6.6 Relativistische ideale Quantengase

Unsere bisherigen Beispiele von idealen Quantengasen behandelten nicht-relativistische Teilchen, insbesondere am Beispiel quantenmechanische Teilchen im 3-dimensionalen Kastenpotential, $\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$.

Um zum relativistischen Fall überzugehen müssen wir die Einteilchenenergien lediglich zum relativistischen Fall verallgemeinern. D.h. für das ideale relativistische Quantengas benötigen wir lediglich den relativistischen Zusammenhang zwischen Energie & Impuls:

$$E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4} \tag{6.107}$$

für relativistische Punktteilchen. Im quantenmechanischen Fall für Teilchen im Kastenpotential folgt nach dem Korrespondenzprinzip für die Einteilchen-Energie

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{c^2 \hbar^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4} \tag{6.108}$$

Wir wollen wieder im Limes $N, L \to \infty$ (mit Teilchendichte endlich) arbeiten. Analoge Überlegungen führen uns ähnlich wie im Fall nichtrelativistischer Gase auf einfache Integralausdrücke für die Teilchendichte und die Energiedichte:

$$n = \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{mc^2}{\hbar c} \right)^3 \int_1^\infty \frac{x\sqrt{x^2-1}}{z^{-1} e^{\beta m c^2 x} \mp 1} dx \qquad (6.109)$$

$$u = \frac{(mc^2)^4}{2\pi^2 (\hbar c)^3} \int_1^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2-1}\, dx}{z^{-1} e^{\beta m c^2 x} \mp 1} \qquad (6.110)$$

mit der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ und der Substitution

$$x = \sqrt{\frac{c^2 \hbar^2 k^2}{m^2 c^4} + 1} \, . \qquad (6.111)$$

~~Die~~ Die hier auftretende Längenskala $\frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{mc} = \lambdabar_c \equiv \frac{\lambda_c}{2\pi}$ entspricht der Compton-Wellenlänge der Teilchen.

Im allgemeinen Fall können die Integrale leicht numerisch ausgewertet werden. Interessante Vereinfachungen ergeben sich im ultrarelativistischen Limes, wenn die typischen thermischen Energien die Ruheenergie übersteigt,

$$k_B T \gg mc^2 \qquad (6.112)$$

$$\Rightarrow \quad 1 \gg \beta m c^2$$

In diesen Limes sind beide Integranden stark für x-Werte im Bereich $x \sim \frac{1}{\beta m c^2} \gg 1$ gepeakt, während kleine x-Werte vernachlässigbar beitragen. Wir können dann

$$\sqrt{x^2-1} \simeq \sqrt{x^2}$$

nähern und die Integration bei $x=0$ beginnen lassen.

z.B. erhalten wir für Fermionen:

$$\underline{\underline{u}} \simeq \frac{(mc^2)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{z^{-1} e^{\beta m c^2 x} + 1}$$

$$\overset{(6.55)}{=} \frac{6 f_4(z)}{(\beta m c^2)^4} \frac{(mc^2)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3} = \underline{\underline{\frac{3}{\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} f_4(z)}} \qquad (6.113)$$

In gleicher Weise folgt für Bosonen

$$\underline{\underline{u}} \simeq \underline{\underline{\frac{3}{\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} g_4(z)}} \qquad (6.114)$$

In all diesen Formeln ist noch kein Spinfreiheitsgrad berücksichtigt, der einen weiteren Faktor $(2s+1)$ beiträgt.

Wie im nicht relativistischen Fall gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte. Wegen

$$\varepsilon_{\vec{k}} \sim \sqrt{\underbrace{c^2\hbar^2\vec{k}^2}_{\sim \frac{1}{L^2}} + \ldots} \sim \frac{1}{L} \sim V^{-\frac{1}{3}} \qquad (6.115)$$

skaliert die Einteilchen-Energie $\sim V^{-1/3}$ (anstelle von $\sim V^{-\frac{2}{3}}$ im nicht relativistischen Fall). Analog zu Gl. (6.47) folgt also

