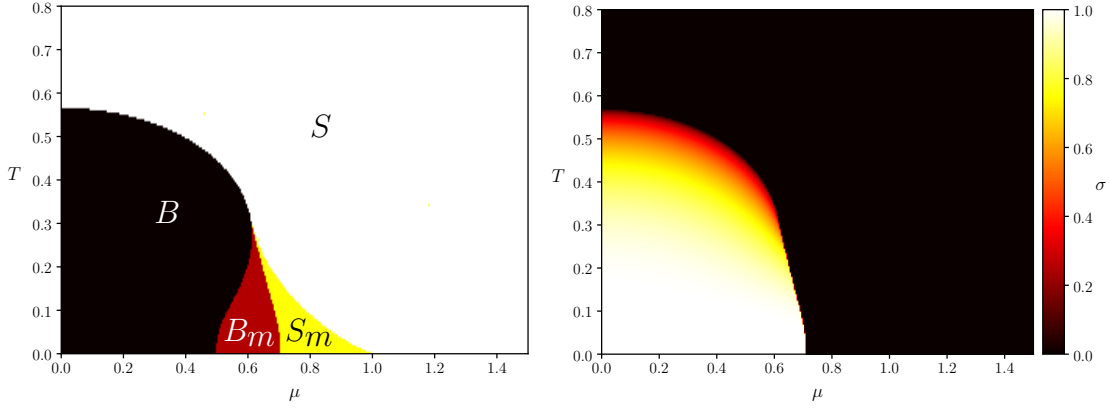
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\sigma^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}}{\sigma} \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - \sigma^2} \right). \quad (2.52)$$

Für $\sigma \geq \mu$ ist $U_{\text{eff}}^{(1)} = 0$. Im Spezialfall $T \rightarrow 0$ erhalten wir damit

$$U_{\text{eff}}^{(T \rightarrow 0, L \rightarrow \infty)} = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2}}{\sigma} \right) - 1 \right) - \frac{\mu}{2\pi} \sqrt{\mu^2 - \sigma^2} & , \sigma < \mu \\ \frac{\sigma^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right) & , \sigma \geq \mu. \end{cases} \quad (2.53)$$

Für ein gegebenes Paar μ, T können wir mithilfe numerischer Verfahren die Funktion $U_{\text{eff}}(\sigma) = U_{\text{eff}}^{(0)}(\sigma) + U_{\text{eff}}^{(1)}(\sigma)$ minimieren. Die gewählte Implementierung in Python ist Anhang A.1 zu entnehmen. Das Ergebnis dieser Minimierung ist in Abbildung 2.1 dargestellt mit den expliziten Phasen in 2.1a. Für große μ oder große T ist nur der Zustand $\sigma = 0$ stabil, das System liegt in der symmetrischen Phase S vor. Für kleine μ und kleine T hingegen existiert nur ein Minimum bei $\sigma \neq 0$. Das Feld σ bricht damit spontan die chirale Symmetrie, es liegt eine gebrochene Phase B vor. Wegen $U_{\text{eff}}(\sigma) = U_{\text{eff}}(|\sigma|)$ ist mit σ auch $-\sigma$ global stabil, das System nimmt beim Übergang $S \rightarrow B$ zufällig einen der beiden Zustände ein. Es existiert zusätzlich ein Bereich gemischter Phasen, in dem jeweils ein lokales Minimum bei $\sigma = 0$ und bei $\sigma \neq 0$ existiert. Dieser Bereich ist in Darstellung 2.1a mit m indiziert, wobei B und S angeben, welches der beiden lokalen Minima auch global stabil ist. In der gebrochenen Phase B bzw. B_m kann der Betrag der minimierenden, von 0 verschiedenen Feldamplitude aus Grafik 2.1b abgelesen werden.

Für die Bestimmung der Phasengrenzen ist der in [5] gewählte, ebenfalls auf numerischen Optimierungsverfahren basierende Ansatz effizienter als die hier durchgeführte Minimierung von $U_{\text{eff}}(\sigma)$ für eine möglichst gute Diskretisierung von $\{(\mu, T)\} = [0, \mu_{\text{max}}] \times [0, T_{\text{max}}]$. Analytisch können dort auch die kritischen Werte μ_c und T_c der Phasenübergänge entlang der Achsen bestimmt werden. Für $\mu = 0$ liegt der Übergang $B \rightarrow S$ bei $T_c = \sigma_s \exp(\frac{\gamma}{\pi}) \approx 0.57\sigma_s$ mit der EULER-MASCHERONI-Konstante $\gamma \approx 0.57721$. Für $T = 0$ wird mit wachsendem μ der zunächst instabile Zustand $\sigma = 0$ bei $\mu = \frac{1}{2}\sigma_s$ metastabil, bei $\mu = \mu_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_s$ wird er stabil gegenüber dem lokalen Minimum bei $\sigma \neq 0$, letzteres verschwindet vollständig bei $\mu = \sigma_s$. Während im Bereich der gemischten Phase in Abbildung 2.1a der Phasenübergang $B_m \rightarrow S_m$ von 1. Ordnung ist mit sprunghafter Änderung der minimierenden Feldamplitude σ , geht diese Phasengrenze



(a) Phasen (siehe Fließtext).

 (b) Feldamplitude des globalen Minimums von $U_{\text{eff}}(\sigma)$ in Abhängigkeit von μ und T .

Abbildung 2.1: Homogene Phasen in 1 + 1 Dimensionen im Grenzfall $L \rightarrow \infty$. Alle Achsen sind in Einheiten von σ_s gegeben.

am sogenannten Lifschitzpunkt $(\mu, T) \approx (0.61\sigma_s, 0.32\sigma_s)$ in einen Phasenübergang 2. Ordnung $B \rightarrow S$ mit stetiger Änderung von σ über. Wir können im Rahmen der gewählten Diskretisierung der μ - und T -Achsen diese Werte bestätigen.

2.3.2 Fall $d=3$

Für $d = 2 + 1$ Dimensionen erhalten wir das Ergebnis

$$U_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{1}{2\pi}\sigma^3 + 2 \left(\frac{\sigma}{2\pi L} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{K_{\frac{3}{2}}(|\mathbf{m}|\sigma L)}{|\mathbf{m}|^{\frac{3}{2}}} \quad (2.54)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2g^2} + \frac{\sigma^3}{6\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} e^{-|\mathbf{m}|\sigma L} \left(\frac{1}{(|\mathbf{m}|L)^3} + \frac{\sigma}{(|\mathbf{m}|L)^2} \right) \quad (2.55)$$

$$U_{\text{eff}}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi^2\beta} \int d^2p \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2 + \mathbf{p}^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2 + \mathbf{p}^2} - \mu)}) \right) \quad (2.56)$$

$$= -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\infty dp p \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2 + p^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\sigma^2 + p^2} - \mu)}) \right). \quad (2.57)$$

Mit der Renormierungsbedingung $\min_{\sigma(x)=\text{const.}} U_{\text{eff}}^{(0, L=\infty)} \stackrel{!}{=} U_{\text{eff}}^{(0, L=\infty)}(\sigma_s)$ für fixes σ_s kann erneut die Kopplungskonstante ersetzt werden, man erhält

$$U_{\text{eff}}^{(0, L \rightarrow \infty)} = \frac{\sigma^2}{12\pi} (2\sigma - 3\sigma_s). \quad (2.58)$$

Wie zuvor auch können wir das Integral in $U_{\text{eff}}^{(1)}$ für $T \rightarrow 0$ analytisch lösen. Für $\sigma < \mu$ gilt

$$U_{\text{eff}}^{(1)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} dp p \cdot (-\beta) \left(\sqrt{p^2 + \sigma^2} - \mu \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{3} \sqrt{p^2 + \sigma^2}^3 - \frac{\mu}{2} p^2 \right]_0^{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} \quad (2.59)$$

$$= -\frac{1}{12\pi} (\mu^3 + 2\sigma^3 - 3\mu\sigma^2) \quad (2.60)$$

Für $\sigma \geq \mu$ ist $U_{\text{eff}}^{(1)} = 0$. Das liefert in Summe

$$U_{\text{eff}}^{(T \rightarrow 0, L \rightarrow \infty)} = \begin{cases} -\frac{\mu^3}{12\pi} + \frac{\sigma^2}{4\pi}(\mu - \sigma_s) & , \sigma < \mu \\ \frac{\sigma^2}{12\pi}(2\sigma - 3\sigma_s) & , \sigma \geq \mu . \end{cases} \quad (2.61)$$

Für allgemeine (μ, T) erhalten wir das in Abbildung 2.2 gezeigte homogene Phasendiagramm durch Minimierung des Potentials. Anders als im 1 + 1-Fall finden wir keine gemischten Phasen,

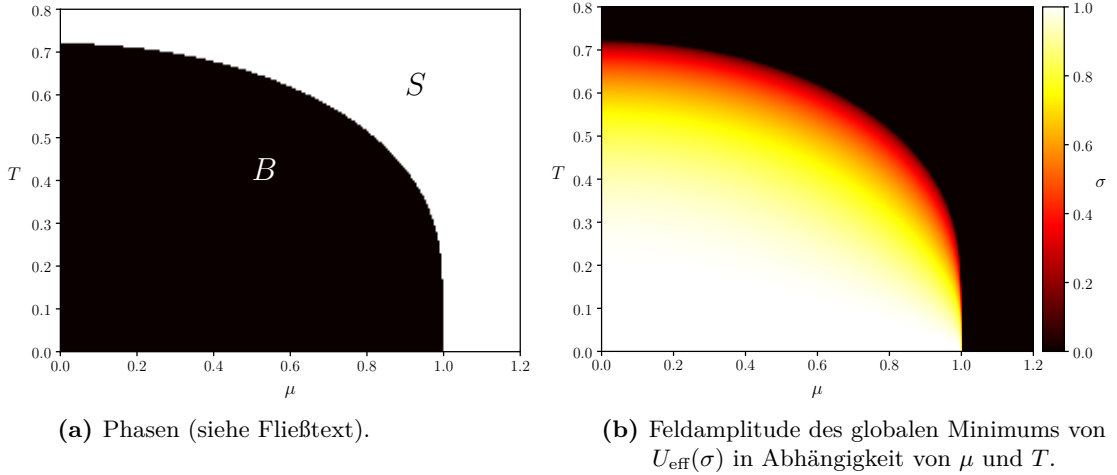


Abbildung 2.2: Homogene Phasen in 2 + 1 Dimensionen im Grenzwert $L \rightarrow \infty$. Alle Achsen sind in Einheiten von σ_s gegeben.

siehe Abbildung 2.2a. Für kleine μ und T hat das Potential sein globales Minimum bei $\sigma \neq 0$, dargestellt in Grafik 2.2b, es liegt die Phase B gebrochener Symmetrie vor. Hier ist der Ursprung $\sigma = 0$ ein lokales Maximum des Potentials. Für große μ oder T hingegen ist das System in der symmetrischen Phase S mit Potentialminimum bei $\sigma = 0$. Zur genauen Bestimmung der Phasengrenze kann einfach analytisch untersucht werden, wann $\frac{d}{d\sigma} U_{\text{eff}}^{(L \rightarrow \infty)} = 0$ nur noch durch $\sigma = 0$ gelöst wird, wann also nur noch ein Extremum existiert, welches dann zwangsläufig das globale Minimum sein muss [24]. Daraus ergeben sich entlang der Achsen für die kritischen Punkte der Phasenübergänge $T_c = \frac{1}{2\ln 2} \sigma_s$ für $\mu = 0$ und $\mu_c = \sigma_s$ für $T = 0$, was erwartungsgemäß auch der Beobachtung aus Abbildung 2.2a im Rahmen der durch die Diskretisierung der μ - und T -Achsen beschränkten Genauigkeit entspricht. Die Phasengrenze repräsentiert fast überall einen Phasenübergang 2. Ordnung, bei dem die Feldamplitude stetig übergeht. Nur bei $(\mu, T) = (\mu_c, 0)$ sehen wir in Gleichung (2.61) wegen $\mu_c = \sigma_s$ das vollständige Verschwinden der σ -Abhängigkeit auf dem Intervall $[0, \sigma_s]$. Das Potential ist also völlig flach, sodass hier jede Feldamplitude $\sigma \in [0, \sigma_s]$ die effektive Wirkung minimiert. Wegen $\sigma_s = \lim_{\mu \nearrow \mu_c} \sigma_{\min} \neq \lim_{\mu \searrow \mu_c} \sigma_{\min} = 0$ handelt es sich hier um einen Phasenübergang 1. Ordnung.

3 Inhomogene Kondensate

Wie zu Beginn diskutiert, existieren für 1 + 1 Dimensionen analytische Beweise [6] und in 2 + 1 Dimensionen numerische Hinweise [12] für die Existenz inhomogener Phasen, sodass die Einschränkung $\sigma(x) = \text{const.}$ aufgehoben werden sollte.

3.1 Inhomogene Kondensate in 1+1 Dimensionen

Da in den Ausdrücken (2.10) und (2.21) die Eigenwerte ϵ_m noch nicht auf konstante $\sigma(x)$ spezifiziert waren, können wir ansetzen bei

$$\ln \det \mathcal{D} = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}(s) \quad (3.1)$$

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}} \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1-\frac{1}{2}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \sum_m e^{-t\epsilon_m^2}, \quad (3.2)$$

wobei dank d_s nur die Eigenwerte ϵ_m^2 des einkomponentigen Operators $-\partial_x^2 + \sigma^2(x) + \sigma'(x)$ benötigt werden.

Der Beitrag für $\mu, T \rightarrow 0$, bei dem nur die Terme mit $n = 0$ der Summe nicht verschwinden, ist

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = \frac{\beta d_s}{\sqrt{4\pi}} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta_{h_\sigma^2} \left(s - \frac{1}{2} \right) \quad (3.3)$$

mit h_σ aus (2.2). Man sieht leicht ein, dass $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(0)} = 0$ und $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} = \Gamma(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{4\pi}$, allerdings kennen wir die konkrete Form der Eigenwerte ϵ_m^2 von h_σ^2 diesmal nicht, wodurch wir keine POISSON-Resummation durchführen und der ζ -Funktion sowie ihrer Ableitung zunächst keinen endlichen Wert zuordnen können.

Die Lösung besteht in der Einführung eines Operators $\bar{h}_\sigma^2 \equiv h_\sigma^2$ für ein konstantes Feld $\bar{\sigma}$, über den wir $\zeta_{h_\sigma^2}$ ausdrücken als

$$\zeta_{h_\sigma^2} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \zeta_{\bar{h}_\sigma^2} \left(s - \frac{1}{2} \right) + \left(\zeta_{h_\sigma^2} \left(s - \frac{1}{2} \right) - \zeta_{\bar{h}_\sigma^2} \left(s - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (3.4)$$

Für den ersten Summanden, also ein (beliebiges) konstantes Feld $\bar{\sigma}$, ist die Aufgabe bereits gelöst mit (2.26). Die in der allgemeinen ζ -Funktion eines elliptischen Operators Δ auftretende Summe

$$\sum e^{-t\lambda_n} \equiv \text{Tr} (e^{-t\Delta}) \quad (3.5)$$

über dessen Eigenwerte hängt mit der als Wärmekern K_t bezeichneten Fundamentallösung der

mit diesem Operator assoziierten Wärmeleitungsgleichung, siehe [28] für eine Einführung, über

$$\mathrm{Tr} (e^{-t\Delta}) = \int d^d x K_t(x, x) \sqrt{g} \quad (3.6)$$

zusammen. Der Wärmekern besitzt nach [29] eine asymptotische Entwicklung

$$K_t(x, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{D}{2}}} \left(\sum_{n=0}^N a_n(x) t^n + o(t^N) \right) \quad (3.7)$$

mit der Raumdimension D des zugehörigen Operators Δ . Das Integral

$$\left(\zeta_{h_\sigma^2} - \zeta_{\bar{h}_\sigma^2} \right) (s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \left(\mathrm{Tr} \left(e^{-th_\sigma^2} \right) - \mathrm{Tr} \left(e^{-t\bar{h}_\sigma^2} \right) \right) \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \left(\sum_{n=0}^N (c_n - \bar{c}_n) t^{s-1+n-\frac{D}{2}} + o(t^{\tilde{N}}) \right) \quad (3.9)$$

ist in 1 Raumdimension bei $s = -\frac{1}{2}$ daher zunächst divergent durch die Beiträge $n \in \{0, 1\}$. Die genauen Koeffizienten a_n bzw. c_n folgen aus der Metrik des Raumes sowie dem genauen Operator Δ . In unserem Fall gilt $c_0 = \bar{c}_0 = 1$ und $c_1 \propto \int \sigma^2(x)$, $\bar{c}_1 \propto \int \bar{\sigma}^2(x)$ [24]. Die Differenz $\left(\zeta_{h_\sigma^2}(s - \frac{1}{2}) - \zeta_{\bar{h}_\sigma^2}(s - \frac{1}{2}) \right)$ und ihre Ableitung bleibt bei $s = 0$ nur endlich, wenn die Felder $\sigma(x)$ und $\bar{\sigma}$ die gleichen Koeffizienten c_1 und \bar{c}_1 bewirken. Natürlich ist $c_0 = \bar{c}_0$ trivial erfüllt. Wir nutzen die Wahlfreiheit für $\bar{\sigma}$ also geschickt aus und setzen

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sigma^2(x)} \implies \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \bar{\sigma}^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \sigma^2(x). \quad (3.10)$$

Während diese Betrachtung ausreicht, um die Konvergenz des Integrals (3.8) an der Grenze $t = 0$ zu begründen, sollte man, um die Konvergenz bei $t \rightarrow \infty$ einzusehen, zur ursprünglichen Summe (3.5) zurückkehren und die beiden Regimes in der Integration durch eine Grenze $\delta > 0$ trennen. Auch das Hinzukommen eines Terms $\ln t$ durch die s -Ableitung beeinflusst die Konvergenz in beiden Grenzfällen nicht, somit ist auch die Ableitung der Differenz der ζ -Funktionen endlich. Unter Berücksichtigung der oben genannten Eigenschaften des Terms $\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}$ bleibt damit

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}}^{(0)}(s) - \beta d_s \left(\zeta_{h_\sigma^2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \zeta_{\bar{h}_\sigma^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \quad (3.11)$$

mit $\bar{\mathcal{H}} := -\mathcal{D}_0^2 + \bar{h}_\sigma^2$. Wissend, dass die Klammer einen endlichen Beitrag liefert, können wir zur ursprünglichen Definition der ζ -Funktion zurückkehren und erhalten

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\bar{\mathcal{H}}}^{(0)}(s) - \beta d_s \sum_m \left((\epsilon_m^2)^{\frac{1}{2}} - (\bar{\epsilon}_m^2)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.12)$$

Der Beitrag endlicher Temperaturen bleibt unverändert wie in Gleichung (2.32) und wir

erhalten für $d = 2 + 1$

$$U_{\text{eff}}^{(1)} = -\frac{1}{\beta L} \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| - \mu)}) \right). \quad (3.13)$$

Insgesamt interessiert uns also die Minimierung des Potentials

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}[\sigma(x)] &= \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right) + \frac{2\bar{\sigma}}{\pi L} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\bar{\sigma}L)}{m} - \frac{1}{L} \sum_m (|\epsilon_m| - |\bar{\epsilon}_m|) \\ &\quad - \frac{1}{\beta L} \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| - \mu)}) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die $|\epsilon_m|$ sind dabei die positiven Wurzeln aller Eigenwerte des einkomponentigen Operators $-\partial_x^2 + \sigma^2(x) + \sigma'(x)$, wir lassen im Folgenden die Betragsstriche weg.

Die Eigenwerte ϵ_m erhalten wir prinzipiell durch Lösen der Eigenwertgleichung

$$h_\sigma \Phi_m = \epsilon_m \Phi_m \quad (3.15)$$

des in (2.2) aufgetretenen Operators $h_\sigma = \gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 \sigma(x)$. Für $\sigma(x)$ war diese Diagonalisierung explizit analytisch möglich. Für beliebige inhomogene Felder $\sigma(x)$ ist dies nicht mehr der Fall, weshalb wir stattdessen numerische Methoden zur Diagonalisierung des Operators nutzen.

Während h_σ in 1 + 1 Dimensionen ein 2-komponentiger Operator ist, berechnet unser numerischer Minimierungsalgorithmus, wie bereits angedeutet, stattdessen die Wurzeln aller Eigenwerte des Operators h_σ^2 , aufgefasst als 1-komponentiger Operator. Wird das gewählte Raumvolumen, in 1 + 1 Dimension etwa das Intervall $\mathcal{I} = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, mit N Gitterpunkten diskretisiert, sodass jede Funktion $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ auf diesem Intervall als Vektor $\vec{f} = (f_i)_{i=1}^N \equiv (f(x_i))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ ausgedrückt werden kann, so ist $h_\sigma^2 \in \text{Mat}(N \times N, \mathbb{R})$. Der diskretisierte Beitrag von $-\partial_x^2 \hat{=} \hat{p}^2$ zu diesem Operator wird in unserem Algorithmus durch die SLAC-Ableitung dargestellt, deren Güte beispielsweise in [30] demonstriert wird. Für die genutzte Implementierung der SLAC-Ableitung ist N ungerade zu wählen. $\sigma(x)$ als Operator entspricht der Diagonalmatrix $\text{diag}((\sigma_i)_{i=1}^N)$. Damit ist die gesamte Matrix h_σ^2 reell und symmetrisch, wodurch wir spezielle und entsprechend effiziente numerische Diagonalisierungsverfahren der genutzten Bibliotheken verwenden können.

A priori hat der das kontinuierliche Feld $\sigma(x)$ repräsentierende Vektor $\vec{\sigma}$ N Freiheitsgrade. Diese Darstellung entspricht der Wahl der Ortsbasis, in der wir σ beschreiben können durch $\sigma(x) = \int dy \sigma(y) \delta(x - y)$ bzw. im diskretisierten Fall $\sigma_i = \sum_j \sigma_j \delta_i^j$. Um die Dimensionalität des Problems für die Numerik zu reduzieren, lohnt es sich, stattdessen σ in der Impulsbasis darzustellen, also $\sigma(x) = \int dp \mathcal{F}[\sigma](p) \exp(ipx)$ bzw. $\sigma_j = \sum_k \mathcal{F}[\sigma]_k \exp(ip_k x_i)$. Wenn wir davon ausgehen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}[\sigma](p)$ des Feldes $\sigma(x)$ mit wachsenden p hinreichend schnell abfällt, so können wir uns auf $\tilde{N} < N$ Fourierkomponenten beschränken und das Minimierungsproblem von N auf \tilde{N} Dimensionen reduzieren. Für reelle symmetrische Funktionen $\sigma(x)$ nutzen wir also die Fourierreihe

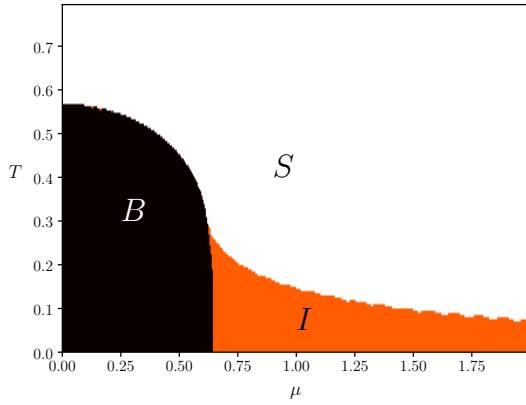
$$\sigma(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\tilde{N}-1} c_k \cos(p_k x), \quad (3.16)$$

wobei die Wahl der $p_k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{N}$ die periodischen Randbedingungen sichert. Daraus folgt unter

anderem

$$\bar{\sigma}^2 = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\tilde{N}-1} c_k^2 \quad (3.17)$$

Wir fassen Gleichung (3.14) damit als Funktion der \tilde{N} Fourierkomponenten auf. Für ein gegebenes Tupel $(c_k)_{k=0}^{\tilde{N}}$ berechnen wir zuerst den das Feld $\sigma(x)$ repräsentierenden Vektor $(\sigma_i)_{i=1}^N$ sowie das konstante Referenzfeld $\bar{\sigma}$. Mit $(\sigma_i)_{i=1}^N$ und dem für alle Felder gleichen Beitrag der SLAC-Ableitung können wir den diskretisierten Operator h_σ^2 und durch numerische Diagonalisierung dessen Eigenwerte $(\epsilon_m^2)_{m=0}^N$ sowie deren positive Wurzeln $(\epsilon_m)_{m=0}^N$ berechnen. Die positiven Wurzeln der Eigenwerte von \bar{h}_σ^2 sind mit $\bar{\epsilon}_m = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2}$ analytisch bekannt, man beachte aber, dass für symmetrische reelle Felder die Impulse p_m symmetrisch um 0 angeordnet sind, also $m \in \{-\frac{N+1}{2}, -\frac{N+1}{2} + 1, \dots, \frac{N-1}{2}\} \subset \mathbb{Z}$ gilt mit $N \in 2\mathbb{N} + 1$. Mit $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}_m$ und ϵ_m kann das Potential dann berechnet werden. Diese Funktion von somit \tilde{N} Variablen können wir mit numerischen Verfahren minimieren. Im Vergleich der Laufzeit der Minimierung und Tiefe der gefundenen Funktionsminima der in der `scipy.minimize`-Bibliothek implementierten Verfahren erwies sich die SLSQP-Methode als effizienteste Prozedur und wurde deshalb übernommen. Die Implementierung der Potentialberechnung und -minimierung mittels `Python` ist erneut in Anhang A.1 hinterlegt. Die numerische Minimierung von (3.14) ergibt das in Abbildung 3.1 dargestellte Phasendiagramm. Dabei wurde für jedes Paar (μ, T) sowohl der soeben beschriebene Algorithmus bemüht, als auch die vergleichsweise einfache eindimensionale numerische Minimierung der in Abschnitt 2.3.1 thematisierten Potentialfunktion für homogene Kondensate mit dem in Grafik 2.1 abgebildeten Ergebnis, um dann zu entscheiden, ob ein lokal minimierendes inhomogenes Feld $\sigma(x)$ existiert und ob dieses geringere Energie hat als das bereits bekannte homogene Minimum. Da aufgrund der Diskretisierung des Impulsgitters durch die Festsetzung der Randbedingungen keine stetige Variation der Frequenz beispielsweise einer reinen Cosinusfunktion möglich ist, kann der Minimierungsalgorithmus leicht in lokalen Minima terminieren, ohne das globale Minimum zu finden. Deshalb sollte für jedes (μ, T) idealerweise eine Reihe von Anfangsbedingungen mit jeweils unterschiedlichen dominanten Impulskomponenten getestet werden.



