

## 6.3 Ideale Quantengase

Für ideale Quantengase, d.h. wechselwirkungsfreie Teilchen, lässt sich die großkanonische Zustandssumme exakt berechnen. Wir nehmen dafür an, dass die 1-Teilchen-Basis  $\{|k\rangle\}$  den 1-Teilchen-Hamilton-Operator diagonalisiert:

$$\hat{H}_1 |k\rangle = \epsilon_k |k\rangle \quad (6.34)$$

Die genaue Form von  $\hat{H}_1$  und das Energiespektrum  $\epsilon_k$  ist dabei zunächst unerheblich. Für ein ideales Gas, bei dem jedes Teilchen die Energie  $\epsilon_k$  gemäß seines Zustands  $|k\rangle$  beiträgt, lautet also der gesamte Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \hat{N}_k = \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (6.35)$$

Der Hamilton-Operator wird durch Fock-Raum-Basiszustände diagonalisiert:

$$\begin{aligned} \hat{H} |m_1, m_2, \dots\rangle &= \sum_k \epsilon_k \hat{N}_k |m_1, m_2, \dots\rangle \\ &= \sum_k \epsilon_k m_k |m_1, m_2, \dots\rangle \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die Eigenwerte entsprechen der Summe der 1-Teilchen-Energien gewichtet mit der Zahl der Teilchen pro Zustand.

Damit wird die großkanonische Zustandssumme direkt berechenbar:

$$\begin{aligned}
Z_{gc} &= \text{Tr} e^{-\beta \sum_k (E_k - \mu) \hat{N}_k} \\
&= \sum_{\{n\}} \langle n_1, n_2, \dots | e^{-\beta \sum_k (E_k - \mu) \hat{N}_k} | n_1, n_2, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n\}} \langle n_1, n_2, \dots | e^{-\beta \sum_k (E_k - \mu) n_k} | n_1, n_2, \dots \rangle \\
&= \sum_{\{n\}} e^{-\beta \sum_k (E_k - \mu) n_k} = \sum_{\{n\}} \prod_k e^{-\beta (E_k - \mu) n_k}, \quad (6.37)
\end{aligned}$$

Wobei  $\{n\}$  die Menge aller möglichen Besetzungszahlen aller Zustände bedeutet. Explizit lautet dies

$$\begin{aligned}
Z_{gc} &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_s} \prod_k e^{-\beta (E_k - \mu) n_k} \\
&= \sum_{n_1} e^{-\beta (E_1 - \mu) n_1} \dots \sum_{n_s} e^{-\beta (E_s - \mu) n_s} \\
&= \prod_k \sum_{n_k} e^{-\beta (E_k - \mu) n_k} \quad (6.38)
\end{aligned}$$

Bis hierhin spielte es keine Rolle, ob wir ein Ensemble von fermionischen oder bosonischen Teilchen betrachten. Der Unterschied zwischen beiden Fällen liegt in der Wertemenge der Besetzungszahlen  $n_k$ :

für Bosonen muss über alle  $n_k = 0, 1, \dots, \infty$  summiert werden, d.h.

Gl. (6.38) entspricht einem Produkt von geometrischen Reihen.

Wir erhalten die großkanonische Zustandssumme des idealen Bose-Einstein-Gases

$$Z_{gc}^{BE} = \prod_k \left( 1 - e^{-\beta (E_k - \mu)} \right)^{-1} \quad (6.39)$$

Für Fermionen kann  $n_k$  nur die Werte 0 und 1 annehmen.

Wir erhalten also die Zustandssumme des idealen Fermi-Dirac-Gases

$$Z_{gc}^{FD} = \prod_k (1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}) \quad (6.40)$$

Entsprechend folgt für das großkanonische Potential ideale Quantengase

$$\begin{aligned} \int_{BE}^{FD} &= -k_B T \ln Z_{gc}^{BE} \\ &= \pm k_B T \sum_k \ln (1 \mp e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Alle thermodynamischen Eigenschaften ideale Quantengase lassen sich nun daraus ableiten. Alle weiteren 1-Teilchen-Eigenschaften (relativistische, nicht-relativistische, massive Teilchen etc.) werden durch  $\epsilon_k$  parametrisiert.

Im Folgenden betrachten wir noch einige allgemeine Eigenschaften.