$$p = \frac{1}{3}\frac{U}{V} = \frac{1}{3}u\,. \qquad (6.116)$$

Hieraus folgt nach dem ersten Hauptsatz für adiabatische Prozesse

$$dU = d(uV) = -p\,dV$$

$$\Rightarrow \quad 0 = V\,du + (u+p)\,dV$$

$$\overset{(6.116)}{\Rightarrow} \quad 0 = 3V\,dp + 4p\,dV \qquad (6.117)$$

und damit der Adiabatenindex für ultrarelativistische Quantengase

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{4}{3}}} \qquad (6.118)$$

In gleicher ultrarelativistischer Näherung folgt für die Teilchendichte (6.109):

$$\underline{\underline{n = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \begin{cases} f_3(z) & \text{Fermionen} \\ g_3(z) & \text{Bosonen} \end{cases}}} \qquad (6.119)$$

Ein wichtiger Spezialfall ultrarelativistischer Quantengase ist der Fall von Photonen ("Lichtteilchen"). Diese haben exakt die Masse $= 0$, d.h. die ultrarelativistische Näherung ist tatsächlich exakt, und Photonen kommen in zwei Polarisationszuständen $(2s+1) \rightarrow 2$

(obwohl Photonen als Bosonen den Spin $s = 1$ tragen, kommt wegen ihrer Masselosigkeit die Spineinstellung $m = 0$ nicht vor, sondern nur $m = \pm 1$, daher $2s+1 \rightarrow 2$).

Photonen können im thermischen Gleichgewicht beliebig von einem Festkörper emittiert oder absorbiert werden. Das chemische Potential im Photonengas muss also verschwinden, $\mu = 0 \Rightarrow z = 1$

Mit (6.90), $g_\lambda(1) = \zeta(\lambda)$ folgt also für die Energiedichte des Photongases sofort:

$$u \overset{(6.114)}{=} 2 \cdot \frac{3}{\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \underbrace{g_4(1)}_{= \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi^2}{30} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \qquad (6.120)$$

(Stefan – Boltzmann – Gesetz)

Ähnlich folgt für die Photonzahldichte aus (6.119)

$$n = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \qquad (6.121)$$

Zwischen Energiedichte und Teilchenzahldichte besteht also der einfache Zusammenhang

$$u = \frac{3\, \zeta(4)}{\zeta(3)} n k_B T \simeq 2{,}7011\ n k_B T \qquad (6.122)$$

Ähnlich folgt aus der Gibbs-Duhem-Beziehung (6.59) für die Entropiedichte direkt: (mit $\mu = 0$, $P = \frac{1}{3} u$)

$$s = \frac{4}{3T} u = \frac{4\pi^2}{45} k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \simeq 3{,}6014\ n k_B \qquad (6.123)$$

Historisch bedeutsam ist zudem die von den einzelnen Moden beigetragene Energiedichte. Dazu gehen wir nochmals zurück zur mittleren Bosonischen Besetzungszahl,

$$\langle \hat{N}_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar c k} - 1}, \qquad (6.124)$$

wobei wir $\varepsilon_k = \hbar c k$ für Photonen (ultrarelativistische Teilchen) verwendet haben. Die Moden mit Wellenzahl k tragen daher

$$\varepsilon_k \langle \hat{N}_k \rangle = \frac{\hbar c k}{e^{\beta \hbar c k} - 1} \qquad (6.125)$$

zur Energie bei. Im Volumen V gibt es pro Wellenzahl-Intervall dk

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polarisation}}}{2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \underbrace{d^3k}_{= 4\pi k^2 dk} = 2 \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \qquad (6.126)$$

Moden mit Wellenzahlen zwischen k und $k+dk$.

Deren Beitrag zur Energiedichte ist folglich

$$du_k = \frac{\epsilon_k \langle \hat{N}_k \rangle}{V} = 2\, \frac{\cancel{V}}{\cancel{V}\, 2\pi^2}\, k^2 dk\, \frac{\hbar c k}{e^{\beta \hbar c k} - 1}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{\hbar c k^3\, dk}{e^{\beta \hbar c k} - 1} \tag{6.127}$$