(a) Phasen (siehe Fließtext).

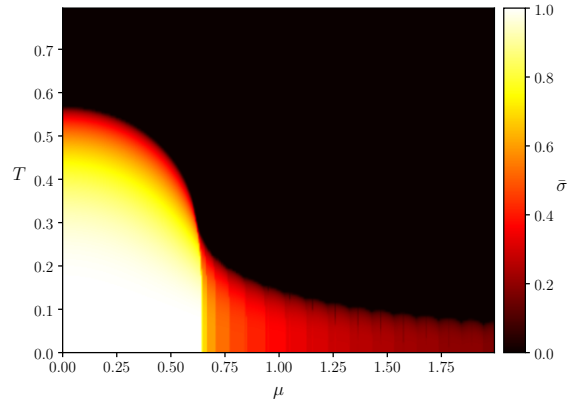
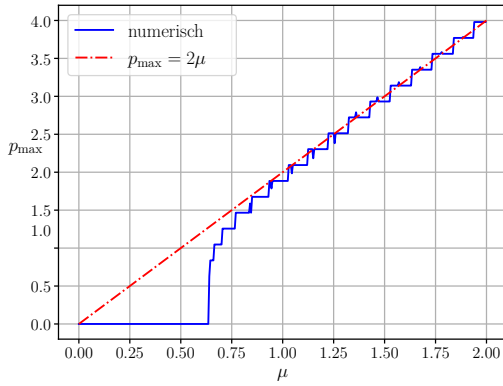
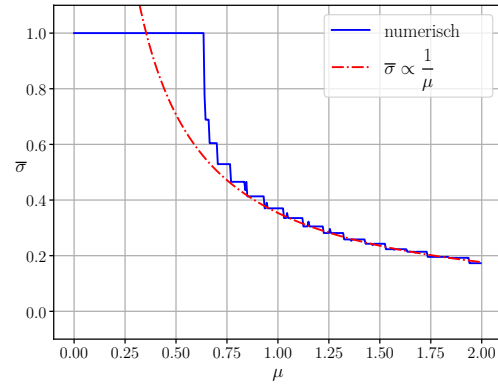

 (b) Wurzel der mittleren quadratischen Feldamplitude $\bar{\sigma}^2$ des globalen Minimums von $U_{\text{eff}}[\sigma(x)]$ in Abhängigkeit von μ und T .

 (c) Verlauf der dominanten Impulskomponente p_{max} des globalen Minimums für $T = 0$.

 (d) Verlauf von $\bar{\sigma}$ des globalen Minimums für $T = 0$.

Abbildung 3.1: Phasenstruktur in 1 + 1 Dimensionen unter Berücksichtigung inhomogener Felder $\sigma(x)$ für $L = 30\sigma_s^{-1}$, $N = 251$. Alle Achsen sind in Einheiten von σ_s gegeben.

Die relevante Erkenntnis ist die Existenz und globale Stabilität einer inhomogenen Phase für kleine T und große μ , in Abbildung 3.1a mit I bezeichnet. Die inhomogenen Lösungen in diesem Bereich entsprechen qualitativ dem Beispiel aus Abbildung 3.2a und 3.2b. Es handelt sich im Rahmen der numerischen Genauigkeit der Minimierung um reine Cosinusfunktionen, man spricht in dieser Phase von einer Kristallstruktur der Materie. Mit wachsendem μ steigt deren Frequenz bzw. Impuls und fällt deren Amplitude, was in den Plots 3.1c und 3.1d sichtbar ist. Die dort eingezeichneten Näherungen des Verhaltens für große μ werden in Abschnitt 3.4 hergeleitet. Der in Grafik 3.1a mit B bezeichnete Bereich entspricht der homogenen gebrochenen Phase, der mit S bezeichnete Bereich der symmetrischen Phase. In B existieren neben dem homogenen globalen Minimum noch inhomogene lokale Minima, exemplarisch abgebildet in 3.2c. Lösungen dieser Form treten auch im Bereich des Phasenüberganges $B \rightarrow I$ auf. Das kritische chemische Potential $\mu_{c,I}$ der Phasengrenze $B \rightarrow I$ bei $T = 0$ liegt im Rahmen unserer Genauigkeit im Intervall $[0.6366\sigma_s, 0.6367\sigma_s]$, was sehr gut zu dem in [31] gegebenen analytischen

Wert $\frac{2}{\pi}\sigma_s \approx 0.63662\sigma_s$ passt. Alle Phasenübergänge $B \rightarrow I$, $I \rightarrow S$ und $B \rightarrow S$ sind Übergänge 2. Ordnung.

Die „Welligkeit“ der Phasengrenze $I \rightarrow S$ in Abbildung 2.1a ist ein Artefakt des endlichen Raumvolumens, da somit nur diskrete Impulse zulässig sind. Weiterhin wurde die Berechnung auf einem kartesischen Koordinatensystem $[0, \mu_{\max}] \times [0, T_{\max}]$ durchgeführt, um die Plot-Befehle der genutzten `matplotlib`-Bibliothek optimal auszunutzen. Um die sichtbaren Mängel zu geringer Auflösung zu beheben, wäre mit dieser Methode eine noch bessere Diskretisierung nötig, die entsprechend mehr Rechenzeit erfordert.

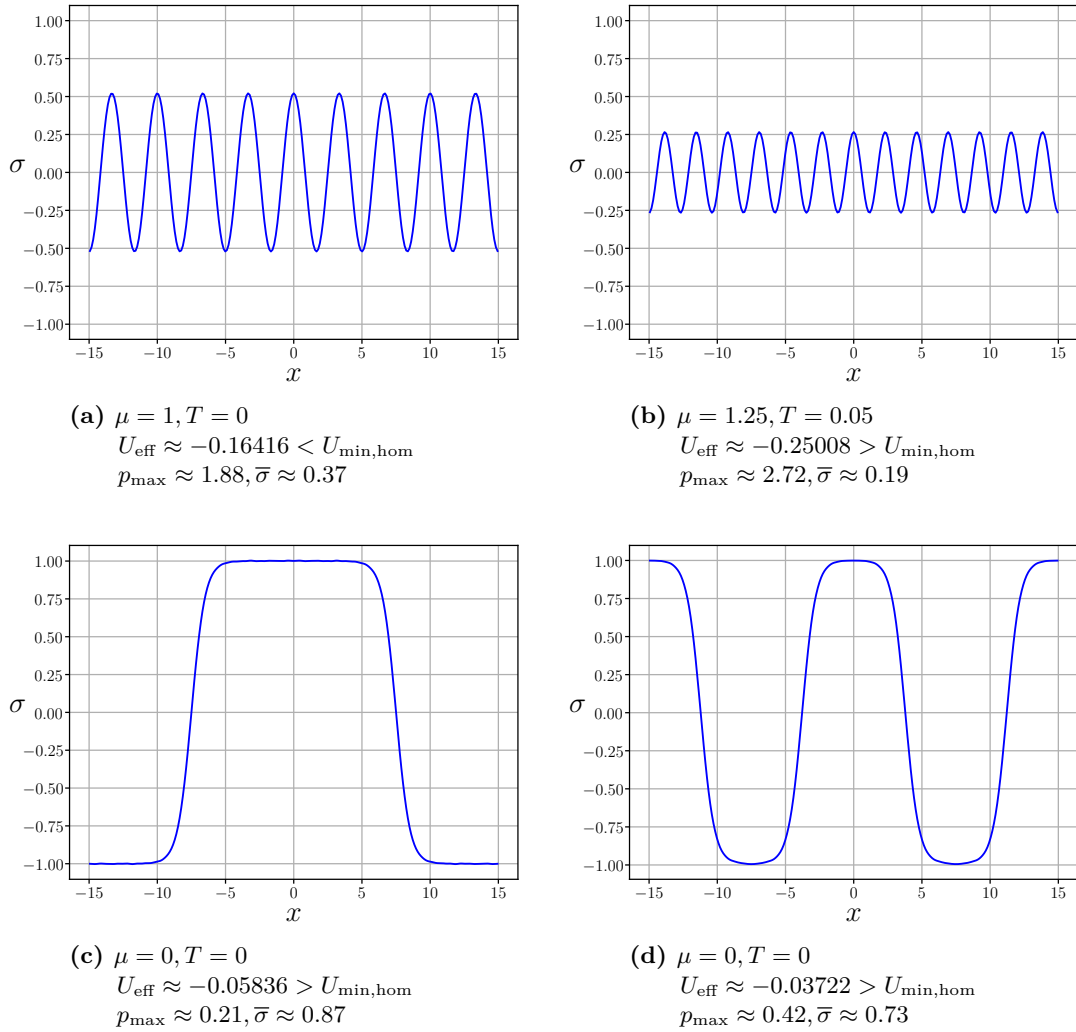


Abbildung 3.2: Beispiele für inhomogene globale und lokale Minima des effektiven Potentials in 1 + 1 Dimensionen. Diese sind zu vergleichen mit dem Minimum von (2.53) zusammen mit dem Zusatzbeitrag endlichen Volumens aus (2.46). Die x -Achse ist in Einheiten von σ_s^{-1} gegeben, U_{eff} in σ_s^2 , alle anderen Größen in σ_s . Ähnliche und weitere Beispiele in [24].

Gemäß [7] stellt 3.2c ein Baryon-Antibaryon-Paar dar, welches gegenüber der Vakuumlösung $\sigma = \pm\sigma_s$ eine Energie von $L \cdot (U_{\text{eff}}(3.2c) - U_{\text{min,hom}}) \approx 30 \cdot (-0.0536 - (-\frac{1}{4\pi}))\sigma_s \approx 0.6365\sigma_s \approx \frac{2}{\pi}\sigma_s$

besitzen. Auch dieser Wert wird in [24] bestätigt. Anhand $L \cdot (U_{\text{eff}}(3.2d) - U_{\text{eff}}(3.2c)) \approx \frac{2}{\pi} \sigma_s$ wird damit deutlich, dass die Energie der entsprechenden lokalen Minima für kleine T und kleine μ aus den als „Kink“ und „Antikink“ bezeichneten Bereichen veränderlicher Feldamplitude stammt.

3.2 Inhomogene Kondensate in 2+1 Dimensionen

Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob eine inhomogene Phase auch in 2 + 1 Dimensionen existiert. Dazu nehmen wir vereinfachend an, dass $\sigma(x, y) = \sigma(x)$ und interessieren uns wieder für die ζ -Funktion des Operators $\mathcal{H} = -\mathcal{D}_0^2 + h_\sigma^2$ mit $\mathcal{D}_0 = \partial_0 + \mu$ und $h_\sigma = \gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 \sigma$. Aus der Vereinfachung folgt

$$h_\sigma^2 = k_\sigma^2 - \partial_y^2 \quad (3.18)$$

mit $k_\sigma = \gamma^0 \gamma^1 \partial_x + \gamma^0 \sigma$. Wegen $[k_\sigma^2, \partial_y^2] = 0$ nehmen die Eigenwerte von h_σ^2 die Form $\epsilon_m^2 + p_y^2$ mit den Eigenwerten ϵ_m^2 von k_σ^2 und $p_y = \frac{2\pi p}{L_y}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ an. Zum vorherigen Abschnitt analoge Umformungen, siehe Anhang A.3.1, führen auf

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\beta L_y}{2\pi} \left(\Gamma(s-1) \zeta_{k_\sigma^2}(s-1) + \int_0^\infty dt t^{s-2} \sum_{n \neq 0, p, m} (-1)^n e^{-\left(\frac{\beta^2 n^2}{4t} + n\beta\mu + \frac{p^2 L_y^2}{4t}\right)} e^{-t\epsilon_m^2} \right), \quad (3.19)$$

wobei der erste Term implizit $L_y \rightarrow \infty$ annimmt. ϵ_m^2 sind die Eigenwerte von $-\partial_x^2 + \sigma^2(x) + \sigma'(x)$.

Wegen $\frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s-1}$ ergibt sich für den ersten, im Integranden temperaturunabhängigen Teil in (3.19)

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) = -\frac{\beta L_y}{2\pi} \left(\zeta_{k_\sigma^2}(-1) + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{k_\sigma^2}(s-1) \right). \quad (3.20)$$

Wir setzen wie im (1 + 1)-Fall auch $\zeta_{k_\sigma^2} = \zeta_{\bar{k}_\sigma^2} + (\zeta_{k_\sigma^2} - \zeta_{\bar{k}_\sigma^2})$ an, wobei \bar{k}_σ^2 der zu einem konstanten Referenzfeld $\bar{\sigma} = \text{const.}$ gehörende Operator sein soll. Die Operatoren k^2 beziehen sich dabei nur auf 1 Raumdimension, da wir angenommen haben, das Feld σ sei in y -Richtung konstant. Somit erhalten wir wieder Gleichung (3.9) mit $D = 1$ und wollen diese bei $s = -1$ auswerten. Erneut sichert die Wahl $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{L} \int \sigma(x)^2$ die Endlichkeit des Integrals an der unteren Integrationsgrenze und wegen $\frac{1}{\Gamma(-1)} = 0$ sogar das Verschwinden der gesamten Differenz bei $s = -1$. Die s -Ableitung bleibt ebenfalls endlich,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) &= -\frac{\beta L_y}{2\pi} \left(\zeta_{\bar{k}_\sigma^2}(-1) + (\zeta_{k_\sigma^2} - \zeta_{\bar{k}_\sigma^2})(-1) + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=-1} \zeta_{\bar{k}_\sigma^2}(s) \right. \\ &\quad \left. + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=-1} (\zeta_{k_\sigma^2} - \zeta_{\bar{k}_\sigma^2})(s) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Falls $\sigma(x) = \text{const.}$ ergibt die Rechnung natürlich das gleiche Ergebnis wie Gleichung (2.54) für homogene Felder, wobei m nun allerdings ein Skalar ist, da wir durch die zuvor getroffene Annahme $L_y \rightarrow \infty$ den Beitrag der Impulse in y -Richtung in der POISSON-Resummation vernachlässigt haben. Wissend, dass die Differenz der ζ -Funktionen sowie die Ableitung bei

$s = -1$ konvergiert, liefert diese für inhomogene $\sigma(x)$ den Zusatzbeitrag

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=-1} (\zeta_{k_\sigma^2} - \zeta_{\bar{k}_\sigma^2})(s) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=-1} \left(\sum_m \epsilon_m^{-2s} - \bar{\epsilon}_m^{-2s} \right) \quad (3.22)$$

$$= \sum_m (-\epsilon_m^2 \ln \epsilon_m^2 + \bar{\epsilon}_m^2 \ln \bar{\epsilon}_m^2) . \quad (3.23)$$

Der Beitrag zur effektiven Wirkung für $T, \mu = 0$ ist damit

$$S_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{1}{2g^2} \int dx dy \sigma^2(x, y) + \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(0)}(s) \quad (3.24)$$

$$= \frac{\beta V_S}{2g^2} \bar{\sigma}^2 + \frac{\beta V_S}{6\pi} \bar{\sigma}^3 + \frac{\beta V_S}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-L_x m \bar{\sigma}} \\ + \frac{\beta L_y}{4\pi} \sum_m (\epsilon_m^2 \ln \epsilon_m^2 - \bar{\epsilon}_m^2 \ln \bar{\epsilon}_m^2) . \quad (3.25)$$

Die Kopplungskonstante ist wie in (2.58) durch die Renormierungsbedingung zu ersetzen. Für den Beitrag endlicher Temperatur und endlichen chemischen Potentials nutzen wir aus, dass die zweite Summe in (3.19) formal genauso aussieht wie (2.22) mit $d = 2$ und $\sigma^2 \rightarrow \epsilon_m^2$ und anschließender Summation über m , weshalb wir einfach das Ergebnis (2.32) mit der dann korrekten Interpretation $|\epsilon_m| \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi^2 p^2}{L_y} + \epsilon_m^2}$ und $\sum_{\mathbf{m}} \rightarrow \sum_{m,p}$ wiederverwenden können. Im Limes $L_y \rightarrow \infty$ können wir die Summe über die Impulsquantenzahlen $p \in \mathbb{Z}$ mit dem Integral über kontinuierliche Impulse ersetzen. Übrig bleibt

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_{\mathcal{H}}^{(1)} = -\frac{L_y ds}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} - \mu)}) \right) . \quad (3.26)$$

Die vollständige effektive Wirkung für inhomogene $\sigma(x)$ in 2 + 1 Dimensionen ergibt sich bei Berücksichtigung der durch σ_s gegebenen Skale zu

$$S_{\text{eff}}[\sigma(x)] = \frac{\beta V_S}{12\pi} (2\bar{\sigma}^3 - 3\bar{\sigma}^2 \sigma_s) + \frac{\beta V_S}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-L_x m \bar{\sigma}} \\ + \frac{\beta L_y}{4\pi} \sum_m \left(\epsilon_m^2 \ln \left(\frac{\epsilon_m^2}{\sigma_s^2} \right) - \bar{\epsilon}_m^2 \ln \left(\frac{\bar{\epsilon}_m^2}{\sigma_s^2} \right) \right) \\ - \frac{L_y}{\pi} \int_0^{\infty} dp \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} - \mu)}) \right) \quad (3.27)$$

und wie zuvor auch gilt $U_{\text{eff}}[\sigma(x)] = \frac{S_{\text{eff}}[\sigma(x)]}{\beta V_S}$ mit $V_S = L_x L_y$. Der Beitrag für endliche μ und T lässt sich für $T \rightarrow 0$ vereinfachen,

$$U_{\text{eff}}^{(1)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{m, \epsilon_m^2 < \mu^2} \left(2\epsilon_m^2 \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}}{\sigma_s} \right) - \epsilon_m^2 \ln \left(\frac{\epsilon_m^2}{\sigma_s^2} \right) - 2\mu \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2} \right) . \quad (3.28)$$

Wir versuchen, auch dieses Potential numerisch zu minimieren. Zum Einsparen von Rechenzeit beschränken wir uns aus den Grenzfall $T \rightarrow 0$. Es scheint intuitiv, dass die Nicht-Existenz einer

inhomogenen kristallinen Phase bei $T = 0$ auch deren Fehlen für endliche T impliziert, da bei höhere Temperatur geordnete Strukturen unwahrscheinlicher werden. Da in $1 + 1$ Dimensionen stabile inhomogene Kondensate in Form reiner Cosinusfunktionen existierten, beginnen wir die Minimierung jeweils, indem wir einer Fourierkomponente eine endliche Amplitude, z.B. 1 zuweisen und die restlichen Fourierkomponenten auf 0 setzen. Wir führen die Minimierung für verschiedene initiale Fourierkomponenten p_k durch und erhalten die in Abbildung 3.3 dargestellten Ergebnisse, die wir folgendermaßen zusammenfassen wollen. Für $\mu < \mu_c = \sigma_s$ liegt das homogene Minimum bei $\sigma = \sigma_s$, bekannt aus Abschnitt 2.3.2, und ist offensichtlich auch im Raum der inhomogenen Felder global stabil. Trotzdem existieren lokale inhomogene Minima höherer Potentialwerte, siehe Abbildung 3.3a. Ein Beispiel für eine lokal minimierende inhomogene Feldkonfiguration ist in 3.4a abgebildet. Während manche inhomogenen Felder bereits bei kleinen μ metastabile Zustände darstellen, z.B. die blaue Kurve in Darstellung 3.3, werden andere Felder mit größeren Impulsen erst für größere μ metastabil. In Abbildung 3.3b ist das daran erkennbar, dass für manche Impulse bei kleinen μ keine von 0 verschiedene Amplitude $\bar{\sigma}$ gefunden wird, z.B. für die pinke Kurve bei $\mu \lesssim 0.6$.

Zur Klarheit sei noch einmal erwähnt, dass für $\mu < \mu_c$ der Zustand $\sigma = 0$ in die homogene Richtung instabil ist. Sollte eine inhomogene Konfiguration mit dominanter Impulskomponente p_k also nicht zumindest metastabil sein, wird der Minimierungsalgorithmus, bei endlichem c_k beginnend, nicht bei einer Feldkonfiguration mit $\bar{\sigma} = 0$ terminieren, sondern von dieser zum homogenen globalen Minimum übergehen. Deshalb sind in der Abbildung 3.3b für inhomogene Felder keine Punkte mit $\bar{\sigma} = 0$ geplottet bzw. für kleine $\bar{\sigma}$ nur mit geringer Datendichte, da hier am ehesten numerische Ungenauigkeiten bei der Minimierung auftreten.

Für $\mu \nearrow \mu_c$ nähern sich homogenes globales und inhomogene lokale Minima energetisch dem selben Wert $U_{\text{eff}} \approx -\frac{\sigma_s^3}{12\pi}$ und gehen dann für größere μ in dieselbe Kurve $U_{\text{eff}} = -\frac{\mu^3}{12\pi}$ über, die auch demselben Zustand mit Amplitude $\bar{\sigma} = \sigma = 0$ zuzuordnen ist, siehe Abbildung 3.3b. Das bedeutet, dass für große μ keine lokalen homogenen oder inhomogenen Minima außer bei $\sigma = 0$ existieren.

Im Diagramm 3.3b ist dennoch ein kleiner Bereich mit $\mu > \mu_c$ deutlich, in dem metastabile inhomogene Zustände mit von 0 verschiedener mittlerer quadratischer Amplitude $\bar{\sigma}$ existieren. Da die zugehörigen Amplituden dieser Zustände sehr klein sind und die Zustände im Raum der Fourierkomponenten, in dem sich unser Minimierungsalgorithmus bewegt, deshalb sehr nahe beim Feld $\sigma = 0$ liegen, impliziert diese Beobachtung die Existenz eines Bereiches der Instabilität von $\sigma = 0$ gegenüber inhomogenen Variationen. Die zugehörigen dominanten Impulse dieser Variationen liegen bei $p_k \approx 2\mu$. Aus den vergrößerten Abbildungen 3.3c und 3.3d geht hervor, dass manche inhomogenen Felder bis $\mu \approx 1.1\sigma_s$ metastabil und bis $\mu \approx 1.03\sigma_s$ sogar global stabil sind, also geringere Energie als das homogene Minimum haben. Ein Beispiel für einen global minimierenden Zustand ist in 3.4b gegeben.