Aus der Definition des großkanonischen Dichte-Operators

folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho}_{gc} &= 1 = \text{Tr} \left( \frac{1}{Z_{gc}} e^{-\beta \sum_k (\epsilon_k - \mu) \hat{N}_k} \right) \\ &= \text{Tr} \left( e^{\beta \mathcal{H}} e^{-\beta \sum_k (\epsilon_k - \mu) \hat{N}_k} \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

Entsprechend muss die Ableitung nach jedem Parameter verschwinden.

Insbesondere für die Ableitung nach einem Energieeigenwert  $\epsilon_l$

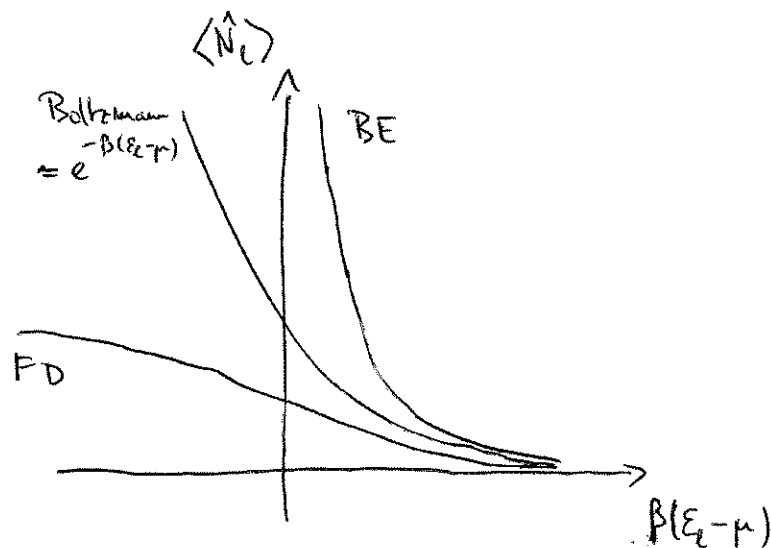
folgt:

$$0 = \frac{\partial \text{Tr} \hat{\rho}_{gc}}{\partial \epsilon_l} = \beta \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{gc} \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_l} - \hat{N}_l \right) \right] \quad (6.43)$$

Daraus erhalten wir die mittlere Besetzungszahl des  $l$ -ten Zustands:

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_l \rangle &\equiv \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{gc} \hat{N}_l \right] = \text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{gc} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_l} \right] = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_l} \underbrace{\text{Tr} \left[ \hat{\rho}_{gc} \right]}_{=1} \\ &\stackrel{(6.41)}{=} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} \mp 1} \end{aligned} \quad (6.44)$$

mit dem oberen Vorzeichen für Bose-Einstein und dem unteren für Fermi-Dirac-Gase.



Für große 1-Tücken-Energien bezogen auf die thermische Energie nähern sich die Besetzungszahlen beider Quantengase dem klassischen Ergebnis (Boltzmann-Faktor) an. Für kleine Argumente gibt es deutliche Abweichungen.

Da die mittlere Besetzungszahl nicht negativ sein kann, muss für Bosonen immer gelten:  $\epsilon_l > \mu$  für alle  $l$ . Für kleine Temperaturen (große  $\beta$ ) ist die Besetzungszahl der Energieniveaus  $\epsilon_l \geq \mu$  nahe bei  $\mu$  für Bosonen besonders hoch.

Für Fermionen existiert zunächst keine solche Einschränkung an das chemische Potential.

Als Beispiel betrachten wir nun ein Ensemble von Teilchen in einem 3-dimensionalen Kastenpotential. Das Volumen habe Würfelform mit Kantenlänge  $L$ .