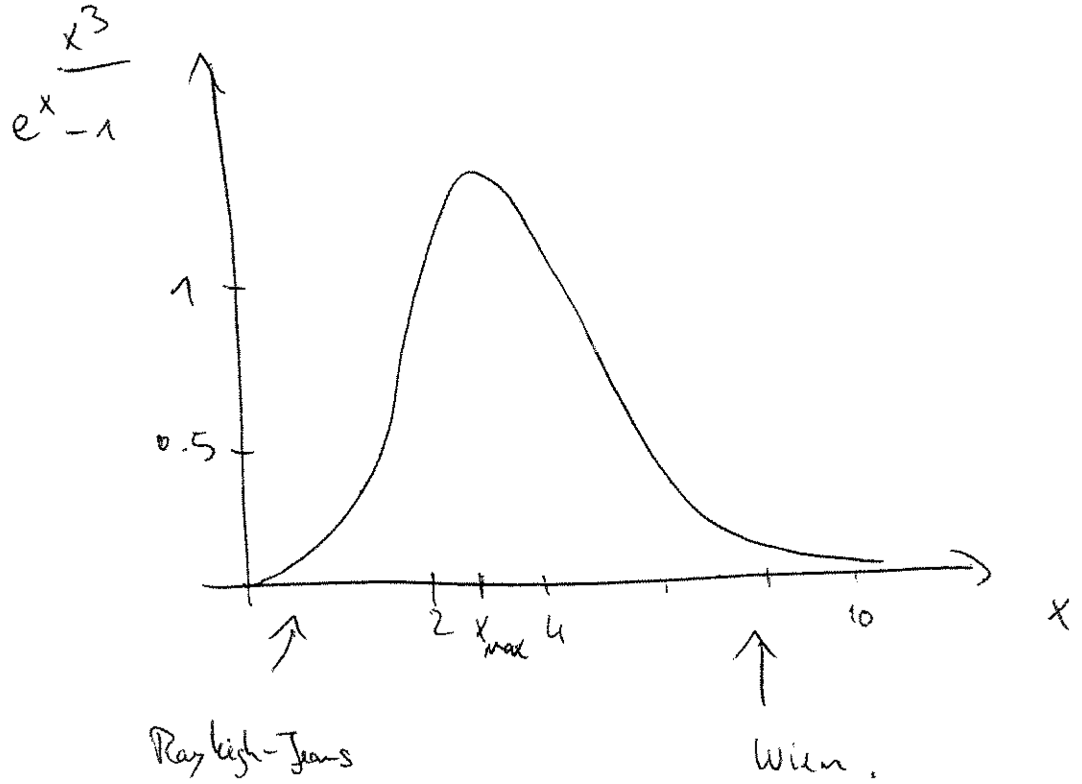
Verwenden wir statt k die Kreisfrequenz $\omega = ck$,

erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{d u_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}}} \tag{6.128}$$

(Planck'sches Strahlungsgesetz)

Dies ist die differenzielle Energiedichte eines Photongases, das sich z.B. im einem thermischen Gleichgewicht mit einem (frequenzunabhängig angekoppelten) Körper in der Umgebung befindet ("Schwarzkörperstrahlung").



Das Maximum liegt bei

$$e^{x_{max}} \left(1 - \frac{x_{max}}{3} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_{max} = \beta \hbar \omega_{max} = \frac{h \nu_{max}}{k_B T} \simeq 2.8214 \qquad (6.129)$$

$\Rightarrow$ Frequenz maximaler Energiedichte:

$$\nu_{max} \simeq 2.8214 \, \frac{k_B T}{h} \simeq 5.8788 \cdot 10^{10} \, \mathrm{Hz} \, \frac{T}{K} \qquad (6.130)$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz

Eine nahezu perfekte Strahlungsquelle von Planck'scher Schwarzkörperstrahlung ist der von R. Wilson und A. Penzias im Jahr 1964 entdeckte kosmische Mikrowellenhintergrund.

Die im frühen Universum vorliegenden Elektronen und Protonen bildeten zunächst ein für elektromagnetische Strahlung intransparentes Plasma. Durch die Expansion des Universums kühlte sich das Plasma ab, so dass sich bei einer Temperatur von ca. 3000 K die Elektronen und Protonen zu Atomen kombinieren konnten. Dadurch wurde das Universum transparent für Strahlung, die sich seitdem im wesentlichen entkoppelt von der Materie durchs Universum bewegt. Als Folge des thermischen Gleichgewichts mit dem Plasma vor der Entkopplung hat die Strahlung heute immer noch Schwarzkörpercharakter. Durch die Expansion des Universums ist die Strahlung heute aber um einen Faktor von ca. 1000 rotverschoben und hat ihr Maximum nun im Mikrowellen-Bereich.