Der genaue Bereich des Auftretens dieser inhomogenen Minima ist schwer abzuschätzen. Für $\mu = \sigma_s, T = 0$ ist das Potential, eingeschränkt auf homogene Kondensate $\sigma \in [0, \sigma_s]$, in $2 + 1$ Dimensionen bekanntermaßen vollständig flach. Daher ist es möglich, dass auch bei $\mu \approx \sigma_s$ in der Umgebung des Punktes $\mathbf{0}$ im Fourierraum das Potential nahezu flach und die Genauigkeit des gefundenen Minimums bei sinnvollem Zeitaufwand dadurch stark beschränkt ist.

Wir werden später in Abschnitt 3.3.2 mit etwas analytischer Vorarbeit Argumente finden,

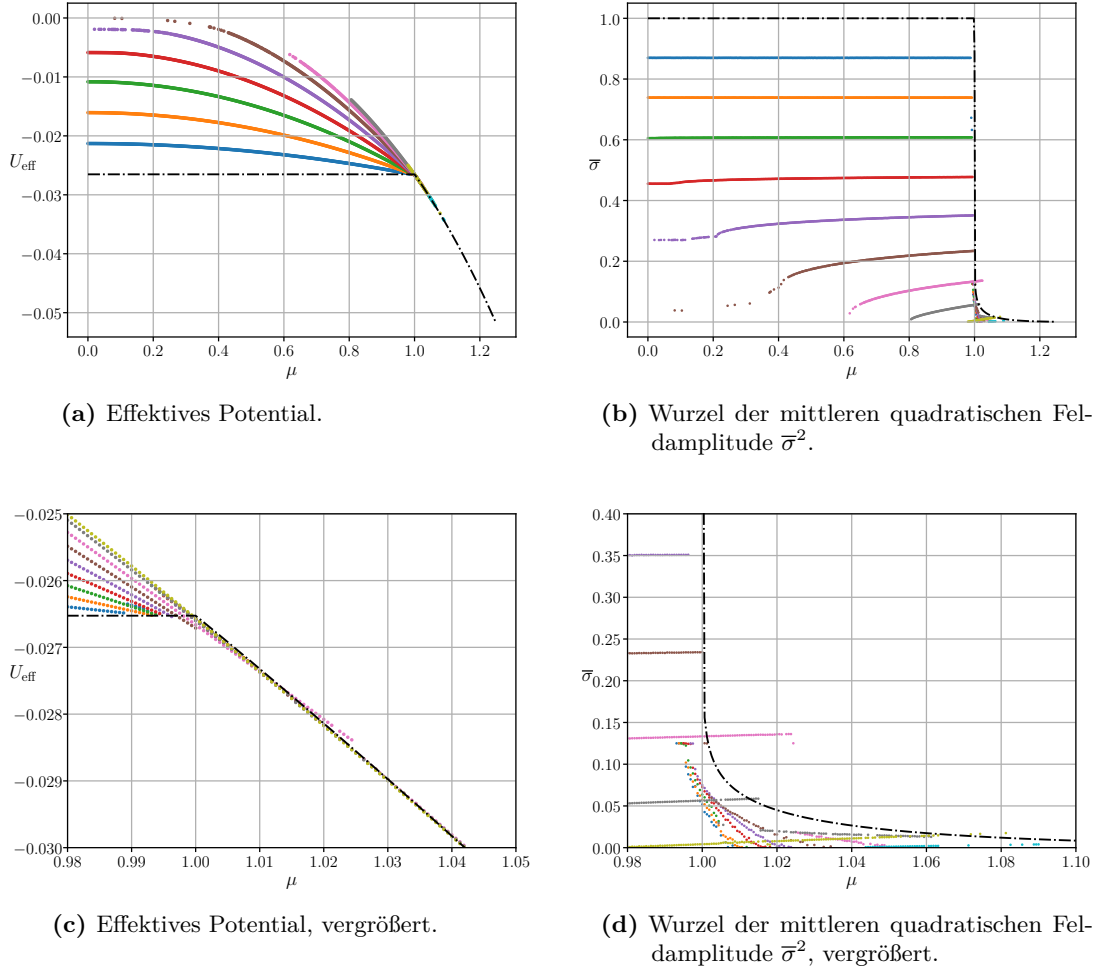


Abbildung 3.3: Vergleich der Eigenschaften lokaler inhomogener Minima (farbig) mit dem globalen Minimum der homogenen Felder gemäß (schwarz, gebrochene Linie) in Abhängigkeit von μ bei $T = 0$. Benachbarte farbige Datensätze entsprechen inhomogenen Konfigurationen, deren dominanteste Impulskomponenten sich um $\frac{2\pi}{L_x}$ unterscheiden, beginnend mit $p_{\text{blau}} = \frac{2\pi}{L_x}$. $L_x = 30\sigma_s^{-1}$, $L_y \rightarrow \infty$, $N = 251$. U_{eff} in Einheiten von σ_s^3 , $\bar{\sigma}$ und μ in Einheiten von σ_s .

dass die inhomogene Phase ein Artefakt endlicher Raumausdehnung L_x ist und für $L_x \rightarrow \infty$ verschwindet. Es sei angemerkt, dass wir auch direkt numerisch für sukzessiv größer werdende L_x das Minimum des Potentials für $T = 0$ und festes μ suchen und die Amplitude $\bar{\sigma}$ des numerisch gefundenen Minimums über L_x auftragen könnten, um möglicherweise ein Verschwinden von $\bar{\sigma}$ für große L_x zu beobachten. Allerdings bedarf die Variation des Gittervolumens für die Numerik auch eine bedachte Anpassung der Anzahl der Gitterpunkte. Für wachsende Anzahl an Gitterpunkten wird der numerische Algorithmus sehr langsam und außerdem ungenauer, da die Diagonalisierung der den Operator h_σ^2 repräsentierenden $N \times N$ -Matrix zunehmend ungenauere Ergebnisse liefert. Die Wahl größerer N bei festem L_x beeinflusste das Ergebnis der Minimierung aus Abbildung 3.4b qualitativ nicht.

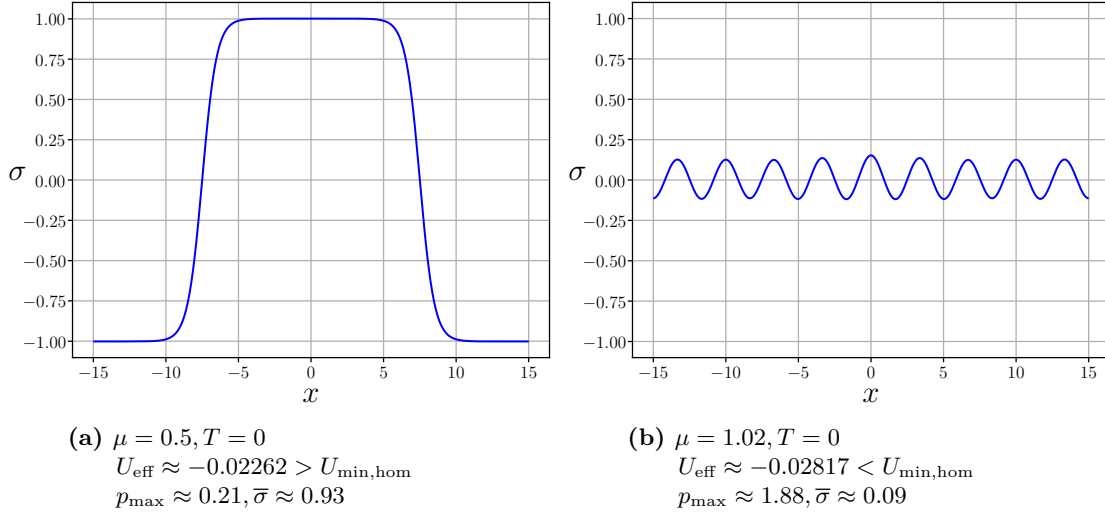


Abbildung 3.4: Beispiele inhomogener lokaler Minima des effektiven Potentials in $2 + 1$ Dimensionen. $N = 251$. x -Achse in Einheiten von σ_s^{-1} , U_{eff} in σ_s^3 , alle anderen Größen in σ_s .

3.3 Stabilitätsanalyse der homogenen Potentialminima

Wir wollen jetzt analytische Hinweise für die Existenz der inhomogenen Phase in $1 + 1$ Dimensionen bzw. die Nicht-Existenz einer inhomogenen Phase mit Kondensaten der Form $\sigma(x, y) = \sigma(x)$ in $2 + 1$ Dimensionen suchen. In Anlehnung an das Vorgehen der numerischen Minimierung wollen wir die Veränderung der Potentiale berechnen, wenn wir von einer homogenen Feldkonfiguration in eine inhomogene Richtung, charakterisiert durch eine entsprechende Richtung im Raum der Fourierkomponenten, variieren. Es interessiert also die Variation der Funktionen

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^{(1+1)}[\sigma(x)] &= \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right) + \frac{2\bar{\sigma}}{\pi L} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\bar{\sigma}L)}{m} - \frac{1}{L} \sum_m (|\epsilon_m| - |\bar{\epsilon}_m|) \\
 &\quad - \frac{1}{\beta L} \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(|\epsilon_m| - \mu)}) \right) \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^{(2+1)}[\sigma(x)] &= \frac{1}{12\pi} (2\bar{\sigma}^3 - 3\bar{\sigma}^2 \sigma_s) + \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-L_x m \bar{\sigma}} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_m (\epsilon_m^2 \ln \epsilon_m^2 - \bar{\epsilon}_m^2 \ln \bar{\epsilon}_m^2) \\
 &\quad - \frac{1}{\pi \beta L_x} \int_0^\infty dp \sum_m \left(\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \epsilon_m^2} - \mu)}) \right) \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

für eine Störung eines homogenen Feldes σ_0 durch eine Inhomogenität η , also $\sigma(x) = \sigma_0 + \alpha\eta(x)$. Für $T = 0$ vereinfachen sich die μ -abhängigen Beiträge,

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)}[\sigma(x)] \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right) + \frac{2\bar{\sigma}}{\pi L} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\bar{\sigma}L)}{m} - \frac{1}{L} \sum_m (|\epsilon_m| - |\bar{\epsilon}_m|)$$

$$+ \frac{1}{L} \sum_{\substack{m \\ |\epsilon_m| < \mu}} (|\epsilon_m| - \mu) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^{(2+1)}[\sigma(x)] \xrightarrow{T \rightarrow 0} & \frac{1}{12\pi} (2\bar{\sigma}^3 - 3\bar{\sigma}^2 \sigma_s) + \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-L_x m \bar{\sigma}} \\ & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_m (\epsilon_m^2 \ln \epsilon_m^2 - \bar{\epsilon}_m^2 \ln \bar{\epsilon}_m^2) \\ & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_m^2 < \mu^2}} \left(2\epsilon_m^2 \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2} \right) - \epsilon_m^2 \ln(\epsilon_m^2) - 2\mu \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier und im Folgenden der Parameter σ_s in den Argumenten der Logarithmen der ϵ -abhängigen Summen weggelassen, es seien also die Eigenwerte ϵ und $\bar{\epsilon}$ in Einheiten von σ_s zu verstehen.

Wir berechnen die erste und zweite Ableitung beider Potentiale bezüglich der Variation von σ bei $T = 0$ und setzen $\frac{d}{d\alpha} \equiv '$. Gilt für die betrachtete Variation $\bar{\sigma}(0) > 0$, so können die exponentiell abfallenden Beiträge endlichen Raumvolumens für hinreichend große L vernachlässigt werden. Für $\bar{\sigma}(0) = 0$ hingegen müssen wir sie bei der Variation berücksichtigen. Für diesen Fall berechnen wir diese Terme zur Übersicht separat im Anhang A.3.2:

$$K^{(1+1)}(\bar{\sigma}) := \frac{2\bar{\sigma}}{\pi L_x} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\bar{\sigma}L_x)}{m} \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} K^{(1+1)} \xrightarrow{\bar{\sigma} \rightarrow 0} -\frac{1}{L_x} \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2}{d\bar{\sigma}^2} K^{(1+1)} \xrightarrow{\bar{\sigma} \rightarrow 0} -\frac{\ln \bar{\sigma}}{\pi} - \frac{\ln\left(\frac{L_x}{2}\right)}{\pi} - \frac{\gamma}{\pi} + \frac{5}{6\pi} \quad (3.35)$$

bzw. für 2 + 1 Dimensionen

$$K^{(2+1)}(\bar{\sigma}) := \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-m\bar{\sigma}L_x} \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} K^{(2+1)} \xrightarrow{\bar{\sigma} \rightarrow 0} 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{d^2}{d\bar{\sigma}^2} K^{(2+1)} \xrightarrow{\bar{\sigma} \rightarrow 0} \frac{\ln(\bar{\sigma}L_x) + 1}{\pi L_x}. \quad (3.38)$$

Zusammen mit den restlichen Beiträgen ergibt sich

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^{(1+1)'} &= \frac{\bar{\sigma}}{\pi} \ln\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s}\right) \bar{\sigma}' + K^{(1+1)'}(\bar{\sigma}(\alpha)) - \frac{1}{L_x} \sum_m (|\epsilon_m|' - |\bar{\epsilon}_m|') \\ &+ \frac{1}{L_x} \sum_{\substack{m \\ |\epsilon_m| < \mu}} |\epsilon_m|' \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^{(2+1)'} &= \frac{1}{2\pi} (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}\sigma_s) \bar{\sigma}' + K^{(2+1)'}(\bar{\sigma}(\alpha)) \\ &+ \frac{1}{4\pi L_x} \sum_m (\epsilon_m^{2'} (\ln \epsilon_m^2 + 1) - \bar{\epsilon}_m^{2'} (\ln \bar{\epsilon}_m^2 + 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_m^2 < \mu^2}} \left(2\epsilon_m^{2'} \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2} \right) \right. \\
 & \left. - \underbrace{\frac{\epsilon_m^2 \epsilon_m^{2'}}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}) \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}} + \frac{\mu \epsilon_m^{2'}}{\sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}}}_{=\epsilon_m^{2'}} - \epsilon_m^{2'} (\ln \epsilon_m^2 + 1) \right). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^{(1+1)''} &= \frac{\bar{\sigma}}{\pi} \ln \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s} \right) \bar{\sigma}'' + \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s} \right) + 1 \right) (\bar{\sigma}')^2 + K^{(1+1)''}(\bar{\sigma}(\alpha)) \\
 & - \frac{1}{L_x} \sum_m (|\epsilon_m|'' - |\bar{\epsilon}_m|'') + \frac{1}{L_x} \sum_{\substack{m \\ |\epsilon_m| < \mu}} |\epsilon_m|'' \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^{(2+1)''} &= \frac{1}{2\pi} (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma} \sigma_s) \bar{\sigma}'' + \frac{1}{2\pi} (2\bar{\sigma} - \sigma_s) (\bar{\sigma}')^2 + K^{(2+1)''}(\bar{\sigma}(\alpha)) \\
 & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_m (\epsilon_m^{2''} (\ln \epsilon_m^2 + 1) - \bar{\epsilon}_m^{2''} (\ln \bar{\epsilon}_m^2 + 1)) \\
 & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_m \left(\frac{(\epsilon_m^{2'})^2}{\epsilon_m^2} - \frac{(\bar{\epsilon}_m^{2'})^2}{\bar{\epsilon}_m^2} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_m^2 < \mu^2}} \epsilon_m^{2''} \left(2 \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2} \right) + 1 \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_m^2 < \mu^2}} \frac{(\epsilon_m^{2'})^2}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}) \sqrt{\mu^2 - \epsilon_m^2}} \\
 & - \frac{1}{4\pi L_x} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_m^2 < \mu^2}} \left(\epsilon_m^{2''} (\ln \epsilon_m^2 + 1) + \frac{(\epsilon_m^{2'})^2}{\epsilon_m^2} \right). \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

In jedem Fall sind die ϵ_m bzw. $\bar{\epsilon}_m$ die positiven Wurzeln der Eigenwerte ϵ_m^2 bzw. $\bar{\epsilon}_m^2$ des einkomponentigen Operators $-\partial_x^2 + \sigma^2 + \sigma'$ im Bezug auf das entsprechende Feld $\sigma(x)$ bzw. $\bar{\sigma}$. Deswegen ignorieren wir die Betragsstriche, was für die Ableitungen gegebenenfalls die Annahme des rechtsseitigen Grenzwertes bedeutet, auch wenn die Betragsfunktion strenggenommen nicht differenzierbar bei 0 ist. Wir berechnen nun die Ableitungen von $\bar{\sigma}$, ϵ und $\bar{\epsilon}$ bzw. von deren Quadraten. Mit $\langle f|g \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f^*(x)g(x)$ gilt

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\langle \sigma | \sigma \rangle} = \sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 2\alpha \langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha^2 \langle \eta | \eta \rangle} \quad (3.43)$$

$$\bar{\sigma}' = \frac{\langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha \langle \eta | \eta \rangle}{\sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 2\alpha \langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha^2 \langle \eta | \eta \rangle}} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}'' &= \frac{\langle \eta | \eta \rangle}{\sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 2\alpha \langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha^2 \langle \eta | \eta \rangle}} \\
 & - \frac{(\langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha \langle \eta | \eta \rangle)^2}{\sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 2\alpha \langle \sigma_0 | \eta \rangle + \alpha^2 \langle \eta | \eta \rangle}^3}. \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Bei $\alpha = 0$ müssen wir die Fälle $\sigma_0 \neq 0$ und $\sigma_0 = 0$ unterscheiden. Da wir periodische

Variationen η um 0 nutzen wollen, gilt natürlich auch $\langle \sigma_0 | \eta \rangle = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Fall } \sigma_0 \neq 0 & \text{Fall } \sigma_0 = 0 \\ \bar{\sigma} = \sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle} & \bar{\sigma} = 0 \end{array} \quad (3.46)$$

$$\bar{\sigma}' = 0 \quad \bar{\sigma}' = \sqrt{\langle \eta | \eta \rangle} \quad (3.47)$$

$$\bar{\sigma}'' = \frac{\langle \eta | \eta \rangle}{\sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle}} \quad \bar{\sigma}'' = 0 \quad (3.48)$$

Für die Ableitungen der Eigenwerte des DIRAC Operators \bar{h}_σ erhalten wir

$$\bar{\epsilon}_{ml}^2 = \bar{\sigma}^2 + p_m^2 \quad \bar{\epsilon}_{ml} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2} \quad (3.49)$$

$$\bar{\epsilon}_{ml}' = 2\bar{\sigma}\bar{\sigma}' \quad \bar{\epsilon}_{ml}' = \frac{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2}} \quad (3.50)$$

$$\bar{\epsilon}_{ml}^{2''} = 2\bar{\sigma}\bar{\sigma}'' + 2(\bar{\sigma}')^2 \quad \bar{\epsilon}_{ml}'' = \frac{\bar{\sigma}\bar{\sigma}''}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2}} - \frac{\bar{\sigma}^2(\bar{\sigma}')^2}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2}^3} + \frac{(\bar{\sigma}')^2}{\sqrt{\bar{\sigma}^2 + p_m^2}}, \quad (3.51)$$

wobei wir die Entartung der Impulsquantenzahlen $m \in \mathbb{N}(\setminus\{0\})$ bzw. Impulse $p_m = \frac{2\pi m}{L_x}$ jetzt mit notieren. Falls nicht anderweitig eingeschränkt, läuft also hier und im Folgenden der Index m über \mathbb{N}_0 und l nur für $m \neq 0$ über $\{0, 1\}$. Die Indexmengen für m und l seien damit erklärt und werden in den folgenden Rechnungen nicht explizit notiert. Erneut unterscheiden wir bei $\alpha = 0$ die Fälle $\sigma_0 \neq 0$ und $\sigma_0 = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Fall } \sigma_0 \neq 0 & \text{Fall } \sigma_0 = 0 \\ \bar{\epsilon}_{ml} = \sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + p_m^2} & \bar{\epsilon}_{ml} = p_m \end{array} \quad (3.52)$$

$$\bar{\epsilon}_{ml}' = 0 \quad \bar{\epsilon}_{ml}' = \begin{cases} m = 0 : & \sqrt{\langle \eta | \eta \rangle} \\ m \neq 0 & 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\bar{\epsilon}_{ml}'' = \frac{\langle \eta | \eta \rangle}{\sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + p_m^2}} \quad \bar{\epsilon}_{ml}'' = \begin{cases} m = 0 : & 0 \\ m \neq 0 : & \frac{\langle \eta | \eta \rangle}{p_m} \end{cases} \quad (3.54)$$

Weiterhin benötigen wir die Ableitungen von ϵ_{ml} bzw. ϵ_{ml}^2 . Wir verfolgen dazu den bekannten Ansatz der RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungstheorie, siehe z.B. [32], und wählen die konkrete Störung $\eta(x) = \cos(p_k x)$ mit $p_k \in \frac{2\pi}{L_x} \mathbb{N}(\setminus\{0\})$ und dem Störungsparameter $\alpha \equiv c_k$, also der zum Impuls p_k gehörenden Fourierkomponente:

$$\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}_\sigma^{(0)} + c_k \mathcal{H}_\sigma^{(1)} + \frac{c_k^2}{2} \mathcal{H}_\sigma^{(2)} \quad (3.55)$$

$$\lambda_{ml} = \lambda_{ml}^{(0)} + c_k \lambda_{ml}^{(1)} + \frac{c_k^2}{2} \lambda_{ml}^{(2)} + \dots \quad (3.56)$$

$$|\phi_{ml}\rangle = c_k |\phi_{ml}^{(1)}\rangle + \frac{c_k^2}{2} |\phi_{ml}^{(2)}\rangle + \dots \quad (3.57)$$

mit $\mathcal{H}_\sigma \equiv h_\sigma^2$, $\lambda_{ml} \equiv \epsilon_{ml}^2$ sowie $^{(n)} \equiv \left(\frac{d}{dc_k} \right)^n \Big|_{c_k=0}$. Die Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung erhält man dann durch sukzessives Lösen der Eigenwertgleichung $\mathcal{H}_\sigma |\phi_{ml}\rangle = \lambda_{ml} |\phi_{ml}\rangle$ in den jeweiligen Ordnungen von c_k . Die Eigenwertgleichung des ungestörten Operators $\mathcal{H}_\sigma^{(0)}$

wird trivialerweise durch ebene Wellen gelöst,

$$\phi_{ml}^{(0)}(x) = e^{i\varphi} e^{(-1)^l i p_m x} \quad \lambda_{ml}^{(0)} = \sigma_0^2 + p_m^2, \quad (3.58)$$

mit ebenfalls diskretisierten Impulsen $p_m \in \frac{2\pi}{L_x} \mathbb{N}_0$. Da es sich in unserem Fall für $m > 0$ um entartete Störungsrechnung handelt, sind zunächst alle Linearkombinationen $\sum_l u_l |\phi_{ml}^{(0)}\rangle$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{ml}^{(0)} \equiv \lambda_m^{(0)}$. Hebt sich die Entartung der Eigenwerte in höherer Ordnung auf, so sind die zugehörigen Eigenvektoren bei endlicher Amplitude der Störung hingegen bis auf eine komplexe Phase eindeutig festgelegt. Da man annimmt, die Eigenvektoren als Potenzreihe des Störungsparameters darstellen zu können, sind die zu benutzenden Eigenzustände 0. Ordnung durch $\lim_{c_k \rightarrow 0} |\phi_{ml}(c_k)\rangle = |\phi_{ml}^{(0)}\rangle$ festgelegt. Für diese folgt aus dem Ansatz

$$\lambda_{ml}^{(1)} \delta_{ll'} = \langle \phi_{ml'}^{(0)} | \mathcal{H}_\sigma^{(1)} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle, \quad (3.59)$$

was zur Bestimmung einer adaptierten Basis auf dem jeweiligen Eigenraum $\text{Eig}(\lambda_m)$ genutzt werden kann. Dabei wird nicht etwa $\mathcal{H}_\sigma^{(1)}$ simultan auf dem gesamten Hilbertraum diagonalisiert – das ist im Allgemeinen nur möglich, falls $[\mathcal{H}_\sigma^{(0)}, \mathcal{H}_\sigma^{(1)}] = 0$ – sondern nur auf den jeweiligen Eigenräumen. Die Matrixelemente $\langle \phi_{m'l'}^{(0)} | \mathcal{H}_\sigma^{(1)} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle$ mit $m' \neq m$ können von 0 verschieden sein. Dabei ist es möglich, dass (3.59) für jede Basis eines Eigenraumes erfüllt ist und keine einschränkende Bedingung darstellt. Dann müssen weitere Bedingungen in höheren Ordnungen der Störungsrechnung gesucht werden, siehe zum Beispiel [33] für eine systematische Ausführung. In unserem Beispiel tritt dieser Fall ein und scheint eine sehr aufwendige Rechnung zu verlangen, da die meisten Eigenwerte bis zu höheren als 1. und 2. Ordnung degeneriert bleiben und das Verfahren gerade von der Ordnung abhängt, in welcher sich die Entartung auflöst. Man kann jedoch folgendermaßen argumentieren, dass unser Ergebnis der Stabilitätsanalyse für $\alpha = 0$ fast unabhängig von der Wahl der Basis sein sollte und wir daher auch mit einer einfachen Basis und möglicherweise falschen Ergebnissen in 2. Ordnung aus der Störungsrechnung arbeiten können:

$$U_{\text{eff}} = \sum_{m,l} f(\epsilon_{ml}^2) \quad (3.60)$$

$$U'_{\text{eff}} = \sum_{m,l} f'(\epsilon_{ml}^2) \epsilon_{ml}^{2l} = \sum_m f'(\epsilon_m^2) \sum_l \langle \phi_{ml}^{(0)} | \mathcal{H}_\sigma^{(1)} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle \quad (3.61)$$

$$U''_{\text{eff}} = \sum_{m,l} f''(\epsilon_{ml}^2) (\epsilon_{ml}^{2l})^2 + \sum_{m,l} f'(\epsilon_{ml}^2) \epsilon_{ml}^{2l} \quad (3.62)$$

$$= \sum_{m,l} f''(\epsilon_{ml}^2) (\epsilon_{ml}^{2l})^2 + \sum_m f'(\epsilon_m^2) \left(\sum_l \langle \phi_{ml}^{(0)} | \mathcal{H}_\sigma^{(2)} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle + 2 \sum_{n \neq m} \sum_{k,l} \frac{|\langle \phi_{nk}^{(0)} | \mathcal{H}_\sigma^{(1)} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle|^2}{\epsilon_m - \epsilon_n} \right), \quad (3.63)$$

mit den bekannten Ableitungen der Eigenwerte aus der Störungsrechnung [32]. Wir haben dazu gegebenenfalls den Index l unterdrückt, da für $\alpha = 0$ die Energie eines Zustandes nur durch die Impulsquantenzahl m bestimmt wird. Wir bemerken nun noch $\sum_l \langle \phi_{ml}^{(0)} | \mathcal{O} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle = \text{Tr}_{\text{Eig}(\epsilon_m)} \mathcal{O}$ und $\sum_{kl} |\langle \phi_{nk}^{(0)} | \mathcal{O} | \phi_{ml}^{(0)} \rangle|^2 = \text{Tr}_{\text{Eig}(\epsilon_n)} (\mathcal{O} \mathcal{P}_{\text{Eig}(\epsilon_m)} \mathcal{O})$ sowie die Basisunabhängigkeit vom Spuoperator

Tr und Projektionsoperator P. Die gleiche Argumentation gilt nicht für $\sum_{ml} f''(\epsilon_{ml}^2)(\epsilon_{ml}^{2l})^2$. Wir müssen also zumindest die ϵ_{ml}^{2l} korrekt berechnen, dazu genügt aber die Wahl einer adaptierten Basis für die 1. Ordnung in der Störungsrechnung.