Für nicht-relativistische Teilchen der Masse  $m$  sind die 1-Teilchen-Energien aus der Quantenmechanik gut bekannt:



$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \quad \vec{k} = \frac{\pi}{L} \vec{n}, \quad \text{mit } \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \{0\}$$

Mittlere Teilchenzahl und die innere Energie ergeben sich dann durch Summation über alle  $\vec{n}$ :

$$\langle \hat{N} \rangle = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{n}} - \mu)} + 1}, \quad U = \sum_{\vec{n}} \epsilon_{\vec{n}} \langle \hat{N}_{\vec{n}} \rangle = \sum_{\vec{n}} \frac{\epsilon_{\vec{n}}}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{n}} - \mu)} + 1} \quad (6.45)$$

Wir haben uns bereits in Abschnitt 2.2 davon überzeugt, dass wegen  $\epsilon_{\vec{n}} \sim \frac{1}{L^2} \sim V^{-2/3}$  für den Druck

$$\text{folgt:} \quad p = - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial V} = - \sum_{\vec{n}} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon_{\vec{n}}}}_{\langle \hat{N}_{\vec{n}} \rangle} \underbrace{\frac{\partial \epsilon_{\vec{n}}}{\partial V}}_{-\frac{2}{3} \frac{\epsilon_{\vec{n}}}{V}} = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (6.47)$$

Hier sehen wir, dass diese vormals klassische Überlegung auch in der Quantenstatistik für nicht-relativistische Teilchen unabhängig von der Teilchensorte Bestand hat.

Wir wollen an diese Stelle die Summen in (6.46) nicht weiter ausführen, sondern stattdessen den thermodynamischen Limes betrachten. Um den Limes  $N \rightarrow \infty$  sinnvoll betrachten zu können, muss auch das Volumen anwachsen, d.h. wir benötigen den Limes  $L \rightarrow \infty$ . Mit  $\vec{k} = \frac{\pi}{L} \vec{n}$  werden dann auch die zulässigen Wellenzahlen beliebig dicht in  $\mathbb{R}_+^3$  liegen. Die Summen in (6.46) können dann als integrale approximierende Riemann-Summen betrachtet werden mit

$$\Delta k = \frac{\pi}{L} \rightarrow dk$$

$$\Rightarrow \sum_{\vec{n}} = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \sum_{\vec{n}} (\Delta k)^3 \rightarrow \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}_+^3} d^3k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \quad (6.48)$$

Im Folgenden betrachten wir Fermionen und Bosonen separat.

## 6.4 Ideale Fermi-Gase

Bislang haben wir weitere Teilcheneigenschaften beiseite gelassen. Allerdings verknüpft das Spin-Statistik-Theorem (Beweis im Rahmen der Quantenfeldtheorie) die statistischen Eigenschaften von fermionischen Teilchen mit ihrer Eigenschaft einen halbzahigen Spin zu tragen, während Bosonen einen ganzzahligen Spin tragen. Das Ignorieren des Spin Freiheitsgrad ist also im Fall von Bosonen möglich und beschreibt skalare Spin-Null Bosonen. Spinlose Fermionen existieren jedoch nicht, so dass bei Fermionen immer ihr Spin zu berücksichtigen ist. Für ideale Wechselwirkungsfreie Gase bedeutet dies lediglich, dass in der Zustandssumme und dem Dichteoperator auch über die Spin Freiheitsgrade summiert werden muss. Für eine gegebene Spinquantenzahl  $s$  führt dies zu einem zusätzlichen globalen Faktor von  $2s+1$  möglichen Spineinstellungen.

Folglich erhalten wir beispielsweise für die mittlere fermionische Teilchendichte gemäß (6.46) im thermodynamischen Limes (6.48) :

$$\begin{aligned}
 n &:= \frac{\langle \hat{N} \rangle}{V} = \frac{1}{V} \frac{(2s+1)}{(2\pi)^3} \int_{\text{L}^3} d^3k \frac{1}{\exp\left(\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right) + 1} \\
 &= \frac{(2s+1)}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right] + 1} \quad (6.49)
 \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $x = \frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m}$ , lässt sich die (6.50)

Integrationsvariable  $k$  auch schreiben als

$$k = \frac{\sqrt{2m k_B T}}{\hbar} \sqrt{x} = \sqrt{4\pi x} \frac{1}{\lambda_T} \quad (6.51)$$

mit der im (4.34. e) eingeführten thermischen Wellenlänge

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (6.52)$$

Zudem definieren wir die Fugazität

$$z = e^{\beta\mu} \quad (6.53)$$

Da  $\mu$  der Energie entspricht, die aufgebracht werden muss, um ein Teilchen einem System hinzuzufügen, steigt mit  $\mu$  die "Tendenz eines Teilchens, das System zu verlassen" (Fugare  $\hat{=}$  fliehen).