Die Strahlung hat heute eine Temperatur von

$$T = 2.7255 \pm 0.0006 \text{ K} \tag{6.131}$$

und ist vor allem durch Satelliten-Missionen in den letzten Jahren sehr präzise vermessen worden. Nach den obigen Formeln folgt unmittelbar

$$n = 410.4 \ \mathrm{cm}^{-3} , \tag{6.132}$$

d.h. jeder Kubikzentimeter im Kosmos enthält gut 400 Photonen der Hintergrundstrahlung. Ebenso

$$u = 0.26 \ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3} \tag{6.133}$$

$$S = 0.13 \ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{cm}^3 \, \mathrm{K}} \tag{6.134}$$

Nach dem Wien'schen Verschiebungsgesetz liegt das Maximum

bei $\nu_{max} \simeq 160.22 \ \mathrm{GHz}$. (6.135)

Die Energiedichte u ist, wie wir aus der Elektrodynamik wissen, mit dem Betrag des Poynting-Vektors über

$$|\vec{S}| = \frac{c}{8\pi} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = c \cdot u \tag{6.136}$$

verknüpft. Der Poynting-Vektor bezeichnet wiederum die Energiestromdichte des Elektromagnetischen Felds.

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs können wir das Planck'sche Strahlungsgesetz auch in der Form der "spezifischen Intensität" schreiben, die die Energiestromdichte pro Frequenzintervall und pro Raumwinkel bezeichnet:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d|\vec{S}|}{d\omega} \overset{(6.128)}{\underset{(6.136)}{=}} \frac{\hbar}{4\pi^3 c^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \qquad (6.137)$$

$\uparrow$
pro Raumwinkel

Am Maximum ν_{max} hat die spezifische Intensität der kosmischen Mikrowellenstrahlung einen Wert von

$$3.83 \cdot 10^{-22} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\,cm^2\,Hz\,sr}} \qquad (6.138)$$

Mit $\nu_{max} \simeq 160.22\,\mathrm{GHz} \mathrel{\hat{=}} 0.6626 \frac{\mathrm{meV}}{h}$ folgt damit, dass durch jeden Quadratzentimeter Fläche im heutigen Universum pro Sekunde etwa 45 Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung in einem Frequenzband ~~mit~~ mit 1 Hz Breite um ν_{max} strömen. Damit ist die kosmische Hintergrundstrahlung eine der intensivsten Strahlungsquellen in der Astronomie.

Der kosmische Mikrowellenhintergrund ist auch gerade deswegen von erheblicher Bedeutung, da in den kleinen Schwankungen um das Planck'sche Schwarzkörperspektrum auf dem 10^{-4} Niveau sehr viel Information über die globalen Eigenschaften des Universums, seine Frühphase und über Strukturbildung enthalten ist.

Neben dem kosmischen Mikrowellenhintergrund vermutet man auch die Existenz eines kosmischen Neutrinohintergrunds.

Durch Teilchenreaktionen der Art

$$\nu + \bar{\nu} \longleftrightarrow e^+ + e^- \qquad (6.139)$$

befinden sich die Neutrinos im sehr frühen Universum im thermischen Gleichgewicht mit dem Plasma. Der Wirkungsquerschnitt für diese Prozesse fällt allerdings quadratisch mit der Energie der Teilchen. Da die Wechselwirkung bei kleinen Energien sehr schwach wird, kommt der Prozess (6.139) bereits bei Temperaturen unterhalb von $T \simeq 2.9 \cdot 10^{10}$ K zum Erliegen ($\simeq k_B T \simeq 2.52$ MeV) (vgl. $T \simeq 3000$ K für die Entkopplung der Photonen vom e^- und Protonen-Plasma.)