Wir wählen also die einfache Basis

$$\phi_{ml}^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & m = 0 \quad (l = 0) \\ e^{(-1)^l i p_m x} & m > 0 \quad (l \in \{0, 1\}) . \end{cases} \quad (3.64)$$

Um Gleichung (3.59) zu sichern, müssen wir nur für den Fall $k \in 2\mathbb{N}$ für den Eigenraum zum Impuls $p_m = \frac{p_k}{2}$ die Eigenfunktionen

$$\phi_{m0}^{(0)}(x) = e^{i p_m x} + \sqrt{\frac{\sigma_0 - i \frac{p_k}{2}}{\sigma_0 + i \frac{p_k}{2}}} e^{-i p_m x} \quad (3.65)$$

$$\phi_{m1}^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{\sigma_0 + i \frac{p_k}{2}}{\sigma_0 - i \frac{p_k}{2}}} e^{i p_m x} - e^{-i p_m x} \quad (3.66)$$

wählen, wobei alle Eigenfunktionen bis auf komplexe Phasen bestimmt sind. Die gemäß der obigen Argumentation hinreichend korrekten Ergebnisse für die Ableitungen der Eigenwerte ϵ_{ml}^2 nach c_k bei $c_k = 0$ lauten damit

$$\epsilon_{ml}^{2l} = (-1)^l \sqrt{\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + p_m^2} \delta_{2m,k} \quad (3.67)$$

$$\epsilon_{ml}^{2l} = \begin{cases} 2m \neq k : & 1 - \frac{4\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + p_k^2}{p_k^2 - 4p_m^2} \\ 2m = k : & 1 - \frac{4\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + p_k^2}{4p_k^2} . \end{cases} \quad (3.68)$$

Zuletzt halten wir noch fest

$$\epsilon'_{ml} = \frac{\epsilon_{ml}^{2l}}{2\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} \quad \epsilon''_{ml} = \frac{\epsilon_{ml}^{2l}}{2\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} - \frac{(\epsilon_{ml}^{2l})^2}{4\sqrt{\epsilon_{ml}^2}^3} . \quad (3.69)$$

3.3.1 Inhomogene Variation in 1+1 Dimensionen

Falls nicht explizit anders notiert, gilt hier und im Folgenden $' \equiv \frac{d}{dc_k} |_{c_k=0}$. Wir behandeln nun die Ausdrücke (3.39) und (3.41) genauer.

Fall $\mu < \mu_c, \sigma_0 = \sigma_{\text{min,hom}} = \sigma_s$

Wir können im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ den aus (3.33) folgenden Beitrag vernachlässigen. Wegen $\epsilon_{ml}|_{c_k=0} = \sqrt{\sigma_0^2 + p_m^2} \geq \sigma_s$ und $\mu < \mu_c < \sigma_s$ liefert der μ -abhängige Teil des Potentials keinen Beitrag. Weiterhin verschwinden die ersten Ableitungen fast aller Größen. Die einzigen für den Fall $k \in 2\mathbb{N}$ nicht verschwindenden Ableitungen $0 \neq \epsilon'_{m0} = -\epsilon'_{m1}$ der beiden Entartungen von $m = \frac{k}{2}$ kompensieren sich gerade, sodass gilt

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)'} = 0 . \quad (3.70)$$

In der zweiten Ableitung verschwinden bei $\sigma_0 = 1$ (in Einheiten von σ_s) die direkt $\bar{\sigma}$ -abhängigen und wie zuvor auch die μ -abhängigen Terme. Wir nutzen $\epsilon_{ml}^2|_{c_k=0} \equiv \bar{\epsilon}_{ml}^2|_{c_k=0}$, sowie $\langle \eta | \eta \rangle = \frac{1}{2}$

für die speziell gewählte Cosinus-Variation aus. Beim Durchführen der Summation über l ist zu beachten, dass $m = 0$ nicht entartet ist.

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)''} = -\frac{1}{L} \sum_{m,l} (\epsilon_{ml}'' - \bar{\epsilon}_{ml}'') \quad (3.71)$$

$$= -\frac{1}{L} \sum_{m,l} \left(\frac{\epsilon_{ml}^{2''} - 1}{2\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} - \frac{(\epsilon_{ml}^{2'})^2}{4\sqrt{\epsilon_{ml}^2 - 3}} \right) \quad (3.72)$$

$$= -\frac{1}{L} \left(\sum_m \left(\frac{\epsilon_{ml}^{2'} - 1}{\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} \right) - \frac{\epsilon_0^{2''} - 1}{2\sqrt{\epsilon_0^2}} - \frac{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}{2\sqrt{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}} \delta_k^{2Z} \right) \quad (3.73)$$

Hier haben wir die Abkürzung $\delta_k^{2Z} \equiv (k+1) \bmod 2$ eingeführt, da bestimmte Terme nur für geradzahlige k auftreten. Für die Übersichtlichkeit bearbeiten wir einzeln

$$-\frac{\epsilon_0^{2''} - 1}{2\sqrt{\epsilon_0^2}} = \frac{1}{2\sigma_0} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{p_k^2} \quad (3.74)$$

und

$$\sum_m \left(\frac{\epsilon_{ml}^{2'} - 1}{\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} \right) = \sum_{m \neq \frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2 + p_m^2}} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_m^2 - p_k^2} - \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_k^2} \delta_k^{2Z}. \quad (3.75)$$

Für $L \rightarrow \infty$ geht die Summe über in ein Integral und wir nutzen die Approximation mithilfe der EULER-MCLAURIN-Formel [34],

$$\sum_{m \neq \frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2 + p_m^2}} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_m^2 - p_k^2} \rightarrow \frac{L}{2\pi} (\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}) \mathcal{P} \int_0^\infty dp \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2 + p^2}} \frac{1}{p^2 - \frac{p_k^2}{4}} - \frac{1}{2\sigma_0} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{p_k^2} \quad (3.76)$$

$$= -\frac{L}{2\pi} (\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}) \frac{\text{artanh}\left(\frac{p_k}{\sqrt{4\sigma_0^2 + p_k^2}}\right)}{\frac{p_k}{2} \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}} - \frac{1}{2\sigma_0} \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{p_k^2}, \quad (3.77)$$

wobei weder für gerade noch für ungerade k tatsächlich ein divergenter Term in der Summe auftritt, weshalb wir hier den CAUCHYSCHEN-Hauptwert \mathcal{P} berechnen.

Wir nehmen zunächst $k \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ an. Damit erhalten wir

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)''} = -\frac{1}{L} \left(-\frac{L}{2\pi} (\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}) \frac{\text{artanh}\left(\frac{p_k}{\sqrt{4\sigma_0^2 + p_k^2}}\right)}{\frac{p_k}{2} \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}} \right) \quad (3.78)$$

$$= \frac{\sqrt{4\sigma_0^2 + p_k^2}}{2\pi p_k} \text{artanh}\left(\frac{p_k}{\sqrt{4\sigma_0^2 + p_k^2}}\right) > 0. \quad (3.79)$$

Die für den Fall $k \in 2\mathbb{N}$ zusätzlich auftretenden Terme sind alle > 0 , woraus wir allgemein $U_{\text{eff}}^{(1+1)''} > 0$ folgern können. Die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden k ist außerdem nur für die Betrachtung endlicher L nötig. Wird der Grenzwert $L \rightarrow \infty$ ausgewertet, sind einzelne Summanden immer mit einem Faktor $\frac{1}{L}$ gegenüber der Summe bzw. dem Integral unterdrückt und

können vernachlässigt werden. Damit ist das homogene Feld $\sigma_0 = \sigma_s$, welches für $\mu < \mu_c = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$ in der Menge homogener Felder den global stabilen Zustand darstellt, auch stabil gegenüber den betrachteten inhomogenen Variationen. Die Forderung $\forall m : \epsilon_{ml}|_{c_k=0} > \mu$ ist tatsächlich über μ_c hinaus für $\mu < \sigma_s$ erfüllt und das homogene Feld $\sigma = \sigma_s$ damit für $\mu < \sigma_s$ sowohl in homogene als auch inhomogene Richtung mindestens metastabil. Offensichtlich genügt die einfache Stabilitätsanalyse hier nicht, um die Existenz der beobachteten inhomogenen Phasen für $\mu > \frac{2}{\pi}\sigma_s$ zu folgern.

Fall $\mu > \mu_c, \sigma_0 = \sigma_{\text{min,hom}} = 0$

Erneut verschwinden in der ersten Ableitung fast alle Terme, die nichtverschwindenden Ableitungen der ϵ_{ml} für $m = \frac{k}{2}$ kompensieren sich aufgrund verschiedener Vorzeichen. Weiterhin ist $\bar{c}_0' = \sqrt{\langle \eta | \eta \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $\eta = \cos(p_k x)$. Dieser Beitrag kompensiert sich gerade mit der Ableitung von (3.33), wobei für die gewählte Variation und mit $\sigma_0 = 0$ natürlich $\frac{d}{dc_k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\bar{\sigma}}$ gilt. Der Ursprung ist damit unter Benutzung von $U_{\text{eff}}(\bar{\sigma}) = U_{\text{eff}}(|\bar{\sigma}|)$ ein Extremum.

Wir berechnen daher die 2. Ableitung $U_{\text{eff}}^{(1+1)''}$ bei $c_k = 0$. Offensichtlich ist für $\sigma_0 = 0$ der Term $\frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right)$ nicht 2-mal differenzierbar bei $c_k = 0$ bzw. $\bar{\sigma} = 0$, der Beitrag $\frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s} \right) + 1 \right) (\bar{\sigma}')^2$ zur 2. Ableitung divergiert logarithmisch gegen $-\infty$. Gleichermaßen ist auch (3.33) nicht 2-mal differenzierbar bei 0, die 2. Ableitung divergiert logarithmisch gegen $+\infty$. In Summe liefern diese nicht differenzierbaren Beiträge jedoch das endliche Ergebnis

$$\frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_s} \right) + 1 \right) (\bar{\sigma}')^2 + \frac{d^2}{dc_k^2} K^{(1+1)} \bar{\sigma} \rightarrow \infty \approx -\frac{\ln \left(\frac{L\sigma_s}{2} \right)}{2\pi} - \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{11}{12\pi}. \quad (3.80)$$

Wir fahren fort mit der Ableitung des 2-mal differenzierbaren Beitrags, hier gekennzeichnet durch \sim ,

$$\tilde{U}_{\text{eff}}^{(1+1)''} = -\frac{1}{L} \sum_{m,l} (\epsilon_{ml}'' - \bar{\epsilon}_{ml}'') + \frac{1}{L} \sum_{\substack{m,l \\ \epsilon_{ml} < \mu}} \epsilon_{ml}'' \quad (3.81)$$

$$= -\frac{1}{L} \sum_{\substack{m,l \\ \epsilon_{ml} \geq \mu}} (\epsilon_{ml}'' - \bar{\epsilon}_{ml}'') + \frac{1}{L} \sum_{\substack{m,l \\ \bar{\epsilon}_{ml} < \mu}} \bar{\epsilon}_{ml}'' \quad (3.82)$$

$$= -\frac{1}{L} \sum_{\substack{m \\ \epsilon_{ml} \geq \mu}} \left(\frac{\epsilon_{ml}^{2''} - 1}{\sqrt{\epsilon_{ml}^2}} - \frac{(\epsilon_{ml}^{2'})^2}{2\sqrt{\epsilon_{ml}^2}^3} \right) + \frac{1}{L} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ \bar{\epsilon}_{ml} < \mu}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}_{ml}^2}} \quad (3.83)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{\substack{m \neq \frac{k}{2} \\ \bar{\epsilon}_{ml} \geq \mu}} \frac{1}{p_m} \frac{p_k^2}{p_k^2 - 4p_m^2} + \frac{1}{L} \frac{L}{2\pi} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ \bar{\epsilon}_{ml} < \mu}} \frac{1}{m} \\ + \frac{1}{L} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{p_k^2}{4p_k^2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{p_k^2}{4}}} \right)}_{= \frac{3}{2p_k}} \delta_k^{2Z} \Theta \left(\frac{p_k}{2} - \mu \right). \quad (3.84)$$

Wie zuvor auch treten zusätzlich Terme für gerade k auf, da die erste und zweite Ableitung des Eigenwertes zur Impulsquantenzahl $m = \frac{k}{2}$ sich qualitativ von den anderen unterscheidet.

Zusätzlich muss jetzt mithilfe der HEAVISIDE-Funktion Θ unterschieden werden, ob der zugehörige Impuls $\frac{p_k}{2}$ ober- oder unterhalb von μ liegt. Diese ist hier eher symbolisch zu verstehen, $\Theta\left(\frac{p_k}{2} - \mu\right) = 1 \iff \frac{p_k}{2} \geq \mu$ und $\Theta\left(\mu - \frac{p_k}{2}\right) = 1 \iff \frac{p_k}{2} < \mu$, sonst liefern die entsprechenden Terme keinen Beitrag. Im Rahmen der Approximation $L \rightarrow \infty$ wird der Zusatzterm jedoch um einen Faktor $\frac{1}{L}$ unterdrückt sein, wir vernachlässigen ihn daher im Folgenden.

Erneut möchten wir diesen Ausdruck für die 2. Ableitung für $L \rightarrow \infty$ betrachten. Es gilt

$$\sum_{\substack{m \neq 0 \\ \bar{\epsilon}_{ml} < \mu}} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{L\mu}{2\pi} \rfloor} \frac{1}{m} = H_{\lfloor \frac{L\mu}{2\pi} \rfloor} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{L\mu}{2\pi}\right) + \gamma, \quad (3.85)$$

wobei wir Gebrauch von der Abschätzung der Partialsummen der harmonischen Reihe mithilfe der EULER-MASCHERONI-Konstante $\gamma = -\Gamma'(1) \approx 0.57721$ gemacht haben. Die andere auftretende Summe approximieren wir wieder durch den Hauptwert eines Integrals,

$$\sum_{\substack{m \neq \frac{k}{2} \\ \bar{\epsilon}_{ml} \geq \mu}} \frac{1}{p_m} \frac{p_k^2}{p_k^2 - 4p_m^2} = \frac{L}{2\pi} \mathcal{P} \int_{\mu}^{\infty} dp \frac{1}{p} \frac{p_k^2}{p_k^2 - 4p^2} \quad (3.86)$$

$$= \frac{L}{2\pi} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|\frac{p_k^2}{4} - \mu^2|}{\mu^2}\right). \quad (3.87)$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\tilde{U}_{\text{eff}}^{(1+1)''} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{|\frac{p_k^2}{4} - \mu^2|}{\mu^2}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{L\mu}{2\pi}\right) + \gamma\right) \quad (3.88)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{L^2 |\frac{p_k^2}{4} - \mu^2|}{4\pi^2}\right) + \frac{\gamma}{2\pi} \quad (3.89)$$

und für die gesamte 2. Ableitung mit den Termen (3.80)

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)''} = \frac{1}{4\pi} \ln\left(\frac{|\frac{p_k^2}{4} - \mu^2|}{\pi^2 \sigma_s^2}\right) + \frac{11}{12\pi}. \quad (3.90)$$

Es fällt auf, dass für $\mu \rightarrow \frac{p_k}{2}$ der Ausdruck für $U_{\text{eff}}^{(1+1)''}$ beliebig negativ werden kann. Das impliziert für $\mu > \mu_c$ die Instabilität des homogenen Minimums $\sigma_0 = 0$ gegenüber inhomogenen Cosinusvariationen bestimmter Frequenzen p_k . Quantitativ sagt die vorgenommene Rechnung die Existenz inhomogener Minima für $U_{\text{eff}}^{(1+1)''} < 0$ voraus, also für die Impulse

$$2\sqrt{\mu^2 - \pi^2 \sigma_s^2 \exp\left(-\frac{11}{3}\right)} < p_k < 2\sqrt{\mu^2 + \pi^2 \sigma_s^2 \exp\left(-\frac{11}{3}\right)}, \quad (3.91)$$

wobei die untere Grenze im Falle negativer Radikanden mit 0 zu ersetzen ist. Es ist zu beachten, dass für $\mu < \mu_c$ zwar eine von $\sigma_0 = 0$ ausgehende inhomogene Variation möglicherweise ein tieferes Minimum erzeugt, allerdings muss dieses nicht tiefer liegen als das homogene Minimum bei $\sigma_0 = \sigma_s$ in diesem Bereich des Phasendiagramms. Die Stabilitätsanalyse in Form einer

Taylorreihe des Potentials bis zur 2. Ordnung lässt keine Aussage zur Tiefe eines möglichen Minimums zu, dazu werden im Abschnitt 3.4 Rechnungen mit einem anderen Ansatz versucht. Die vorgenommene Näherung sagt voraus, dass für $\mu < \sigma_s \pi e^{-\frac{11}{6}} \approx 0.502 \sigma_s$ das Feld $\sigma = 0$ instabil bezüglich Variationen niedriger Frequenzen ist, während darüber der instabile Bereich sich auf eine zunehmend kleinere Umgebung von μ beschränkt. Wir erinnern daran, dass $\mu = \frac{\sigma_s}{2}$ der exakte Wert ist, bei dem $\sigma = 0$ von einem instabilen zu einem metastabilen Zustand übergeht im Bezug auf homogene Variationen. $\sigma_s \pi e^{-\frac{11}{6}}$ ist hingegen nur eine Approximation, die gegebenenfalls durch Einbezug von Korrekturtermen höherer Ordnung in der Ableitung der Summe (3.33) verbessert werden kann. Weiterhin haben wir in Darstellung 3.2 beobachtet, dass die metastabilen inhomogenen Zustände nur schlecht durch eine einzelne Impulskomponente beschrieben sind. Unter Hinzunahme der numerischen Erkenntnisse sowie der Annahme, dass der gefundene Wert $\sigma_s \pi e^{-\frac{11}{6}}$ eine Approximation des wahren Wertes $\frac{\sigma_s}{2}$ ist, lassen sich die in Tabelle 3.1 zusammengefassten neuen Erkenntnisse für das Phasendiagramm bei $L \rightarrow \infty, T = 0$ formulieren. Das Ergebnis (3.90) lässt sich nur schlecht auf die numerischen Ergebnisse bei der

$\frac{\mu}{\sigma_s}$	$< \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \dots \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi} \dots 1$	> 1
$\sigma = 0$	instabil			
$\sigma = \sigma_s$	global stabil		lokal stabil	instabil
inhomogen	lokal stabil		global stabil	
$\hookrightarrow \frac{p_{\max}}{\sigma_s}$	$< 2\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{4}}$		$2\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma_s^2} - \frac{1}{4}} \dots 2\sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma_s^2} + \frac{1}{4}}$	

Tabelle 3.1: Zusammenfassung der Ergebnisse der Variationsrechnung in 1 + 1 Dimensionen bei $T = 0$.

gewählten Diskretisierung anwenden. Problematisch ist hauptsächlich die Näherung (3.86) der Summe durch den Hauptwert eines Integrals, besonders, wenn die Integrationsgrenze μ nahe bei der Singularität $\frac{p_k}{2}$ des Integranden liegt.

