07. Übungsblatt zur Thermodynamik/Statistische Physik

Abgabe am Donnerstag der 8. Semesterwoche auf Moodle.

Aufgabe 13: (12 Punkte)

Ein idealer Paramagnet bestehe aus $N \gg 1$ magnetischen Momenten $m_i = \pm\mu$ mit $i = 1, \ldots, N$. Die Hamilton-Funktion des Paramagneten in einem Magnetfeld lautet

$$H = -B \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

(a) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_0 und die Energie E_1 der ersten Anregung.
(b) Wie groß ist jeweils der Entartungsgrad? Wie groß ist die Zahl der Zustände Ω bei vorgegebener Energie $U = E_n$. Wie viele Zustände hat der Paramagnet insgesamt?
(c) Welche Entropie $S = k_\mathrm{B} \ln \Omega$ hat der Paramagnet als Funktion seiner Energie?
(d) Bestimmen Sie die Temperatur des Paramagneten als Funktion der Energie, bzw. der Zahl der negativen magnetischen Momente.

(Hinweis: Verwenden Sie ggf. $\frac{d \ln x!}{dx} \simeq \ln(x+1)$.)

Aufgabe 14: (10 Punkte)

Ein einfaches Modell eines Gummibands sei gegeben durch eine Kette aus N Gliedern der Länge a. Alle Glieder liegen auf einer Geraden. Die Glieder können mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder links gerichtet sein.

(a) Bestimmen Sie die Zahl der Zustände Ω bei vorgegebener Länge L des Gummibands für den Fall $L \ll Na$. (*Hinweis:* Die Länge L lässt sich schreiben als $L = ma$ mit $m = n_+ - n_-$, wobei $n_\pm$ die Zahl der nach rechts/links gerichteten Kettenglieder sei. Überzeugen Sie sich davon, dass Ω als ein geeigneter Binomialkoeffizient geschrieben werden kann.)

(b) Zeigen Sie, dass sich die Entropie für $|m| \ll N$ schreiben lässt als

$$S(U, L) - S(U, 0) = -\frac{k_\mathrm{B} L^2}{2Na^2}. \tag{1}$$

(*Hinweis:* Sie können für große $n \gg 1$ die Näherung $\ln(n!) \simeq n\, ln(n)$ verwenden, sowie $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}$ für $|x| \ll 1$.)

(c) Bestimmen Sie die Kraft F, mit der das Gummiband die Arbeit $\delta W = F dL$ bei Längenänderung dL verrichten kann. Verwenden Sie dazu Gl. (1) und den 1. Hauptsatz. Wie ändert sich F mit steigender Temperatur?