Der ähnliche Prozess für Photonen

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^+ + e^- \qquad (6.140)$$

bleibt noch solange möglich, wie die thermische Photonenergie der doppelten Ruhemasse des Elektrons entspricht, also

$k_B T \simeq 2 \cdot 511\,\text{keV} \simeq 1{,}022\ \text{MeV}$.

Bei tieferen Temperaturen läuft der Prozess (6.140) dann im Wesentlichen nur noch nach links ab, $e^+ + e^- \to 2\gamma$.
Die durch die Elektron-Positron-Paarvernichtung erzeugten Photonen heizen also noch die photonische Hintergrundstrahlung auf, nicht jedoch mehr die Temperatur des Neutrino-hintergrunds. Daher vermutet man, dass der Mikrowellen-hintergrund T_γ wärmer ist als der Neutrino-Hintergrund mit Temperatur T_ν.

Das Verhältnis der Temperaturen lässt sich durch einfache Überlegungen abschätzen:
Zunächst gilt, dass die e^+e^--Paarvernichtung reversibel und adiabatisch verläuft, d.h. die Entropiedichte des anfänglichen e^+e^- und γ-Plasma muss gleich

der Entropiedichte des Photongases nach Paarvernichtung sein:

$$\left(S_{e^+} + S_{e^-} + S_\gamma\right)_{\text{vorher}} = \left(S_\gamma\right)_{\text{nachher}} \qquad (6.141)$$

Da die relevanten Energieskalen jenseits der Ruhemasse liegen, behandeln wir die Elektronen und Positronen als ultra-relativistisches Gas. Da im Plasma die Quantenzustände nicht dicht besetzt sind, spielt das Pauli-Blocking noch keine große Rolle, so dass wir $\mu = 0$ wählen können.

Der in (6.123) gefundene Zusammenhang zwischen Entropie- und Energiedichte

$$s = \frac{4}{3T}\, u \qquad (6.142)$$

gilt gleichermaßen für ultra-relativistische Fermionen und Bosonen. Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (6.120) für Photonen und der analogen Formel für ultra-relativistische Fermionen, erhalten wir

$$s = \underbrace{2}_{=\begin{cases}(2s+1) & \text{für } e^+ \text{ und } e^- \text{ mit } s=\frac{1}{2}\\ 2 & \text{Polarisationszustände für } \gamma\text{'s}\end{cases}} \cdot \frac{4}{\pi^2}\, k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \begin{cases} f_4(1) & \text{für } e^+ \text{ und } e^- \\ g_4(1) & \text{für } \gamma\text{'s} \end{cases} \qquad (6.143)$$

Die Entropiedichtebilanz (6.141) liefert folglich

$$T_{\text{vorher}}^3 \left(2 f_4(1) + g_4(1) \right) = T_{\text{nachher}}^3 \; g_4(1) \qquad (6.144)$$

mit $f_4(1) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1}$, $g_4(1) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$.

Wegen

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{2}{e^{2x} - 1}$$

gilt:

$$\frac{1}{e^x + 1} = - \frac{2}{e^{2x} - 1} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f_4(1)}} = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^\infty x^3 dx \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1} \right)$$

$y = 2x$

$$= g_4(1) - \frac{1}{\Gamma(4)} \frac{2}{2^4} \int \frac{dy \; y^3}{e^y - 1}$$

$$= g_4(1) - \frac{1}{8} g_4(1) = \underline{\underline{\frac{7}{8} g_4(1)}} \qquad (6.145)$$

Es folgt für die Entropiebilanz

$$T^3_{\text{vorher}} \left(2 \cdot \frac{7}{8} + 1\right) = T^3_{\text{nachher}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_{\text{nachher}}}{T_{\text{vorher}}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \simeq 1.40 \,, \qquad (6.146)$$

d.h. die e^+e^- - Paarvernichtung erhöht die Temperatur des kosmischen Mikrowellenhintergrunds verglichen mit dem Neutrinohintergrund um 40 %. Entsprechend vermutet man eine Temperatur des Neutrinohintergrunds im heutigen Universum von $T_\nu \simeq 1{,}95$ K.

Eine Entdeckung dieses Hintergrunds könnte an der nächsten Generation von Untergrundexperimenten möglich sein, die nach speziellen Formen dunkler Materie suchen (z.B. WIMP-Suche bei XENON nT).