Neben diesem Zwischenergebnis soll noch ein Effekt erwähnt werden, der für endliche L , wie es im numerischen Minimierungsalgorithmus der Fall ist, zur Entstehung eines inhomogenen Minimums des effektiven Potentials beitragen kann. Die Summen über ϵ_{ml} in (3.39) können zusammengefasst werden durch

$$-\frac{1}{L} \sum_{\substack{m,l \\ \epsilon_{ml} \geq \mu}} \epsilon'_{ml}. \quad (3.92)$$

Wird nun für die Störung eine Frequenz p_k mit $k \in 2\mathbb{N}$ gewählt, hebt sich die Entartung der Eigenwerte $\epsilon_{\frac{k}{2}0}, \epsilon_{\frac{k}{2}1}$ in erster Ordnung auf, denn $\epsilon'_{\frac{k}{2}0} = -\epsilon'_{\frac{k}{2}1}$. Mit Anwachsen der Amplitude c_k der Störung entfernen sich diese Eigenwerte voneinander, bis einer dieser beiden Eigenwerte die durch $\epsilon_{ml} = \mu$ definierte Grenze überschreitet. Dann kompensieren sich die entgegengesetzt betragsgleichen Beiträge zu $\tilde{U}_{\text{eff}}^{(1+1)'}_{\text{eff}}$ nicht mehr. Diesem Punkt ist eine endliche Amplitude $c_k^{(0)}$

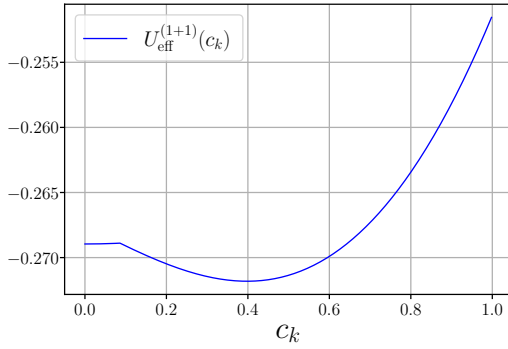
zuzuordnen. Die 1. Ableitung ist hier unstetig mit

$$\lim_{c_k \searrow c_k^{(0)}} U_{\text{eff}}^{(1+1)'} = \lim_{c_k \nearrow c_k^{(0)}} U_{\text{eff}}^{(1+1)'} - \frac{1}{2L}. \quad (3.93)$$

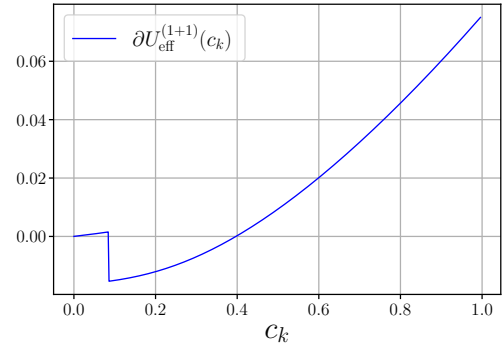
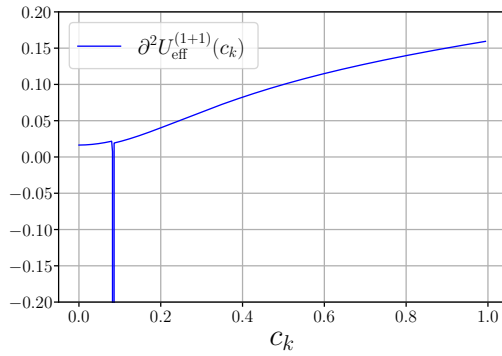
Das Vorzeichen dieses Sprunges ist immer negativ, da abhängig vom Vorzeichen von $\epsilon_{\frac{k}{2}l}|_{c_k=0} - \mu$ entweder ein positiver Beitrag zu $U_{\text{eff}}^{(1+1)'}$ wegfällt oder ein negativer Beitrag hinzukommt. Die Sprunghöhe $|\epsilon'_{ml}| = \frac{1}{2L}$ kann für kleine $c_k^{(0)}$ genähert werden durch die 1. Ableitung der Eigenwerte bei $c_k = 0$, die Güte dieser Approximation könnte durch Einbezug höherer Ordnungen der Störungsrechnung verbessert werden. Ein beispielhafter Verlauf des Potentials mit einem durch diesen Mechanismus niedrigeren Potential für ein inhomogenes σ -Feld ist in Abbildung 3.5 zu sehen. Die Amplitude $c_k^{(0)}$ bei Einsetzen des Sprunges der 1. Ableitung ist approximiert durch

$$c_k^{(0)} \approx \left| \frac{\mu^2 - \epsilon_{\frac{k}{2}l}^2}{\epsilon_{\frac{k}{2}l}^2} \right| = \frac{|\mu^2 - \frac{p_k^2}{4}|}{\frac{p_k}{2}}. \quad (3.94)$$

Auch für $k \notin 2\mathbb{N}$ treten in ähnlicher Weise Unstetigkeitsstellen der 1. Ableitung auf, auch wenn die entsprechenden entarteten Eigenwerte nicht unbedingt aufspalten. Für $L \rightarrow \infty$ verschwindet dieser Effekt nicht, die Sprunghöhe der Unstetigkeiten geht gegen 0, die Anzahl solcher Sprünge tendiert allerdings gegen ∞ , da wegen $\Delta p = \frac{2\pi}{L}$ auch die Anzahl der Eigenwerte in einem betrachteten Intervall zunimmt.



(a) Verlauf des Potentials.


 (b) Verlauf der 1. Ableitung des Potentials. Die Sprunghöhe der Unstetigkeit beträgt $\approx -\frac{1}{2L} = 0.167$.


(c) Verlauf der 2. Ableitung des Potentials.

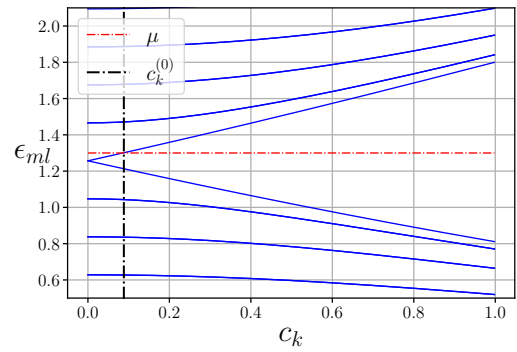

 (d) Verlauf der zu $\frac{p_k}{2}$ benachbarten Eigenwerte von h_σ .

Abbildung 3.5: Beispiel für inhomogene Variation $\eta(x) = \cos(p_k x)$: $N = 251, L = 30\sigma_s^{-1}, T = 0, \sigma_0 = 0, \mu = 1.3\sigma_s, k = 12, \frac{p_k}{2} \approx 1.257\sigma_s$. ϵ_{ml} und c_k in Einheiten σ_s , U_{eff} in σ_s^2 .

3.3.2 Inhomogene Variation in 2+1 Dimensionen

Wir beschäftigen uns nun mit der Auswertung der Ausdrücke (3.40) und (3.42).

Fall $\mu < \mu_c, \sigma_0 = \sigma_{\text{min,hom}} = \sigma_s$

Die ersten Ableitungen aller Größen verschwinden oder kompensieren sich entsprechend, es gilt $U_{\text{eff}}^{(2+1)'} = 0$. Für die zweite Ableitungen bemerken wir $\mu < \mu_c = 1 = \sigma_0$ in Einheiten von σ_s und damit $\forall m, l : \epsilon_{ml}^2 > \mu^2$. Einfaches Einsetzen der Ableitungen $\epsilon_{ml}^{2''}$ bzw. $\bar{\epsilon}_{ml}^{2''}$ aus Gleichung (3.68) unter Benutzung von $\epsilon_{ml}^2|_{c_k=0} = \bar{\epsilon}_{ml}^2|_{c_k=0}$ liefert

$$U_{\text{eff}}^{(2+1)''} = \frac{1}{4\pi L_x} \left(2 \sum_{\substack{m>0 \\ m \neq \frac{k}{2}}} (\ln \epsilon_{ml}^2 + 1) \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_m^2 - p_k^2} - \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{p_k^2} \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}} - \left(\ln \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) + 1 \right) \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_k^2} \right) \delta_k^{2\mathbb{Z}}. \quad (3.95)$$

Wir behandeln einzeln

$$\sum_{\substack{m>0 \\ m \neq \frac{k}{2}}} (\ln \epsilon_{ml}^2 + 1) \frac{4\sigma_0^2 + p_k^2}{4p_m^2 - p_k^2} = \frac{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}}{\frac{\pi^2}{L_x^2}} \sum_{\substack{m>0 \\ m \neq \frac{k}{2}}} \frac{\ln \epsilon_{ml}^2 + 1}{4m^2 - k^2}. \quad (3.96)$$

Die Terme $\frac{1}{4m^2 - k^2}$ mit $m < \frac{k}{2}$ in der Summe sind negativ, für $m > \frac{k}{2}$ positiv. Da $\ln \epsilon_{ml}^2 + 1$ im Bezug auf m monoton wächst, gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_{m>0} \frac{\ln \epsilon_{ml}^2 + 1}{4m^2 - k^2} > (\ln \epsilon_{\frac{k}{2}l}^2 + 1) \sum_{m>0} \frac{1}{4m^2 - k^2}. \quad (3.97)$$

Mit

$$\sum_{m>0} \frac{1}{4m^2 - k^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - k^2} + \frac{1}{k^2} \right) = -\frac{\pi}{4k} \cot \left(\frac{\pi k}{2} \right) + \frac{1}{2k^2} \quad (3.98)$$

erhalten wir deshalb für $k \in 2\mathbb{N} + 1$

$$U_{\text{eff}}^{(2+1)''} > \frac{1}{4\pi L_x} \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) \left(\frac{\ln \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) + 1}{\frac{p_k^2}{4}} - \frac{1}{\frac{p_k^2}{4}} \right) > 0. \quad (3.99)$$

Diese Abschätzung genügt offensichtlich für $\sigma_0 = \sigma_s$. Das homogene Minimum ist also stabil gegenüber Cosinus-Variationen mit ungeraden Impulsquantenzahlen. Für $k \in 2\mathbb{N}$ verfahren wir analog,

$$\sum_{\substack{m>0 \\ m \neq \frac{k}{2}}} \frac{1}{4m^2 - k^2} = \lim_{k \rightarrow 2n} \left(-\frac{\pi}{4k} \cot \left(\frac{\pi k}{2} \right) + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{k^2 - 4n^2} \right) \quad (3.100)$$

$$\stackrel{k=2n+\delta}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi}{4(2n+\delta)} \left(\frac{2}{\pi\delta} - \frac{\pi\delta}{6} + \mathcal{O}(\delta^3) \right) + \frac{1}{4n\delta + \delta^2} \right) + \frac{1}{8n^2} \quad (3.101)$$

$$= \frac{3}{16n^2} = \frac{3}{4k^2}, \quad (3.102)$$

wobei wir die Entwicklung des Cotangens $\cot(z\pi + x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3)$ für $z \in \mathbb{Z}$ und kleine x nutzten. Daraus können wir für $k \in 2\mathbb{N}$ folgern

$$U_{\text{eff}}^{(2+1)''} > \frac{1}{4\pi L_x} \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) \left(\frac{3 \ln \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) + 1}{\frac{p_k^2}{4}} - \frac{1}{\frac{p_k^2}{4}} + 2 \left(\frac{1}{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}} - \frac{1}{4} \frac{\ln \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) + 1}{\frac{p_k^2}{4}} \right) \right) \quad (3.103)$$

$$= \frac{1}{4\pi L_x} \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right) \left(\frac{\ln \left(\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4} \right)}{\frac{p_k^2}{4}} + \frac{2}{\sigma_0^2 + \frac{p_k^2}{4}} \right) \quad (3.104)$$

$$\stackrel{\sigma_0=1}{>} 0. \quad (3.105)$$

Damit ist das homogene Minimum $\sigma_0 = \sigma_s$ des Potentials im Bereich $\mu < \mu_c$ bezüglich aller inhomogenen Variationen durch reine Cosinusfunktionen auch bei endlichem Volumen stabil.

Fall $\mu > \mu_c, \sigma_0 = \sigma_{\text{min,hom}} = 0$

Wie zuvor auch verschwindet die 1. Ableitung von $U_{\text{eff}}^{(2+1)}$. Insbesondere ist $\bar{\epsilon}_0^{2'} = 0$. Anders als im (1+1)-Fall treten für endliche L_x keine Sprünge in der 1. Ableitung auf, falls ein Eigenwert durch die Störung den Wert μ überschreitet, denn $2 \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \epsilon^2} \right) |_{\epsilon^2=\mu^2} = \ln \epsilon^2 |_{\epsilon^2=\mu^2}$. $U_{\text{eff}}^{(2+1)'}$ ist damit überall stetig, aber nicht notwendigerweise differenzierbar.

Wegen $\bar{\epsilon}_{ml}^{2''} = 1$ für alle ml divergiert der Term $\bar{\epsilon}_0^{2''} \ln \bar{\epsilon}_0^2$. Der gesamte Beitrag des Eigenwertes $\bar{\epsilon}_0^2$ zur 2. Ableitung ergibt mit der 2. Ableitung der Beiträge endlichen Raumvolumens (3.36) wieder ein endliches Zwischenergebnis,

$$\lim_{c_k \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi L_x} \left(\bar{\epsilon}_0^{2''} (\ln \bar{\epsilon}_0^2 + 1) + \frac{(\bar{\epsilon}_0^{2'})^2}{\bar{\epsilon}_0^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dc_k^2} K^{(2+1)} \right) \quad (3.106)$$

$$= \lim_{c_k \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{4\pi L_x} \left(\ln \left(\frac{c_k^2}{2} \right) + 1 + \frac{c_k^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi L_x} \ln \left(\frac{c_k^2}{2} L_x^2 \right) + \frac{1}{2\pi L_x} \right) \quad (3.107)$$

$$= \frac{\ln L_x^2 - 1}{4\pi L_x}. \quad (3.108)$$

Alle anderen Terme sind endlich, insbesondere gilt auch $\epsilon_0^{2''} = 0$ und besser noch $\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} (\epsilon_0^{2''} \ln \epsilon_0^2) = 0$. Für diesen 2-mal differenzierbaren Teil des Ausdrucks (3.42) berechnen wir das unhandliche Ergebnis

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{eff}}^{(2+1)''} &= -\frac{1}{4\pi} \\ &+ \frac{1}{2\pi L_x} \left(\sum_{\substack{m \neq \frac{k}{2} \\ p_m^2 \geq \mu^2}} \frac{p_k^2}{4p_m^2 - p_k^2} (\ln p_m^2 + 1) + \delta_k^{2Z} \Theta \left(\frac{p_k}{2} - \mu \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\ln \frac{p_k^2}{4} + 1 \right) \delta_k^{2Z} \Theta \left(\frac{p_k}{2} - \mu \right) \right) \\ &- \frac{1}{2\pi L_x} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ p_m^2 < \mu^2}} (\ln p_m^2 + 1) \\ &+ \frac{1}{2\pi L_x} \left(\sum_{\substack{m \neq \frac{k}{2} \\ p_m^2 < \mu^2}} \left(1 - \frac{p_k^2}{p_k^2 - 4p_m^2} \right) \left(2 \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - p_m^2} \right) + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \left(2 \ln \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \frac{p_k^2}{4}} \right) + 1 \right) \delta_k^{2Z} \Theta \left(\mu - \frac{p_k}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi L_x} \frac{\frac{p_k^2}{4}}{\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \frac{p_k^2}{4}}\right) \sqrt{\mu^2 - \frac{p_k^2}{4}}} \delta_k^{2Z} \Theta\left(\mu - \frac{p_k}{2}\right). \quad (3.109)$$

Eine analytische Betrachtung dieses Ausdruckes ist zunächst schwierig. Wir können versuchen, das Ergebnis summiert mit dem Beitrag (3.108) numerisch für möglichst große obere Summationsgrenzen $N \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Halten wir dazu zunächst μ und p_k fest und betrachten $U_{\text{eff}}^{(2+1)''}$ als Funktion von L_x . Für die Parameter $\mu = 1.02$ und $p_k \approx 1.88$, die in Abbildung 3.4b ein inhomogenes globales Minimum bewirkten, ergibt sich die in 3.6a dargestellte L_x -Abhängigkeit. Für zu kleine L_x oszilliert der Graph zum Teil stark und sagt für manche L_x , unter anderem auch für die zuvor genutzte Länge $L_x = 30\sigma_s^{-1}$, eine negative 2. Ableitung, also die Begünstigung einer inhomogenen Lösung voraus. Für große L_x konvergiert die Funktion stattdessen gegen einen positiven Wert, hier ≈ 0.00159 , sodass $\sigma = 0$ lokal stabil gegenüber der inhomogenen Variation ist.

Bilden wir den Grenzwert $L \rightarrow \infty$ und nutzen die Bezeichnung $p_k = 2q_k \equiv 2q$, so verbleibt

$$U_{\text{eff}}^{(2+1)''} = -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathcal{P} \int_{\mu}^{\infty} dp \frac{q^2}{p^2 - q^2} (\ln(p^2) + 1) + \mathcal{P} \int_0^{\mu} dp \frac{p^2}{p^2 - q^2} (2 \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - p^2}) + 1) - \underbrace{\int_0^{\mu} dp (\ln(p^2) + 1)}_{=\mu(\ln(\mu^2) - 1)} \right). \quad (3.110)$$

Die analytische Auswertung insbesondere des zweiten Integrals in diesem Ausdruck scheint erneut schwierig zu sein. Für den einfachen Fall $q = 0$ können wir die Integration jedoch explizit durchführen. Für $q \rightarrow 0$ strebt wegen $h_{\sigma} \rightarrow h_{\bar{\sigma}}$ das erste Integral gegen 0. Wir erhalten

$$U_{\text{eff}}^{(2+1)''} \Big|_{q=0} = \frac{\mu - 1}{4\pi}. \quad (3.111)$$

Bis auf einen Faktor 2 und in Einheiten von σ_s stimmt das mit der aus den Rechnungen in Abschnitt 2.3.2 für homogene Kondensate folgenden 2. Ableitung der Gleichung (2.61) bei $\sigma = 0$ überein. Der fehlende Faktor 2 ist ein Artefakt der anfänglichen Rechnung mit Impulskomponenten $p_k \neq 0$, da die 0. Komponente der Fourierreihe in (3.17) um einen Faktor 2 mehr gewichtet ist. In diesem Sinne ist das Ergebnis konsistent. Weiterhin können wir Gleichung (3.110) numerisch für jedes gegebene Parameterpaar (μ, q) berechnen. Obwohl die Hauptwerte der Integrale für $\mu = q$ nicht existieren, haben die Integranden an der kritischen Intervallgrenze in diesem Fall im Betrag die gleiche, bei $p = q$ divergente Reihenentwicklung, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen, weshalb die 2. Ableitung für alle (μ, q) endlich bleibt. Der Plot der sich aus Gleichung (3.110) ergebenden Niveaulinien ist in Abbildung 3.6b dargestellt. Offensichtlich ist $U_{\text{eff}}^{(2+1)''} > 0$ für $\mu > \mu_c = \sigma_s$ und alle q , sodass jede Cosinusvariation beliebiger Frequenz $p = 2q$ bis zur 2. Ordnung einen Anstieg des Potentials $U_{\text{eff}}^{(2+1)}$ verursacht, wodurch das homogene Minimum $\sigma = 0$ stabil gegenüber diesen Variationen ist. Das Verhalten der Niveaulinien für $\mu < \mu_c$ in Abbildung 3.6b ist außerdem konform mit der Beobachtung aus Abbildung 3.3, dass mit steigendem chemischen Potential neue Frequenzen der Variationen hinzukommen, bezüglich derer $\sigma = 0$ instabil ist.

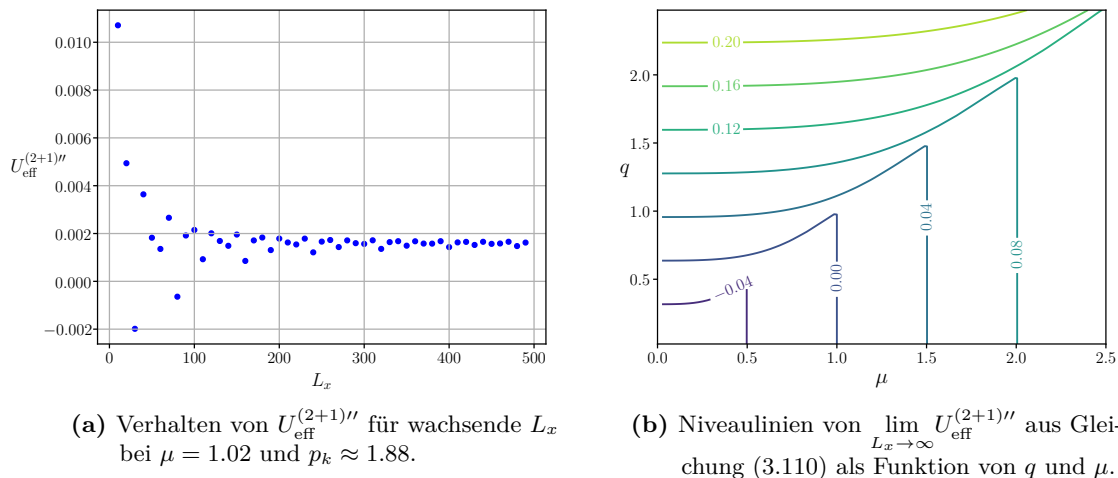


Abbildung 3.6: $U_{\text{eff}}^{(2+1)''}$ bei inhomogener Variationen für $L_x \rightarrow \infty$ und $\sigma_0 = 0$. L_x in Einheiten σ_s^{-1} , alle anderen Größen in σ_s .

Insgesamt konnten wir in diesem Abschnitt zeigen, dass für $\mu < \sigma_s$ das homogene globale Minimum $\sigma = \sigma_s$ stabil im Bezug auf cosinusförmige Variationen in eine Raumrichtung ist. Das Feld $\sigma = 0$ ist für $L_x \rightarrow \infty$ stabil gegenüber solchen Variationen für $\mu > \sigma_s$ und wird für ein gewisses Intervall möglicher Impulse der Variationen instabil bei $\mu < \sigma_s$. Für endliche L_x können in einer kleinen Umgebung von $(\mu, T) = (\sigma_s, 0)$ Instabilitäten des Feldes $\sigma = 0$ auftreten, die inhomogene globale Minima sehr geringer Amplitude bewirken.

3.4 Globale Approximation der Potentialvariation in 1+1 Dimensionen

Ziel dieses Abschnittes ist die Beschreibung von $U_{\text{eff}}^{(1+1)}$ als Funktion von c_k bzw. c , welche für hinreichend kleine, aber endliche c das Verhalten des Potentials gut nähert. Während wir mit den Mitteln der vorherigen Abschnitte bereits eine Taylorentwicklung um $c = 0$ aufstellen könnten, werden wir jetzt diskutieren, warum das nicht zielführend wäre und stattdessen eine Beschreibung abseits der Reihenentwicklung suchen.

3.4.1 Formulierung des Ansatzes mittels ADPT

Zuvor haben wir das Potential für eine Variation $\eta(x) = \cos(p_k x)$, $p_k > 0$ von $\sigma|_{c_k=0} \equiv 0$ ausgehend bei $c_k = 0$ über eine Stabilitätsanalyse beschrieben und für den (1+1)-Fall mit $\mu > \mu_c$ die Abschätzung (3.91) erhalten, für welche Impulse $p_k(\mu)$ im Limes $L \rightarrow \infty$ eine inhomogene Variation des σ -Feldes das Potential sinken lässt. Das Ansetzen der Variation $\sigma(x) = c_k \cos(p_k x)$ erzeugt im Spektrum des Operators $h_\sigma = \gamma_0 \gamma_1 \partial_x + \gamma_0 \sigma$ je eine Bandlücke um die Frequenzen $\pm q_k =: \pm \frac{p_k}{2}$. Für die Eigenwerte des quadrierten einkomponentigen Operators h_σ^2 sehen wir das auch an den unterschiedlichen Vorzeichen der Ableitungen für Impulse größer oder kleiner als q_k in Gleichung (3.68).

Für den mehrkomponentigen Operator h_σ finden wir in 0. Ordnung in c_k die Eigenwerte und Eigenfunktionen [35]

$$|\psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2|\epsilon_n^\pm|}} \begin{pmatrix} s_n^* \\ \pm s_n \end{pmatrix} e^{ip_n x} \quad \epsilon_n^\pm = \sqrt{p_n^2 + \sigma_0^2} \quad (3.112)$$

mit $p_n \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$ und $s_n = \sqrt{\sigma_0 + ip_n}$, die der Eigenwertgleichung $h_\sigma|\psi_n^\pm\rangle = \epsilon_n^\pm|\psi_n^\pm\rangle$ in 0. Ordnung in c_k genügen, wobei wir jetzt $\sigma_0 = 0$ setzen wollen. Herkömmliche Störungsrechnung bis zur 2. Ordnung mit diesem Ansatz liefert dann

$$\epsilon_n^\pm(c_k) \approx \epsilon_n^\pm(0) \pm \text{sgn}(p_n) \frac{c_k^2}{8} \left(\frac{1}{p_n - q_k} + \frac{1}{p_n + q_k} \right), \quad (3.113)$$

siehe zum Beispiel [6]. In diesem Ausdruck wurde keine Rücksicht auf die Wahl einer adaptierten Basis in 1. Ordnung Störungstheorie genommen, was zur Definitionslücke bei $n = \frac{k}{2}$ für $k \in 2\mathbb{N}$ führt, dieses Problem könnte jedoch einfach behoben werden. Im Limes $L \rightarrow \infty$ mit kontinuierlichen Impulsen divergiert die 2. Ableitung der Eigenwerte dennoch für $p \rightarrow \pm q$, wodurch die Korrekturen der Störungsrechnung nicht mehr hinreichend klein sind und die vorgenommene Reihenentwicklung bei zunehmend kleineren Amplituden bereits stark vom gesuchten Verlauf abweicht. Während z.B. in [36] argumentiert wird, dass der Fehler der Summe über alle Einteilchen-Energien des zugehörigen Schrödingeroperators in Gegenwart einer Bandlücke bei Benutzung des störungstheoretischen Ansatzes, den wir bisher verfolgt haben, von höherer als 2. Ordnung ist und sich die divergenten Beiträge auf beiden Seiten der Bandlücke effektiv kompensieren, werden die genannten Divergenzen bei Betrachtung nur eines Teils der Eigenwerte, wie es durch Einschränkungen der Form $\epsilon \geq \mu$ der Fall sein wird, problematisch.

Stattdessen kann der folgende, ebenfalls in [6] als „almost degenerate perturbation theory“ (ADPT) referenzierte bzw. alternativ auch in [37] vorgestellte Ansatz zur Berechnung von Bandlücken verfolgt werden: Zu Beginn spannen für ein fest gewähltes Vorzeichen \pm und $n \neq 0$ die Zustände $|\psi_n^\pm\rangle$ und $|\psi_{-n}^\pm\rangle$ den Eigenraum $\text{Eig}(\epsilon_n^\pm) \equiv \text{Eig}(\epsilon_{-n}^\pm)$ auf, o.B.d.A. betrachten wir nur den Fall $+$. Die Störung $\cos(p_k x)$ koppelt in 1. und 2. Ordnung nur Eigenzustände mit Impulsen p_n und $p_n \pm p_k$. Beim Übergang zum Kontinuum, in dem wir die Indices der Impulsquantenzahlen weglassen und die Störung mit der Frequenz $2q$ charakterisieren, können wir Zustände $|\psi_p\rangle$ und $|\psi_{p'}\rangle$ mit $p = q + \delta$ und $p' = -q + \delta$ für kleine $\delta \geq 0$ betrachten, die wegen dem nahezu gleichen Betrag der Impulse fast dieselbe Energie haben. Solche Zustände wechselwirken durch die Störung deutlich stärker miteinander als mit anderen Zuständen, erkennbar an

$$\langle \psi_p^{(0)} | \psi_{p'}^{(1)} \rangle = \frac{\langle \psi_p^{(0)} | h'_\sigma | \psi_{p'}^{(0)} \rangle}{\epsilon_p^{(0)} - \epsilon_{p'}^{(0)}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (3.114)$$

für den in 1. Ordnung der Eigenfunktionen bzw. in 2. Ordnung der Eigenwerte auftretenden Term der RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungsrechnung. Offensichtlich können wir deshalb annehmen, dass die gestörten Eigenfunktionen $\{|\psi_p\rangle, |\psi_{p'}\rangle\}$ in niedriger Ordnung fast ausschließlich im Unterraum aufgespannt von $\{|\psi_p^{(0)}\rangle, |\psi_{p'}^{(0)}\rangle\}$ liegen, weshalb in guter Näherung eine Diagonalisierung des gestörten Operators h_σ auf diesem 2-dimensionalen Unterraum für die Berechnung der Dispersionsrelation $\epsilon(p)$ nahe bei q genügt. Konkret bestimmen wir die gestörten Eigenwerte der

Zustände nahe der Bandlücke deshalb durch

$$\det \begin{pmatrix} \langle \psi_p^{(0)} | h_\sigma | \psi_p^{(0)} \rangle - \lambda & \langle \psi_p^{(0)} | h_\sigma | \psi_{p'}^{(0)} \rangle \\ \langle \psi_{p'}^{(0)} | h_\sigma | \psi_p^{(0)} \rangle & \langle \psi_{p'}^{(0)} | h_\sigma | \psi_{p'}^{(0)} \rangle - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (3.115)$$

was auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda(|p| + |p'|) + |pp'| - \frac{c^2}{4} \quad (3.116)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = q \pm \sqrt{\delta^2 + \frac{c^2}{4}} \quad (3.117)$$

führt. Für $c = 0$ erhalten wir damit wie erwartet die Eigenwerte $\lambda_1 = \epsilon_p^+$ und $\lambda_2 = \epsilon_{p'}^+$. Für $\delta = 0$ ergibt sich bekanntermaßen eine Bandlücke der Breite $|\lambda_1 - \lambda_2| = |c|$ bei den Frequenzen $\pm q$. Diese Rechnung ersetzt den für $p \rightarrow \pm q$ divergenten Beitrag $\frac{1}{p \mp q}$ der RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungsrechnung, da wir nur die Wechselwirkung des Zustandes $p \approx \pm q$ mit $p' = p \mp 2q$, nicht jedoch die Wechselwirkung mit $p \pm 2q$ berücksichtigt haben. Der wesentlich kleinere und für endliche Impulse p, q nicht divergente Beitrag $\frac{1}{p \pm q}$ kann aus der Störungsrechnung übernommen werden. Die Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Vorzeichen der Impulse und zugehörigen Eigenwerte liefert insgesamt für den Fall $|p_n| \approx q_k$, wobei wir zur diskretisierten Schreibweise zurückkehren, das Ergebnis

$$\epsilon_n^\pm = \pm \left(q_k + \operatorname{sgn}(|p_n| - q_k) \sqrt{(|p_n| - q_k)^2 + \frac{c_k^2}{4}} + \frac{c_k^2}{8(|p_n| + q_k)} \right). \quad (3.118)$$

Es fällt auf, dass dieser Ausdruck für $c_k = 0$ die gleiche 2. Ableitung nach c_k besitzt wie (3.113). Deshalb wollen wir, obwohl (3.118) in der Herleitung nur für Impulse nahe der Bandlücke gültig ist, diesen Ausdruck als globale Approximation der Eigenwerte, zumindest für hinreichend kleine c_k , weiter benutzen. Alternativ könnten wir manche Eigenwerte mit RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungsrechnung und andere Eigenwerte mithilfe von ADPT ausdrücken, was die folgenden Rechnungen jedoch sehr unübersichtlich machen würde. Trotzdem sehen wir, dass etwa für $p_n = 0$ die beiden Ansätze qualitativ voneinander abweichen. Weiterhin bleibt der letzte Term divergent für $p_n, q_k \rightarrow 0$. Für $q_k \gg c_k$ sollte die Näherung genügen. Während Abbildung 3.7a für große p_k und kleine c_k den Vorteil der ADPT gegenüber herkömmlicher Störungstheorie demonstriert, ist Erstere für kleine p_k und große c_k trotzdem unzureichend, siehe Abbildung 3.7b.

3.4.2 Berechnung eines globalen Ausdrucks für die Potentialvariation

Mit der Näherung (3.118) soll nun ein kompakter Ausdruck für $U_{\text{eff}}^{(1+1)}$ als Funktion von c_k gefunden werden. In der Numerik haben wir die Eigenwerte $\epsilon_n^\pm, n \in \mathbb{Z}$ als Wurzeln der in früheren Kapiteln behandelten Eigenwerte ϵ_{ml}^2 berechnet. Es gilt

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ l}} f(\sqrt{\epsilon_{ml}^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\epsilon_n^+). \quad (3.119)$$

$\epsilon_{ml}^2 \in \operatorname{spec}(-\partial_x^2 + \sigma^2 + \sigma')$ $\epsilon_n^+ \in \operatorname{spec}(\gamma^0 \gamma^1 \partial_x + \gamma^0 \sigma)$

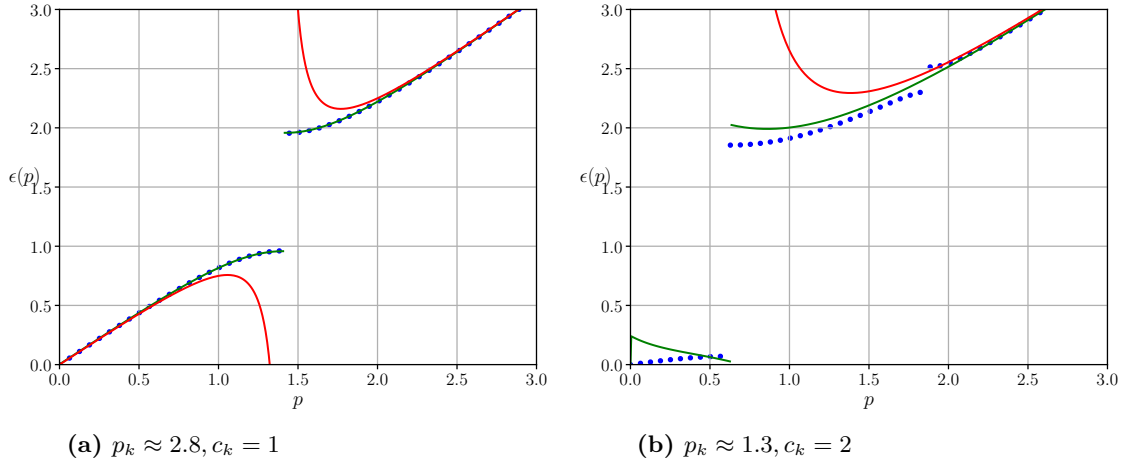


Abbildung 3.7: Beispielhafte Darstellung der gewählten Approximationen der (positiven) Eigenwerte von h_σ mit $\sigma(x) = c_k \cos(p_k x)$. Blau: Numerisch bestimmte Eigenwerte bei $L = 100$. Rot: Ergebnis der RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungsrechnung. Grün: Ergebnis aus ADPT (3.118). Alle Größen in Einheiten von σ_s .

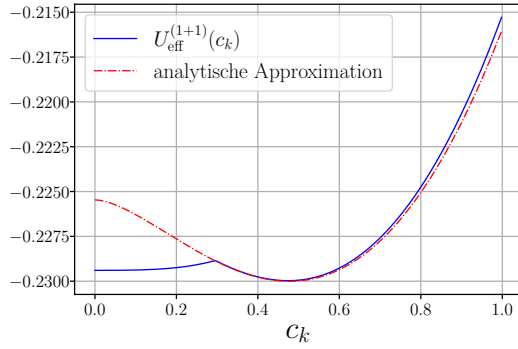
Da wir die Eigenwerte über die zugehörigen Impulse referenzieren und das Potential bei $T = 0$ unterschiedliche Summationen für Energien größer oder kleiner als μ verlangt, müssten wir für ein vollständiges Ergebnis den Ausdruck (3.118) mit μ gleichsetzen und implizit nach p bzw. p_n auflösen. Äquivalent wäre die Ermittlung einer Eigenwertdichte, sodass wir direkt über die Energien summieren bzw. integrieren könnten und nicht indirekt über die Impulse. Abhilfe verschafft die folgende Vereinfachung: Durch die Störung wird eine Lücke im Spektrum bei $p = q$ der Breite $|c|$ entstehen. Liegt μ in dieser Lücke, gilt also $\mu \in \left(q - \frac{|c|}{2}, q + \frac{|c|}{2}\right)$, so gilt auch

$$\epsilon_n^+ \geq \mu \quad \iff \quad p_n \geq q \quad \iff \quad n \geq n_0 = \left\lceil \frac{qL}{2\pi} \right\rceil, \quad (3.120)$$

was wir nun annehmen wollen. Wir berechnen damit die für Gleichung (3.31) benötigten Beiträge, vernachlässigen aber die Terme endlicher Raumausdehnung L , da wir eine Beschreibung des Potentials abseits von $c = 0$, also mit $\bar{\sigma} \neq 0$ suchen und diese Terme für $L \rightarrow \infty$ verschwinden. Die im Anhang A.3.3 aufgeführte längliche Rechnung liefert den übersichtlichen Ausdruck

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)}(c) = \frac{q^2}{2\pi} - \frac{q\mu}{\pi} - \frac{c^2}{16\pi} + \frac{c^2}{8\pi} \ln \left(\frac{2q|c|}{\sigma_s^2} \right). \quad (3.121)$$

Diese Funktion hat ein Maximum bei $(c, U_{\text{eff}}) = \left(0, \frac{q^2 - 2q\mu}{2\pi}\right)$ und ein Minimum bei $\left(\pm \frac{\sigma_s^2}{2q}, \frac{q^2 - 2q\mu}{2\pi} - \frac{\sigma_s^4}{64\pi q^2}\right)$. In den Abbildungen 3.8 und 3.9 ist der Verlauf von Gleichung (3.121) parallel zum numerischen Ergebnis dargestellt. In beiden Fällen ist erkennbar, dass die Approximation erst dann im Rahmen der vorgenommenen Näherungen $L \rightarrow \infty$ und der angenommenen Form der Eigenwerte $\epsilon_{ml}(c_k)$ eine gute Voraussage ist, wenn μ innerhalb der Bandlücke liegt. Der Wert bei $c = 0$ des Ausdrucks (3.121) ist scheinbar von q abhängig und daher offensichtlich falsch, denn bei $c = 0$ liegt keine inhomogene Variation vor. Hier gilt Bedingung (3.120) nicht,



(a) Verlauf des Potentials.

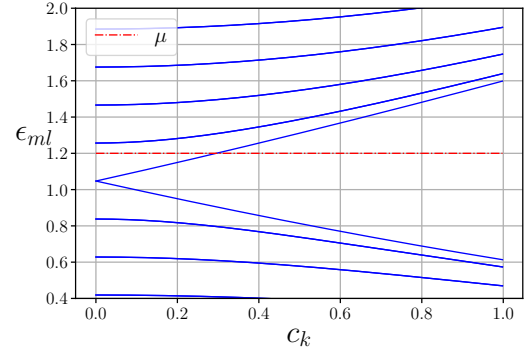
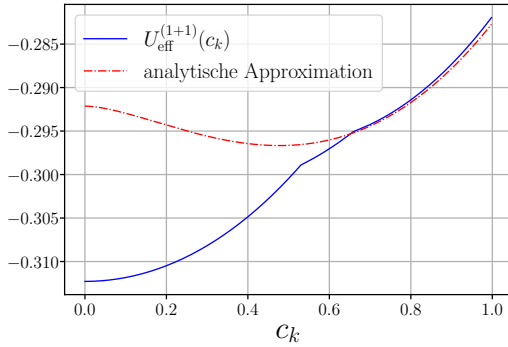

 (b) Verlauf der zu $\frac{p_k}{2}$ benachbarten Eigenwerte von h_σ .

Abbildung 3.8: Beispiel 1 für die Approximation (3.121) für die inhomogene Variation $\eta(x) = \cos(p_k x)$: $N = 251, L = 30\sigma_s^{-1}, T = 0, \sigma_0 = 0, \mu = 1.2\sigma_s, k = 10, \frac{p_k}{2} \approx 1.047\sigma_s$. U_{eff} in σ_s^2, c_k und ϵ_{ml} in σ_s .



(a) Verlauf des Potentials.

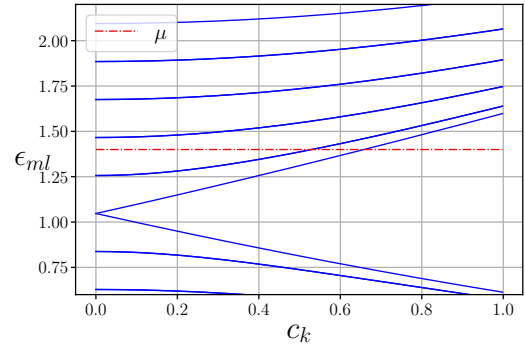

 (b) Verlauf der zu $\frac{p_k}{2}$ benachbarten Eigenwerte von h_σ .

Abbildung 3.9: Beispiel 2 für die Approximation (3.121) für die inhomogene Variation $\eta(x) = \cos(p_k x)$: $N = 251, L = 30\sigma_s^{-1}, T = 0, \sigma_0 = 0, \mu = 1.4, k = 10, \frac{p_k}{2} \approx 1.047\sigma_s$. U_{eff} in σ_s^2, c_k und ϵ_{ml} in σ_s .

außer im Fall $\mu = q$, für den wir den korrekten Wert $-\frac{\mu^2}{2\pi}$ finden, welchen wir mit dem Ergebnis (2.53) für homogene Kondensate bei $\sigma = 0$ bestätigen können. Das Minimum bei $c := c_{\min} = \pm \frac{\sigma_s^2}{2q}$ kann nur dann eine gute Approximation des tatsächlichen Potentialverlaufs sein, falls

$$\mu \in \left(q - \frac{|c_{\min}|}{2}, q + \frac{|c_{\min}|}{2} \right) \quad (3.122)$$

$$\iff q - \frac{\sigma_s}{4q} < \mu < q + \frac{\sigma_s}{4q} \quad (3.123)$$

$$\iff_{q > \frac{\sigma_s}{2}} \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \frac{\sigma_s^2}{4}} < q < \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{\sigma_s^2}{4}}. \quad (3.124)$$

Es sollte zusätzlich $q - \frac{|c_{\min}|}{2} > 0 \iff q > \frac{\sigma_s}{2}$ gelten. Spätestens an diesem Punkt versagt die einfach gewählte Approximation der Bandlücke, da die Eigenwerte im Verlauf der Störung ihr Vorzeichen nicht ändern bzw. sich nicht schneiden dürfen. Der Vergleich des Wertes des Minimums mit dem korrekten Wert $U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=0}$ sagt gegenüber $\sigma = 0$ stabile inhomogene Minima für Frequenzen $p = 2q$ der Variation voraus, falls

$$-\frac{\mu^2}{2\pi} > \frac{q^2 - 2q\mu}{2\pi} - \frac{\sigma_s^4}{64\pi q^2} \quad (3.125)$$

$$\iff \frac{(q - \mu)^2}{2\pi} < \frac{\sigma_s^4}{64\pi q^2} \quad (3.126)$$

$$\iff_{q > \frac{\sigma_s}{2}} \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \frac{\sqrt{2}\sigma_s^2}{8}} < q < \frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \frac{\sqrt{2}\sigma_s^2}{8}} \quad (3.127)$$

gilt. Man findet, dass mit der Bedingung (3.127) immer auch die Bedingung (3.124) erfüllt ist und die Vorhersage aus (3.127) zumindest für $q > \frac{\sigma_s}{2}$ näherungsweise gültig sein sollte. Der durch (3.127) definierte Bereich ist in Abbildung 3.10 blau markiert, wobei die Grenzen des vollständigen Bereiches der Gültigkeit der initialen Ungleichung $U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=0} > U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=c_{\min}}$ über den schattierten Bereich hinaus geplottet sind. Der schattierte Bereich spiegelt die Gültigkeit der zuvor diskutierten Bedingung $q > \frac{\sigma_s}{2}$ wieder. Zusätzlich sind in Abbildung 3.10 noch numerische Messungen dargestellt, bei denen für gegebene (μ, q) die Funktion $U_{\text{eff}}^{(1+1)}(c_k)$ aus Abschnitt 3.1 für verschiedene Amplituden c_k eines Feldes $\sigma = c_k \cos(p_k x)$ bei $T = 0$ mit numerisch bestimmten Eigenwerten berechnet und auf Minima untersucht wurde, sowie der durch die Bedingung (3.91) definierte Bereich, für den die Analyse aus Abschnitt 3.3 eine Instabilität von $\sigma = 0$ bezüglich inhomogener Variationen voraussagte. Wir sehen, dass besonders für größere

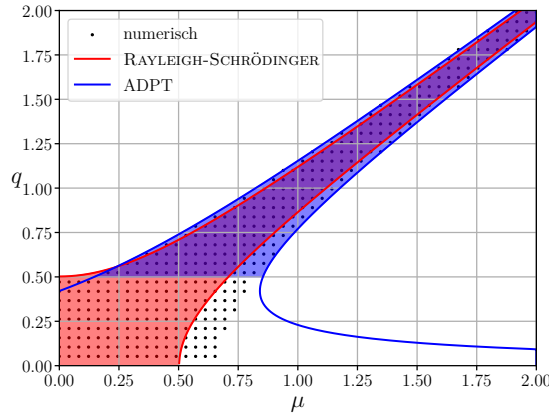


Abbildung 3.10: Vergleich der aus ADPT und RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-Störungsrechnung gewonnenen Vorhersagen, welche Frequenzen $p = 2q$ für gegebenes μ bei Variationen $\sigma(x) = c \cos(px)$ ein tieferes Minimum des Potentials $U_{\text{eff}}^{(1+1)}$ als bei $\sigma = 0$ bewirken, mit numerischen Ergebnissen, ermittelt bei $L = 60\sigma_s^{-1}, N = 501$. μ und q in Einheiten von σ_s .

(μ, q) eine gute Übereinstimmung beider Vorhersagen des Bereiches der Existenz inhomogener Zustände mit der Numerik vorliegt. Der neue Ansatz erlaubt es uns, für $\mu \rightarrow \infty$ das asymptotische

Verhalten $p = 2q \rightarrow 2\mu$ und $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{c_{\min}^2}{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}\mu}$ der inhomogenen Lösungen vorherzusagen, wie es bereits in Abbildung 3.1 beobachtet wurde. Für kleine q ist der durch die Annahme von (3.118) verursachte Fehler und insbesondere die Divergenz der Beiträge von $p_n, q_k \rightarrow 0$ deutlich in der Abweichung zur Numerik zu sehen. Während die zu $|p| < q$ gehörenden Eigenwerte in der Rechnung aufgrund der Annahme $\epsilon \geq \mu \iff p \geq q$ keinen Beitrag liefern, bräuchten wir für die Eigenwerte zu $p \gtrsim q$, für die p nur wenig größer als q ist, eine bessere Approximation als (3.118), die im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ weder für $p \rightarrow q$ noch für $p, q \rightarrow 0$ divergent ist. Die Stabilitätsanalyse liefert für kleine μ eine bessere Vorhersage, scheitert aber auch daran, einen Bereich offensichtlich metastabiler inhomogener Zustände ausgehend von $0.5\sigma_s \lesssim \mu \lesssim 0.65\sigma_s$ gut zu beschreiben.

Das Versagen der Approximation mittels ADPT für kleine q hindert uns auch daran, eine sinnvolle Angabe für die Phasengrenze $B \rightarrow S$ aus dem Diagramm 3.1a zu machen, die unterscheidet, ab wann eine Variation zu inhomogenen Feldern tatsächlich ein tieferes Potential liefert als das konstante Feld $\sigma_0 = \sigma_s$ für $\mu < \mu_c = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$. Dazu müssten wir $U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=c_{\min}}$ mit $U_{\text{min,hom}}^{(1+1)} = -\frac{\sigma_s^2}{4\pi}$ vergleichen und das minimale μ suchen, für das irgendein q die Ungleichung $U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=c_{\min}} < U_{\text{min,hom}}^{(1+1)}$ erfüllt. Wegen $U_{\text{eff}}^{(1+1)}|_{c=c_{\min}} \rightarrow -\infty$ für $q \rightarrow 0$ erhielten wir damit keine sinnvolle Aussage. Wie zuvor auch könnten wir die Gültigkeit der Näherung auf $q > \frac{\sigma_s}{2}$ einschränken, obwohl $q < \frac{\sigma_s}{2}$ formal zu tieferen Potentialwerten führen würde. Naives Einsetzen von $q = \frac{\sigma_s}{2}$ in die Ungleichung

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)} \Big|_{c_{\min}} = \frac{q^2 - 2q\mu}{2\pi} - \frac{\sigma_s^4}{64\pi q^2} < -\frac{\sigma_s^2}{4\pi} = U_{\text{min,hom}}^{(1+1)} \quad (3.128)$$

und Auflösen nach μ liefert $\mu > \frac{5}{8}\sigma_s = 0.625\sigma_s$, was allenfalls nur eine schlechte Approximation der genauen Phasengrenze bei $\mu = \frac{2}{\pi} \approx 0.636\sigma_s$ liefert.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir widmen uns nun noch einer Zusammenfassung der Ergebnisse. Zunächst konnten wir in Kapitel 2 einen regularisierten und renormierten Ausdruck für die effektive Wirkung bzw. äquivalent für das effektive Potential für homogene Kondensate finden. Wesentliches Werkzeug dafür war die auf analytischer Fortsetzung basierende Regularisierung mithilfe der ζ -Funktion des quadrierten DIRACSCHEN Hamiltonoperators. Die Renormierungsbedingung bestand in der Forderung eines fixen Vakuumerwartungswertes σ_s für das Kondensat $\sigma \propto \bar{\psi}\psi$ bei $\mu, T = 0$. Die Spezifizierung auf $1 + 1$ und $2 + 1$ Dimension erlaubte die Rekonstruktion bekannter Ergebnisse für die Phasendiagramme mithilfe numerischer Minimierungsverfahren für eine möglichst gute Diskretisierung des relevanten Bereiches in der $\mu - T$ -Ebene.

In Kapitel 3 konnte zunächst in den Abschnitten 3.1 und 3.2 durch Betrachtung der Differenz der ζ -Funktionen der quadrierten DIRAC-Operatoren eines inhomogenen und eines passend gewählten homogenen Feldes die Rechnung des vorherigen Kapitels zu großen Teilen wiederverwendet werden. Damit erhielten wir auch für inhomogene Felder in $1 + 1$ und $2 + 1$ Dimensionen regularisierte und renormierte Ausdrücke der effektiven Wirkung. Im $(2 + 1)$ -Fall konnten wir durch die Beschränkung der Raumabhängigkeit des Feldes σ auf nur 1 Raumdimension die Form der zu berechnenden Eigenwerte des DIRAC-Operators deutlich vereinfachen, wodurch das Problem numerisch erheblich leichter zu handhaben ist. Für $1 + 1$ Dimensionen erfolgte analog zum Kapitel über homogene Kondensate eine numerische Minimierung zur Berechnung des Phasendiagramms in der $\mu - T$ -Ebene. Diese reproduzierte im Rahmen der durch die Diskretisierung gegebenen Genauigkeit die bekannte Phasenstruktur. Für $2 + 1$ Dimensionen wurde die analoge Minimierung nur für $T = 0$ durchgeführt. Eine Betrachtung endlicher Temperatur ist mit den präsentierten Gleichungen ohne Probleme möglich, jedoch mit deutlich mehr Rechenzeit verbunden. Insgesamt sind die Minimierungsaufgaben für inhomogene Felder mangels analytisch exakter Ausdrücke für die Eigenwerte des DIRAC-Operators sehr viel aufwendiger, da dieser numerisch diagonalisiert werden muss. Eine wesentliche Erkenntnis aus diesem Kapitel ist das Fehlen einer zum $(1 + 1)$ -Fall analogen inhomogenen Phase bei $T = 0$ in $2 + 1$ Dimensionen, die in unserem Fall auch nicht bei endlichen Temperaturen zu erwarten ist. Stattdessen waren nur metastabile inhomogene Feldkonfigurationen zu finden, die parallel zur homogenen gebrochenen Phase existieren. Dennoch konnten Hinweise auf Effekte endlichen Raumvolumens gefunden werden, die für $T = 0$ in einem kleinen Bereich um die bekannte Grenze $\mu = \sigma_s$ der beiden homogenen Phasen zu inhomogenen global stabilen Grundzuständen führen.

Im Abschnitt 3.3 wurde versucht, die zuvor erhaltenen numerischen Ergebnisse analytisch zu bekräftigen. Dazu wurde eine Stabilitätsanalyse der bekannten homogenen Grundzustände bezüglich inhomogener Variationen bei $T = 0$ durchgeführt. Da die global stabilen inhomogenen Felder für große μ in $1 + 1$ Dimensionen reine Cosinusfunktionen darstellten, wurde als Variation ein Cosinusansatz mit fester Frequenz gewählt. Für die Variation der vorher numerisch berechneten Eigenwerte des DIRAC-Operators inhomogener Felder verfolgten wir RAYLEIGH-SCHRÖDINGER-

Störungsrechnung bis zur 2. Ordnung. Effektiv handelte es sich hier um die Berechnung eines Bandlückenproblems. Dabei ergab sich sowohl in 1 + 1 als auch 2 + 1 Dimensionen die Stabilität der homogenen gebrochenen Phase bezüglich solcher Variationen, gegebenenfalls musste für den analytischen Beweis die Annahme unendlichen Raumvolumens getroffen werden. In 1 + 1 Dimensionen genügte die Variationsrechnung mit wenigen Approximationen, um analytisch die Instabilität der symmetrischen Phase bei $T = 0$ bezüglich der gewählten Inhomogenität und damit die Existenz der inhomogenen Phase für hinreichend große μ zu zeigen. Sie genügte nicht, um die genaue Phasengrenze zwischen homogener gebrochener und inhomogener Phase zu approximieren, was intuitiv verständlich ist, da ein Übergang zwischen den Feldern der homogenen gebrochenen Phase zu den inhomogenen Feldkonfigurationen nicht durch Variation einer einzelnen Fourierkomponente möglich ist. Die genaue Tiefe des Potentialminimums der inhomogenen Felder kann über Variationsrechnung bis zu 2. Ordnung nicht berechnet werden. In 2 + 1 Dimensionen ist es uns gelungen, im Grenzfall $L \rightarrow \infty$ die Stabilität der symmetrischen Phase für $\mu > \sigma_s$ bezüglich cosinusartiger Variationen zu zeigen, wobei aufgrund der analytischen Komplexität nicht vollständig auf numerische Berechnungen verzichtet werden konnte. Für $\mu < \sigma_s$ sagte die Rechnung zumindest metastabile inhomogene Zustände voraus, wie wir sie auch in der Numerik beobachten konnten.

Zuletzt ist es uns in Abschnitt 3.4 gelungen, in 1 + 1 Dimensionen eine Funktion zur Modellierung des Potentialverlaufes bei $T = 0$ für die Annahme reiner Cosinusfunktionen als Inhomogenitäten in Abhängigkeit von deren Amplitude zu bestimmen. Diese erlaubt es, vollständig analytisch für verschwindende Temperatur und hinreichend großes chemisches Potential die Existenz inhomogener globaler Minima sowie deren Amplitude vorauszusagen. Wesentliches Mittel hierzu war die Anwendung von „almost degenerate perturbation theory“, um eine Beschreibung der Eigenwerte des DIRAC-Operators abseits von deren Taylorreihe zu erhalten, da letztere in der Nähe von Bandlücken schnell divergiert. Die Methode stellt trotzdem nur eine Näherung dar, die für kleine Frequenzen der Variation versagt und ebenfalls nicht in der Lage ist, eine vernünftige Approximation der Phasengrenze zwischen homogener gebrochener und inhomogener Phase zu liefern.

Für weitere Untersuchungen wäre es hilfreich, möglicherweise exakte Ausdrücke für die Eigenwerte des DIRAC-Operators für inhomogene Felder zu erhalten. Dazu könnten spezielle Ansätze für die Inhomogenitäten $\sigma(x)$ mit elliptischen Funktionen verwendet werden [38], die unter Benutzung von Eigenschaften der Supersymmetrie zu exakt lösbaren Eigenwertgleichungen mit sogenannten LAMÉ-Potentialen führen [39].

Weiterhin wäre die logische Fortsetzung dieser Arbeit die Suche nach inhomogenen Phasen in 2 + 1 Dimensionen für inhomogene Felder $\sigma(x, y)$ mit beliebiger Raumabhängigkeit. Formal führt für diese der Ansatz über die Regularisierung mithilfe der ζ -Funktion auf ähnliche Ausdrücke wie in Abschnitt 3.1, wobei die Form der benötigten Eigenwerte nun nicht wie in Abschnitt 3.2 vereinfacht werden kann und die numerische Berechnung dadurch deutlich aufwendiger ist.

A Anhang

A.1 Python Code für 1+1 Dimensionen

Der vorgestellte Code basiert auf einem durch Prof. Andreas Wipf bereitgestellten octave-Programm für die Potentialminimierung in 1 + 1 Dimensionen.

A.1.1 Setup

```
1 import numpy as np
2 import scipy.linalg
3 import scipy.special
4 from scipy.integrate import quad
5 from scipy.optimize import Bounds
6 from scipy.optimize import minimize
7
8 # ===== DEFINE SIMULATION PARAMETERS =====
9
10 # =====
11 # grid parameters
12 L = 30
13 N_grid = 251
14 if (N_grid % 2 == 0):
15     N_grid += 1
16
17 # =====
18 # define grids in position and momentum space
19 dx = L/N_grid
20 dk = 2*np.pi/L
21 x_grid = dx * np.arange(start=-(N_grid-1)/2, step=1, stop=(N_grid+1)/2)
22     # !!! [start,stop)
23 k_grid = dk * np.arange(start=-(N_grid-1)/2, step=1, stop=(N_grid+1)/2)
24 k_grid2 = k_grid**2
25
26 max_coeff = min(N_grid//4, 50)
27 k_vals = dk * np.arange(start=0, step=1, stop=max_coeff)
28 init_coeffs = np.zeros(max_coeff)
29
30 field = np.cos(np.outer(k_vals.T, x_grid))
31 field_deriv = -np.matmul(np.diag(k_vals), np.sin(np.outer(k_vals.T, x_grid)))
32
```

```
33 # =====
34 # SLAC-derivative
35 xs = np.arange(start=1, step=1, stop=N_grid)
36 t = xs*np.pi/N_grid
37 t1 = np.pi/L*((-1)**xs)/np.sin(t)
38 t1plus = np.concatenate([np.array([0]), t1])
39 t1minus = np.concatenate([np.array([0]), -t1])
40 t2 = scipy.linalg.toeplitz(t1plus, t1minus)
41 freeHh = -np.matmul(t2, t2)
42 freeH = 0.5*(freeHh+freeHh.T)
43
44 # compact tuple to pass to energy computation
45 grid_parameters = (field, field_deriv, freeH, k_grid2, L)
```

A.1.2 effektives Potential für konstante σ

```
1 def integrand(p, sigma, T, mu):
2     return np.log(1+np.exp(-(np.sqrt(sigma**2+p**2)+mu)/T))
3         + np.log(1+np.exp(-(np.sqrt(sigma**2+p**2)-mu)/T))
4
5 def Ueff_hom_2d(sigma, mu, T, L):
6     sigma = np.abs(sigma)
7
8     # zero T, zero mu, infinite L
9     if(sigma == 0):
10        Ueff00 = 0
11    else:
12        Ueff00 = ((sigma**2)/(4*np.pi))*(np.log(sigma**2)-1)
13
14    # finite L
15    Ueff01 = np.exp(10)
16    if(sigma != 0):
17        n_max = int(25/(np.abs(sigma)*L))
18        nn = np.arange(start=1, step=1, stop=n_max+1)
19        bessk = scipy.special.kn(1, sigma*L*nn)/nn
20        Ueff01 = 2*sigma/(np.pi*L)*np.sum(bessk)
21    else:
22        #  $k_1(ax) \rightarrow 1/(ax)$  for  $x \rightarrow 0$ ,  $\sum(1/n^2) = \pi^2/6$ 
23        Ueff01 = 2/(np.pi*L**2)*(np.pi**2)/6
24
25    # finite T, finite mu
26    if(T > 0):
27        Ueff1 = -T*quad(integrand, 0, np.inf,args=(sigma, T, mu), epsabs=1e-12)[0]/np.pi
28    elif sigma >= mu:
29        Ueff1 = 0
30    elif sigma == 0:
31        Ueff1 = -1/(2*np.pi) * mu**2
```

```

32     else:
33         Ueff1 = -(1/np.pi) * (mu*np.sqrt(mu**2-sigma**2) - 1/2 * (np.sqrt(mu**2-sigma**2)
34             * mu + (sigma**2) * np.log((mu+np.sqrt(mu**2 - sigma**2))/sigma)))
35     return Ueff00 + Ueff01 + Ueff1

```

A.1.3 Beispielmessung: homogenes Phasendiagramm

```

1 filename = input("filename ('data_homphase_1+1_py_<filename>.dat'): ")
2
3 mu_list = []
4 T_list = []
5 code_list = []
6 Umin_list = []
7 sigma_list = []
8 Ueff0_list = []
9 sigma0_list = []
10 Ueff1_list = []
11 sigma1_list = []
12
13 i_steps = 240
14 j_steps = 160
15 T_min ,T_max = 0.0, 0.6
16 mu_min, mu_max = 0, 2
17
18 mybounds = Bounds(0, 2)
19
20 for i in range(i_steps):
21     for j in range(j_steps):
22         mu = mu_min + i/(i_steps-1) * (mu_max-mu_min)
23         T = T_min + j/(j_steps-1) * (T_max-T_min)
24         (firstguess, secondguess) = (0.005, 0.995)
25
26         res1 = minimize(Ueff_hom_2d, firstguess, args=(mu, T, L), method="Nelder-Mead",
27             tol=1e-13,bounds=mybounds)
28         res2 = minimize(Ueff_hom_2d, secondguess, args=(mu, T, L),method="SLSQP", tol=1e
29             -13,bounds=mybounds)
30
31         Ueff0_list.append(res1.fun)
32         Ueff1_list.append(res2.fun)
33
34         sigma0_list.append(res1.x)
35         sigma1_list.append(res2.x)
36
37         min_sigmas = []
38         min_Ueffs = []
39         min_sigmas.append(res1.x)

```



```
38     min_Ueffs.append(res1.fun)
39
40     if(np.abs(res1.x-res2.x) > 1e-3):
41         # two different minima!
42         min_sigmas.append(res2.x)
43         min_Ueffs.append(res2.fun)
44
45     # define colorcode for plot
46     # 2 --> only one minimum @ sigma = 0
47     # 1 --> global minimum @ sigma = 0,
48     # local minimum @ sigma != 0
49     # -2 --> only one minimum @ sigma != 0
50     # -1 --> global minimum @ sigma != 0,
51     # local minimum @ sigma = 0
52     colorcode = 0
53     if(len(min_sigmas) == 2):
54         if(min_Ueffs[0] < min_Ueffs[1]):
55             colorcode = 1
56         else:
57             colorcode = -1
58     elif(abs(min_sigmas[0]) < 1e-3):
59         colorcode = 2
60     else:
61         colorcode = -2
62
63     code_list.append(colorcode)
64     Umin_list.append(np.min(min_Ueffs))
65     sigma_list.append(min_sigmas[np.where(min_Ueffs == np.min(min_Ueffs))[0][0]])
66     mu_list.append(mu)
67     T_list.append(T)
68
69 # =====
70 # write to files
71 filename = "data_homphase_1+1_py_"+filename+".dat"
72 file = open(filename, "w")
73
74 file.write("mu\tT\tcolorcode\tUmin\tsigma\tUeff0\tUeff1\tsigmaat0\tsigmaat1\n")
75 for i in range(len(mu_list)):
76     file.write(str(mu_list[i])+"\t"+str(T_list[i])+"\t"+str(code_list[i])+"\t"+str(
77         Umin_list[i])+"\t"+str(sigma_list[i])+"\t"+str(Ueff0_list[i])+"\t"+str(
78         Ueff1_list[i])+"\t"+str(sigma0_list[i])+"\t"+str(sigma1_list[i])+"\n")
79 file.close()
```

A.1.4 effektives Potential für allgemeine $\sigma(x)$

```
1 def compute_energy_2d(coeffs, mu, T, field,
2   field_deriv, freeH, k_grid2, L):
```

```

3
4 sigma = np.matmul(coeffs, field)
5 sigma_deriv = np.matmul(coeffs, field_deriv)
6
7 # =====
8 # compute Hamiltonian and eigenvalues
9 potential = sigma**2 + sigma_deriv
10 H = freeH+np.diag(potential) # real symmetric
11 eps2 = scipy.linalg.eigh(H, eigvals_only=True) # should be real and positive already
12 eps2 = np.sort(np.clip(np.real(eps2), 0, None))
13 eps = np.sqrt(eps2)
14
15 # =====
16 # compute constant reference field
17 sigmabar2 = (np.sum(coeffs**2) + coeffs[0]**2)/2
18 sigmabar = np.sqrt(sigmabar2)
19 epsbar = np.sort(np.sqrt(sigmabar2 + k_grid2))
20
21 # =====
22 # zero T, zero mu, L infty
23 if(sigmabar2 != 0):
24     res1 = 1/(4*np.pi)*sigmabar2*(np.log(sigmabar2)-1)
25 else:
26     res1 = 0
27
28 # finite L
29 res2 = np.exp(10)
30 if(sigmabar != 0):
31     n_max = int(25/(np.abs(sigmabar)*L))
32     nn = np.arange(start=1, step=1, stop=n_max+1)
33     bessk = scipy.special.kn(1, sigmabar*L*nn)/nn
34     res2 = 2*sigmabar/(np.pi*L)*np.sum(bessk)
35 else:
36     #  $k_1(ax) \rightarrow 1/(ax)$  for  $x \rightarrow 0$ ,  $\sum(1/n^2) = \pi^2/6$ 
37     res2 = 2/(np.pi*L**2)*(np.pi**2)/6
38
39 # difference of zeta functions
40 res3 = -np.sum(eps-epsbar)/L
41
42 # finite T, finite mu
43 if(T > 0):
44     beta = 1/T
45     z = np.exp(beta*mu)
46
47     fug = np.exp(-beta*eps)
48     aux = np.log(1+z*fug)+np.log(1+fug/z)
49     res4 = -np.sum(aux)/(beta*L)

```

```
50 | else:
51 |     idx = np.intersect1d(np.where(0 <= eps), np.where(eps < mu))
52 |     res4 = np.sum(eps[idx]-mu)/L
53 |
54 |     return res1+res2+res3+res4
```

A.1.5 Beispielmessung: einzelne inhomogene Feldkonfiguration

```
1 | mu = 1
2 | T = 0.1
3 | parameters = (mu, T, *grid_parameters)
4 |
5 | init_coeffs = np.zeros_like(init_coeffs)
6 | k_start = int(mu*L/np.pi) # good initial condition for inimum minima
7 | init_coeffs[k_start] = 0.5
8 |
9 | # =====
10 | # perform minimization
11 | result = minimize(compute_energy_2d, init_coeffs, args=parameters, method="SLSQP",
12 |                  options={"ftol": 1e-9})
13 |
14 | coeffs_opt = result.x
15 | U_eff = result.fun
16 | sigma = np.matmul(coeffs_opt, field)
17 | sigmabar = np.sqrt((np.sum(coeffs_opt**2) + coeffs_opt[0]**2)/2)
18 | # =====
19 | # output
20 | ...
```

A.1.6 Beispielmessung: inhomogenes Phasendiagramm

```
1 | filename = input("filename ('data_1+1_inh_phasediagram_py_<filename>.dat'): ")
2 |
3 | mu_array = []
4 | T_array = []
5 | Umin_array = []
6 | sigmabar_array = []
7 | maxcoeff_array = []
8 | maxcoeffamp_array = []
9 | min_array = []
10 | max_array = []
11 | sigma_list = []
12 | coeffs_list = []
13 |
14 | i_steps = 240 # mu_steps
15 | j_steps = 400 # T_steps
```

```

16 T_min ,T_max = 0.0, 0.6
17 mu_min, mu_max = 0, 2
18 mybounds = Bounds(-2, 2)
19
20 for i in range(i_steps):
21     for j in range(j_steps):
22
23         T = T_min + j/(j_steps-1) * (T_max - T_min)
24         mu = mu_min + i/(i_steps-1) * (mu_max - mu_min)
25         parameters = (mu, T, *grid_parameters)
26
27         k_start = int(mu*L/np.pi)
28         init_coeffs = np.zeros_like(init_coeffs)
29         init_coeffs[k_start] = 0.5
30
31         # minimization here
32         result = minimize(compute_energy_2d, init_coeffs, args=parameters, method="SLSQP",
33                             bounds=mybounds, options={"ftol": 1e-9})
34
35         coeffs_opt = result.x
36         Umin = result.fun
37         sigma = np.matmul(coeffs_opt, field)
38         sigmabar = np.sqrt((np.sum(coeffs_opt**2) + coeffs_opt[0]**2)/2)
39
40         mu_array.append(mu)
41         T_array.append(T)
42         Umin_array.append(Umin)
43         sigmabar_array.append(sigmabar)
44         maxcoeff_array.append(k_vals[np.where(np.abs(coeffs_opt) == max(np.abs(coeffs_opt))
45                                     )][0])
46         maxcoeffamp_array.append(coeffs_opt[np.where(np.abs(coeffs_opt) == max(np.abs(
47             coeffs_opt)))[0]])
48
49         sigma_list.append(sigma)
50         coeffs_list.append(coeffs_opt)
51
52 # =====
53 # write to files
54 filename_muT = "data_1+1_inh_phasediagram_py_"+filename+".dat"
55 filename_coeffs = "data_1+1_inh_phasediagram_py_"+filename+"_coeffs.dat"
56 filename_fields = "data_1+1_inh_phasediagram_py_"+filename+"_fields.dat"
57
58 file_muT = open(filename_muT, "w")
59 file_muT.write("mu\tT\tUmin\tsigmabar\tmainfrequency\tmainfrequencyamp\n")
60 file_fields = open(filename_fields, "w")
61 file_fields.write("x\tsigma(x)\n")
62 file_coeffs = open(filename_coeffs, "w")

```

```
60 file_coeffs.write("k\tfourier_sigma(k)\n")
61
62 for i in range(len(mu_array)):
63     file_muT.write(str(mu_array[i])+"\t"+str(T_array[i])+"\t"+str(Umin_array[i]) +"\t"+
64                   str(sigmabar_array[i])+"\t"+str(maxcoeff_array[i])+"\t"+str(maxcoeffamp_array[i]
65                   ])+"\n")
64
65     file_fields.write("\n\n# field no. "+str(i)+"\n")
66     file_fields.write("# mu="+str(mu_array[i]), T="+str(T_array[i])+"\n")
67     for x in range(len(x_grid)):
68         file_fields.write(str(x_grid[x])+"\t"+str(sigma_list[i][x])+"\n")
69
70     file_coeffs.write("\n\n# field no. "+str(i)+"\n")
71     file_coeffs.write("# mu="+str(mu_array[i]), T="+str(T_array[i])+"\n")
72     for k in range(len(k_vals)):
73         file_coeffs.write(str(k_vals[k])+"\t"+str(coeffs_list[i][k])+"\n")
74
75 file_muT.close()
76 file_fields.close()
77 file_coeffs.close()
```

A.2 Python Code für 2+1 Dimensionen

A.2.1 Setup

Die gewählte Vereinfachung $\sigma(x, y) = \sigma(x)$ erlaubt die Benutzung der exakt gleichen Gitterparameter wie in A.1.1.

A.2.2 effektives Potential für konstante σ

```
1 def integrand(p, beta, mu, sigma):
2     return p*np.log((1+np.exp(-beta*(np.sqrt(sigma**2 \
3         + p**2) + mu)))*(1+np.exp(-beta*(np.sqrt(
4         sigma**2 + p**2) - mu))))
5
6 def Ueff_hom_3d(sigma, mu, T, L):
7
8     sigma = np.abs(sigma)
9
10    # zero T, zero mu, L infity
11    Ueff00 = (2*sigma**3 - 3*sigma**2)/(12*np.pi)
12
13    # finite L_x
14    # L_y -> infity
15    Ueff01 = 1e10
16    if(sigma == 0):
17        # sum(1/n^3)=Riem.Zeta(3)=1.202056903159594285...
```

```

18     Ueff01 = 1.202056903159594285/(np.pi*L**3)
19     else:
20         n_max = int(25/(np.abs(sigma)*L))
21         nn = np.arange(start=1, step=1, stop=n_max+1)
22         Ueff01 = 1/np.pi * np.sum(np.exp(-nn*sigma*L) \
23             * (sigma/(nn*L)**2 + 1/(nn*L)**3))
24
25     # finite T, finite mu
26     if(T > 0):
27         beta = 1/T
28         Ueff1 = -1/(2*np.pi*beta) * quad(integrand, 0, np.inf, args=(beta, mu, sigma),
29             limit=100, epsrel=1e-10, epsabs=1e-10)[0]
30     elif sigma >= mu:
31         Ueff1 = 0
32     else:
33         Ueff1 = -(mu**3 + 2*sigma**3-3*mu*sigma**2)/(12*np.pi)
34     return Ueff00 + Ueff01+Ueff1

```

A.2.3 effektives Potential für allgemeine $\sigma(x)$ und $T = 0$

```

1 def xlogx(x):
2     res = -1e10
3     if x == 0:
4         res = 0
5     else:
6         res = x*np.log(x)
7     return res
8
9 def compute_energy_3d_zeroT(coeffs, mu, field,
10     field_deriv, freeH, k_grid2, L):
11
12     sigma = np.matmul(coeffs, field)
13     sigma_deriv = np.matmul(coeffs, field_deriv)
14
15     # =====
16     # compute Hamiltonian and eigenvalues
17     potential = sigma**2 + sigma_deriv
18     H = freeH+np.diag(potential)
19     eps2 = scipy.linalg.eigh(H, eigvals_only=True)
20     eps2 = np.sort(np.clip(np.real(eps2), 0, None))
21     eps = np.sqrt(eps2)
22
23     # =====
24     # compute constant reference field
25     sigmabar2 = (np.sum(coeffs**2) + coeffs[0]**2)/2
26     sigmabar = np.sqrt(sigmabar2)

```

```

27 | epsbar2 = np.sort(sigmabar2 + k_grid2)
28 |
29 | # =====
30 | # zero T, zero mu, L infity
31 | res1 = (2*sigmabar**3 - 3*sigmabar**2)/(12*np.pi)
32 |
33 | # finite L
34 | res2 = 1e10
35 | if(sigmabar == 0):
36 |     # sum(1/n^3)=Riem.Zeta(3)=1.202056903159594285...
37 |     res2 = 1.202056903159594285/(np.pi*L**3)
38 | else:
39 |     n_max = int(25/(np.abs(sigmabar)*L))
40 |     nn = np.arange(start=1, step=1, stop=n_max+1)
41 |     res2 = 1/np.pi * np.sum(np.exp(-nn*sigmabar*L) \
42 |         * (sigmabar/(nn*L)**2 + 1/(nn*L)**3))
43 |
44 | # difference of zeta functions
45 | zeta_diff = np.array(list(map(xlogx, eps2))) - \
46 |     np.array(list(map(xlogx, epsbar2)))
47 | # equivalent to zeta_diff = eps2*np.log(eps2)-epsbar2*epsbar2
48 | res3 = np.sum(zeta_diff)/(4*np.pi*L)
49 |
50 | # zero T, finite mu
51 | idx = np.intersect1d(np.where(0 <= eps[:]), np.where(eps[:] < mu))
52 | eps_smaller_mu = eps[:,idx]
53 | aux1 = (eps_smaller_mu**2) * np.log(mu+np.sqrt(mu**2
54 |     - eps_smaller_mu**2))-mu*np.sqrt(mu**2-eps_smaller_mu**2)
55 | aux2 = -eps_smaller_mu*np.array(list(map(xlogx, eps_smaller_mu)))
56 | res4 = np.sum(aux1+aux2)/(2*np.pi*L)
57 |
58 | return res1+res2+res3+res4

```

A.2.4 Minimierung der Potentiale

Die durchzuführenden Prozeduren sind vollständig analog zu denen in A.1.3, A.1.5 und A.1.6 mit der Einschränkung, dass inhomogene Feldkonfigurationen nur bei $T = 0$ berechnet werden können. Die Parameterliste der zugehörigen Funktion ist einfach zu ersetzen:

```
1 | parameters = (mu, *grid_parameters)
```

und damit

```
1 | Ueff = compute_energy_3d_zeroT(init_coeffs, *parameters)
```

bzw.

```
1 | result = minimize(compute_energy_3d_zeroT, init_coeffs, args=parameters, method="SLSQP",
|     options={"ftol": 1e-9})
```

A.3 Ausführlichere Rechnungen

A.3.1 Umformung der ζ -Funktion des quadrierten Dirac-Operators in 2+1 Dimensionen für $\sigma(x, y) = \sigma(x)$

Mit $\mathcal{H} = -\mathcal{D}_0^2 + h_\sigma^2$, $\mathcal{D}_0 = \partial_0 + \mu$, $h_\sigma = \gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^o \sigma$ sowie $\sigma(x, y) = \sigma(x)$ und $p_y = \frac{2\pi p}{L_y}$ erhalten wir mittels POISSON-Resummation über die explizit bekannten Eigenwerte

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) = \sum_{n,m,p} \lambda_{nmp}^{-s} \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n,m,p} e^{-t\lambda_{nmp}} \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n,m,p} e^{-t((\omega_n - i\mu) + p_y^2 + \epsilon_m^2)} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{d_s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{4\pi t}} \sum_n (-1)^n e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4t}} e^{-n\beta\mu} \right) \left(\frac{L_y}{\sqrt{4\pi t}} \sum_p e^{-\frac{p^2 L_y^2}{4t}} \right) \left(\sum_m e^{-t\epsilon_m^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\beta L_y}{2\pi} \left(\int_0^\infty dt t^{s-2} \sum_{p,m} e^{-\frac{p^2 L_y^2}{4t}} e^{-t\epsilon_m^2} \right. \\ \left. + \int_0^\infty dt t^{s-2} \sum_{n \neq 0, p, m} (-1)^n e^{-\left(\frac{\beta^2 n^2}{4t} + n\beta\mu + \frac{p^2 L_y^2}{4t}\right)} e^{-t\epsilon_m^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\beta L_y}{2\pi} \left(\Gamma(s-1) \zeta_{k_\sigma^2}(s-1) + \int_0^\infty dt t^{s-2} \sum_{n \neq 0, p, m} (-1)^n e^{-\left(\frac{\beta^2 n^2}{4t} + n\beta\mu + \frac{p^2 L_y^2}{4t}\right)} e^{-t\epsilon_m^2} \right). \quad (\text{A.6})$$

Im letzten Schritt mussten wir für das erste Integral $L_y \rightarrow \infty$ annehmen, um es durch den kompakten Ausdruck der ζ -Funktion nur des Operators k_σ^2 ersetzen zu können. Mit der Benutzung von $d_s = 2 \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ sind ϵ_m^2 die Eigenwerte von k_σ^2 , zu verstehen als $-\partial_x^2 + \sigma^2(x) + \sigma'(x)$.

A.3.2 Berechnung der Ableitung der Summen über modifizierte Besselfunktionen

$$K^{(1+1)}(\bar{\sigma}) := \frac{2\bar{\sigma}}{\pi L} \sum_{m>0} \frac{K_1(m\bar{\sigma}L)}{m} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} K^{(1+1)} = \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\frac{2}{\pi L^2} \sum_{m>0} \frac{m\bar{\sigma}L K_1(m\bar{\sigma}L)}{m^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= -\frac{2\bar{\sigma}}{\pi} \sum_{m>0} K_0(m\bar{\sigma}L) \quad (\text{A.9})$$

$$\xrightarrow{\bar{\sigma} \rightarrow 0} -\frac{2}{\pi L} \int_0^\infty dx K_0(x) \quad (\text{A.10})$$

$$= -\frac{1}{L} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{d^2}{d\bar{\sigma}^2} K^{(1+1)} = -\frac{2}{\pi} \sum_{m>0} K_0(m\bar{\sigma}L) + \frac{2}{\pi} \sum_{m>0} m\bar{\sigma}L K_1(m\bar{\sigma}L) \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{\pi\bar{\sigma}L} \int_0^\infty dx K_0(x) + \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} K_0(\bar{\sigma}L) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!} \left(\frac{d}{dm} \right)^{n-1} \Big|_{m=1} K_0(\bar{\sigma}mL) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\bar{\sigma}L} \int_0^\infty dx x K_1(x) + \frac{2}{\pi} \frac{\bar{\sigma}L K_1(\bar{\sigma}L)}{2} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^\infty \frac{B_n}{n!} \left(\frac{d}{dm} \right)^{n-1} \Big|_{m=1} (\bar{\sigma}mL K_1(\bar{\sigma}mL)) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\bar{\sigma} \rightarrow 0}{\approx} & -\frac{1}{\bar{\sigma}L} + \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \left(-\ln \left(\frac{\bar{\sigma}L}{2} \right) - \gamma + O \left((\bar{\sigma}L)^2 \ln(\bar{\sigma}L) \right) \right) \\ & + \frac{2}{\pi} \frac{B_2}{2} \bar{\sigma}L \cdot \underbrace{(-K_1(\bar{\sigma}L))}_{\sim \frac{1}{\bar{\sigma}L}} + \frac{1}{\bar{\sigma}L} + \bar{\sigma}L \underbrace{K_1(\bar{\sigma}L)}_{\sim \frac{1}{\bar{\sigma}L}} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\frac{\ln \bar{\sigma}}{\pi} - \frac{\ln \left(\frac{L}{2} \right)}{\pi} - \frac{\gamma}{\pi} + \frac{5}{6\pi} . \quad (\text{A.15})$$

In diese Rechnungen sind unter anderem Formeln zu Ableitungen, Grenzwerten und Integralen der modifizierten Besselfunktionen, entnommen aus [26], sowie die EULER-MCLAURIN-Formel gemäß [34] zur Abschätzung von Summen durch Integrale unter Benutzung der BERNOULLI-Zahlen B_n eingeflossen. Es sei angemerkt, dass nur Korrekturterme bis zur 1. Ableitung, also $n = 2$ beachtet wurden. Die Konvergenz des Beitrages der restlichen Korrekturen in der Summe für Grenzwertprozesse $\bar{\sigma} \rightarrow 0$ müsste genauer untersucht werden, wäre aber an dieser Stelle zu aufwendig. Etwas leichter fällt die Rechnung für 2 + 1 Dimensionen, da wir eine explizite Darstellung der Besselfunktion nutzen können.

$$K^{(2+1)}(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \left(\frac{1}{m^3 L_x^3} + \frac{\bar{\sigma}}{m^2 L_x^2} \right) e^{-m\bar{\sigma}L_x} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} K^{(2+1)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m>0} \frac{\bar{\sigma}}{mL_x} e^{-m\bar{\sigma}L_x} \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{\bar{\sigma}}{\pi L_x} \ln(1 - e^{-\bar{\sigma}L_x}) \quad (\text{A.18})$$

$$\stackrel{\bar{\sigma} \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d^2}{d\bar{\sigma}^2} K^{(2+1)} = \frac{1}{\pi L_x} \ln(1 - e^{-\bar{\sigma}L_x}) + \frac{\bar{\sigma}}{\pi} \frac{1}{e^{\bar{\sigma}L_x} - 1} \quad (\text{A.20})$$

$$\stackrel{\bar{\sigma} \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{\ln(\bar{\sigma}L_x) + 1}{\pi L_x} . \quad (\text{A.21})$$

A.3.3 Näherung des Potentialverlaufes $U_{\text{eff}}^{(1+1)}(c)$ für $\sigma(x) = c \cos(2qx)$

Wir berechnen zur Übersicht den von ϵ_{ml} abhängigen Teil des Ausdruckes (3.31) separat unter Benutzung der Näherung (3.118) aus ADPT.

$$S_1 = -\frac{1}{L} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\epsilon_{ml}^2} - \sum_{m \in \mathbb{N}} \sqrt{\bar{\epsilon}_{ml}^2} \right) + \frac{1}{L} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \epsilon_{ml}^2 < \mu^2}} \left(\sqrt{\epsilon_{ml}^2} - \mu \right) \quad (\text{A.22})$$

$$= -\frac{1}{L} \left(2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon_n^+ - \bar{\epsilon}_0^+ - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\epsilon}_n^+ + (2n_0 - 1) \mu \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\approx -\frac{2}{L} \left(\int_{n_0}^{\infty} dn \left[q + \text{sgn}(p_n - q) \sqrt{(p_n - q)^2 + \frac{c^2}{4}} + \frac{c^2}{8(p_n + q)} \right] - \int_0^{\infty} dn \sqrt{p_n^2 + \frac{c^2}{2}} \right) + \text{const.} \quad (\text{A.24})$$

$$= -\frac{2}{L} \left(\frac{L}{2\pi} \int_q^{\infty} dp \left[q + \text{sgn}(p - q) \sqrt{(p - q)^2 + \frac{c^2}{4}} + \frac{c^2}{8(p + q)} \right] - \frac{L}{2\pi} \int_0^{\infty} dp \sqrt{p^2 + \frac{c^2}{2}} \right) + \text{const.} \quad (\text{A.25})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\left[qp + \frac{p - q}{2} \sqrt{(p - q)^2 + \frac{c^2}{4}} - \frac{c^2}{8} \ln \left(\sqrt{\frac{c^2}{4} + (p - q)^2} + (q - p) \right) + \frac{c^2}{8} \ln(p + q) \right]_q^{\infty} - \left[\frac{p}{2} \sqrt{p^2 + \frac{c^2}{2}} + \frac{c^2}{4} \ln \left(\sqrt{\frac{c^2}{2} + p^2} + p \right) \right]_0^{\infty} \right) + \text{const.} \quad (\text{A.26})$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{q^2}{2} - \frac{c^2}{16} - \frac{c^2}{8} \ln \left(\frac{c^2}{2} \right) - q^2 + \frac{c^2}{8} \ln \left(\frac{|c|}{2} \right) - \frac{c^2}{8} \ln(2q) + \frac{c^2}{8} \ln \left(\frac{c^2}{2} \right) \right) + \text{const.} \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{q^2}{2\pi} + \frac{c^2}{16\pi} - \frac{c^2}{8\pi} \ln \left(\frac{|c|}{4q} \right) + \text{const.} \quad (\text{A.28})$$

Der Platzhalter *const.* bleibt über die Rechnung hinweg gleich und ergibt sich konkret zu $-\frac{2n_0-1}{L} \mu \xrightarrow{L \rightarrow \infty} -\frac{q\mu}{\pi}$. Es verbleibt zu berechnen

$$S_2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_s^2} \right) - 1 \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{c^2}{8\pi} \left(\ln \left(\frac{c^2}{2\sigma_s^2} \right) - 1 \right) \quad (\text{A.30})$$

und schließlich, unter Vernachlässigung der Terme endlichen Raumvolumens für $L \rightarrow \infty$

$$U_{\text{eff}}^{(1+1)}(c) = S_1 + S_2 \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{q^2}{2\pi} + \frac{c^2}{16\pi} - \frac{c^2}{8\pi} \ln\left(\frac{|c|}{4q}\right) - \frac{q\mu}{\pi} + \frac{c^2}{8\pi} \left(\ln\left(\frac{c^2}{2\sigma_s^2}\right) - 1 \right) \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{q^2}{2\pi} - \frac{q\mu}{\pi} - \frac{c^2}{16\pi} + \frac{c^2}{8\pi} \ln\left(\frac{2q|c|}{\sigma_s^2}\right). \quad (\text{A.33})$$

B Abbildungsverzeichnis

2.1	Homogene Phasen in 1+1 Dimensionen	18
2.2	Homogene Phasen in 2+1 Dimensionen	19
3.1	Vollständiges Phasendiagramm in 1+1 Dimensionen	24
3.2	Feldkonfigurationen inhomogener globaler und lokaler Minima in 1 + 1 Dimensionen	25
3.3	Vergleich lokaler inhomogener und homogener Minima in 2 + 1 Dimensionen . . .	29
3.4	Feldkonfigurationen inhomogener lokaler Minima in 2 + 1 Dimensionen	30
3.5	Inhomogene Variation in 1 + 1 Dimensionen	41
3.6	$U_{\text{eff}}^{(2+1)''}$ bei inhomogener Variationen für $L_x \rightarrow \infty$ und $\sigma_0 = 0$	45
3.7	Approximation der Eigenwerte von h_σ für inhomogene Variationen.	48
3.8	Inhomogene Variation in 1 + 1 Dimensionen, analytische Approximation des Potentialverlaufes (1)	49
3.9	Inhomogene Variation in 1 + 1 Dimensionen, analytische Approximation des Potentialverlaufes (2)	49
3.10	Darstellung des Bereiches möglicher inhomogener Variationen in 1+1 Dimensionen	50

C Literaturverzeichnis

- [1] David J. Gross und André Neveu. “Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories”. In: *Phys. Rev. D* 10 (10 Nov. 1974), S. 3235–3253. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.3235.
- [2] D. K. Campbell und A. R. Bishop. “Solitons in polyacetylene and relativistic-field-theory models”. In: *Phys. Rev. B* 24 (8 Okt. 1981), S. 4859–4862. DOI: 10.1103/PhysRevB.24.4859.
- [3] Alan Chodos und Hisakazu Minakata. “The Gross-Neveu model as an effective theory for polyacetylene”. In: *Physics Letters A* 191.1 (1994), S. 39–45. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90557-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90557-6).
- [4] D. Ebert u. a. “Phase transitions in hexagonal, graphene-like lattice sheets and nanotubes under the influence of external conditions”. In: *Annals of Physics* 371 (2016), S. 254–286. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.05.001>.
- [5] Ulli Wolff. “The phase diagram of the infinite-N Gross-Neveu model at finite temperature and chemical potential”. In: *Physics Letters B* 157.4 (1985). ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(85\)90671-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90671-9).
- [6] Michael Thies und Konrad Urlichs. “Revised phase diagram of the Gross-Neveu model”. In: *Physical Review D* 67.12 (Juni 2003). DOI: 10.1103/physrevd.67.125015.
- [7] Julian Lenz u. a. “Inhomogeneous phases in the Gross-Neveu model in 1+1 dimensions at finite number of flavors”. In: *Physical Review D* 101.9 (Mai 2020). DOI: 10.1103/physrevd.101.094512.
- [8] Achim Heinz u. a. “Inhomogeneous condensation in effective models for QCD using the finite-mode approach”. In: *Physical Review D* 93.1 (Jan. 2016). DOI: 10.1103/physrevd.93.014007.
- [9] G. Grüner. “The dynamics of spin-density waves”. In: *Rev. Mod. Phys.* 66 (1 Jan. 1994), S. 1–24. DOI: 10.1103/RevModPhys.66.1.
- [10] Peter Fulde und Richard A. Ferrell. “Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field”. In: *Phys. Rev.* 135 (3A Aug. 1964), A550–A563. DOI: 10.1103/PhysRev.135.A550.
- [11] Marc Winstel, Jonas Stoll und Marc Wagner. “Lattice investigation of an inhomogeneous phase of the 2+1-dimensional Gross-Neveu model in the limit of infinitely many flavors”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 1667.1 (Okt. 2020), S. 012044. DOI: 10.1088/1742-6596/1667/1/012044.
- [12] Michael Buballa u. a. “Regulator dependence of inhomogeneous phases in the 2+1-dimensional Gross-Neveu model”. In: *Phys. Rev. D* 103 (3 Feb. 2021), S. 034503. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.034503.

-
- [13] Laurin Pannullo, Marc Wagner und Marc Winstel. “Inhomogeneous Phases in the Chirally Imbalanced 2+1-Dimensional Gross-Neveu Model and Their Absence in the Continuum Limit”. In: *Symmetry* 14.2 (Jan. 2022), S. 265. DOI: 10.3390/sym14020265.
- [14] Andreas Wipf. *Quantenfeldtheorie, Vorlesungsskriptum*. 2020. URL: <http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lectures/qft1/qft1head.pdf> (besucht am 25.09.2022).
- [15] J. J. Lenz. *Master Ethesis, Spontaneous Symmetry Breaking in Four Fermion Theories*. 2018. URL: https://www.tpi.uni-jena.de/~wipf/abschlussarbeiten/lenz_master_18.pdf (besucht am 25.09.2022).
- [16] Dirk H. Rischke. *Theoretische Physik 4: Quantenmechanik 2, Vorlesungsskript*. 2015. URL: https://itp.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_QMII_SoSe2015.pdf (besucht am 25.09.2022).
- [17] Michael Mandl. *Private Korrespondenz*.
- [18] J. Hubbard. “Calculation of Partition Functions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 3 (2 Juli 1959), S. 77–78. DOI: 10.1103/PhysRevLett.3.77.
- [19] Stefan Flörchinger. *Lectures on quantum field theory 1*. 2020. URL: <https://www.tpi.uni-jena.de/~floerchinger/assets/pdfs/QuantumFieldTheory1.pdf> (besucht am 25.09.2022).
- [20] S. W. Hawking. “Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime”. In: *Communications in Mathematical Physics* 55.2 (1977), S. 133–148. DOI: [cmp/1103900982](https://doi.org/10.1007/BF01608147).
- [21] Eberhard Zeidler. *Quantum Field Theory 1: Basics in Mathematic and Physics*. Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-34764-4.
- [22] Friedrich Gehring, Holger Gies und Lukas Janssen. “Fixed-point structure of low-dimensional relativistic fermion field theories: Universality classes and emergent symmetry”. In: *Phys. Rev. D* 92 (8 Okt. 2015), S. 085046. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.085046.
- [23] Jeong-Hyuck Park. “Lecture note on Clifford algebra”. In: *J. Korean Phys. Soc.* 81 (1 Juli 2022). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40042-022-00493-z>.
- [24] Andreas Wipf. *Statistical Approach to Quantum Field Theory. An Introduction*. Springer Cham, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-83263-6>.
- [25] Andreas Wipf. *Lecture Notes, Introduction to Supersymmetry*. 2016. URL: <http://www.tpi.uni-jena.de/qfphysics/homepage/wipf/lectures/susy/susyhead.pdf> (besucht am 25.09.2022).
- [26] *NIST Digital Library of Mathematical Functions: Gamma Function*. URL: <https://dlmf.nist.gov/10#PT3> (besucht am 25.09.2022).
- [27] *NIST Digital Library of Mathematical Functions: Bessel Functions*. URL: <https://dlmf.nist.gov/5#PT2> (besucht am 25.09.2022).
- [28] Jared Speck. *Introduction to partial differential equations, lecture notes*. 2011. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-fall-2011/pages/lecture-notes/> (besucht am 25.09.2022).

-
- [29] Steven K. Blau, Matt Visser und Andreas Wipf. “Zeta functions and the Casimir energy”. In: *Nuclear Physics B* 310.1 (Nov. 1988), S. 163–180. DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90059-4).
- [30] G. Bergner u. a. “Low-dimensional supersymmetric lattice models”. In: *Annals of Physics* 323.4 (Apr. 2008), S. 946–988. DOI: [10.1016/j.aop.2007.06.010](https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.06.010).
- [31] Oliver Schnetz, Michael Thies und Konrad Urlichs. “Phase diagram of the Gross–Neveu model: exact results and condensed matter precursors”. In: *Annals of Physics* 314.2 (Dez. 2004). DOI: [10.1016/j.aop.2004.06.009](https://doi.org/10.1016/j.aop.2004.06.009).
- [32] Matthias Bartelmann u. a. *Theoretische Physik 3, Quantenmechanik*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56072-3>.
- [33] Joseph O. Hirschfelder. “Formal Rayleigh–Schrödinger perturbation theory for both degenerate and non-degenerate energy states”. In: *International Journal of Quantum Chemistry* 3.5 (1969), S. 731–748. DOI: <https://doi.org/10.1002/qua.560030517>.
- [34] M. G. Rozman. *Lecture Notes: Euler-Maclaurin summation formula*. 2016. URL: https://www.phys.uconn.edu/~rozman/Courses/P2400_16S/downloads/euler-maclaurin-summation.pdf (besucht am 25.09.2022).
- [35] Andreas Wipf. *Notes on $4FT$ (privat)*.
- [36] A. R. Williams und D. Weaire. “Validity of perturbation theory. I. The single band gap model”. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 3.2 (Feb. 1970), S. 387–397. DOI: [10.1088/0022-3719/3/2/020](https://doi.org/10.1088/0022-3719/3/2/020).
- [37] David Tong. *Lectures on Applications of Quantum Mechanics: 2. Band Structure*. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/aqmtwo.pdf> (besucht am 25.09.2022).
- [38] Oliver Schnetz, Michael Thies und Konrad Urlichs. “Full phase diagram of the massive Gross–Neveu model”. In: *Annals of Physics* 321.11 (Nov. 2006). DOI: [10.1016/j.aop.2005.12.007](https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.12.007).
- [39] David J. Fernández C. und Asish Ganguly. “New supersymmetric partners for the associated Lamé potentials”. In: *Physics Letters A* 338.3 (2005), S. 203–208. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.03.011>.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne weitere Hilfsmittel als angegeben angefertigt habe. Die eingereichte Arbeit ist nicht anderweitig als Prüfungsleistung verwendet worden oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung zur Verfügung zu stellen.

Jena, 26. September 2022

Tobias Brusckke

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinen Betreuern für die angenehme und lehrreiche Zusammenarbeit bedanken.

Zum einen danke ich Prof. Andreas Wipf für den Vorschlag und die Vorstellung des sehr interessanten Themas dieser Arbeit, sowie die ausführliche Einführung in die Ideen der zugrunde liegenden Rechnungen. Weiterhin schätze ich die Bereitschaft zu zahlreichen zeitintensiven Diskussionen der Rechnungen und die Hilfestellung bei rechnerischen Schwierigkeiten sehr.

Zum anderen danke ich Michael Mandl für seine Unterstützung an vielen Stellen der Arbeit. Dazu zählt unter anderem eine anfängliche Einführung in die Grundkonzepte der Quantenfeldtheorie, die den Einstieg in das Thema ohne umfangreiches Vorwissen überhaupt möglich gemacht hat. Ebenfalls bin ich sehr dankbar für das Probelesen der Arbeit und Hinweise zu Inhalt und Struktur.