Mit (6.51) und (6.53) schreibt sich die Teilchendichte

$$n = (2s+1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda_T^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{z^{-1} e^x + 1} \quad (6.54)$$

Das hier auftretende Integral ist ein Spezialfall der allgemeineren Fermi - Integrale

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1} dx}{z^{-1} e^x + 1} \quad (6.55)$$

so dass wir die Teilchendichte schreiben können als



$$n = (2s+1) \frac{f_{3/2}(z)}{\lambda_T^3} \quad (6.56)$$

In analoge Weise ergeben sich die innere Energie aus (6.46) bzw. die innere Energiedichte zu

$$u = \frac{U}{V} = (2s+1) \frac{3}{2} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} f_{5/2}(z) \quad (6.57)$$

und der Druck nach (6.47) zu

$$p = (2s+1) \frac{k_B T}{\lambda_T^3} f_{3/2}(z) \quad (6.58)$$

Mit der Gibbs-Duhem-Beziehung und der Definition des großkanonischen Potentials

$$-pV = \mathcal{J} = U - TS - \mu N \quad (6.59)$$

lässt sich ebenso direkt die Entropiedichte bestimmen:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{1}{T} (u + p - \mu n) = \frac{1}{T} \left( \frac{5}{3} u - \mu n \right)$$

$$\Rightarrow S = (2s+1) \frac{k_B}{\lambda_T^3} \left( \frac{5}{2} F_{5/2}(z) - \beta \mu F_{3/2}(z) \right). \quad (6.60)$$

Um Kontakt zu knüpfen mit dem klassischen Limes gehen wir noch einmal zurück zum Ausdruck für die Teilchenzahl im diskreten Fall, z.B. Gl. (6.44):

$$\langle \hat{N} \rangle = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

Das Gas verhält sich klassisch, d.h.  $\langle \hat{N} \rangle \sim e^{-\beta(\epsilon - \mu)}$ ,

wenn

$$e^{\beta(\mu - \epsilon_k)} \ll 1 \quad (6.61)$$

gilt und zwar für alle relevanten Energieniveaus. D.h.,

Wir erreichen diesen Limes, wenn die Fugazität

$$z = e^{\beta \mu} \ll 1 \quad (6.62)$$

sehr viel kleiner als 1 ist. Im Fall von Fermionen sprechen wir in diesem Limes von einem "schwach entarteten" Fermi-Gas. In diesem Limes lassen sich die Korrekturen zur klassischen Statistik aus obigen Resultaten und den Eigenschaften des Fermi-Integrals direkt ausrechnen, vgl. Übungen.

Im Folgenden wollen wir uns den Limes starker Entartung zuwenden, d.h.  $z \gg 1$ , bzw.  $z \rightarrow \infty$ . Für jedes positive  $\mu > 0$  wird dieser Limes bei hinreichend kleinen Temperaturen  $T \rightarrow 0$  erreicht.

Dazu gehen wir noch einmal zurück zu (6.43) und schreiben die mittlere Teilchenzahl als

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{(2s+1)}{2\pi^2} V \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)\right] + 1} \quad (6.63)$$

bzw. mit  $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ,  $d\epsilon = \frac{\hbar^2 k}{m} dk$

als 
$$\langle \hat{N} \rangle = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) \bar{n}_F(\epsilon) \quad (6.64)$$

mit der Besetzungswahrscheinlichkeit des fermionischen Energieniveaus  $\epsilon$

$$\bar{n}_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (6.65)$$

und der Zustandsdichte freier Elektronen

$$D(\epsilon) = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{2h^3} (2s+1) V \sqrt{\epsilon}. \quad (6.66)$$

Mit Hilfe der Zustandsdichte lassen sich auch weitere oben bereits diskutierte Größen in kompakter Form schreiben. Z.B. die innere Energie

$$U = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) \bar{n}_F(\epsilon) \epsilon \quad (6.67)$$

oder das Potental

$$J = -k_B T \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) \ln(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}) \quad (6.68)$$

Im Limes  $T \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , nähert sich die Bosekys-Wahrscheinlichkeit einer Stufenfunktion an:

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{T \rightarrow 0} \Theta(\mu - \epsilon), \quad (6.69)$$

d.h. am absoluten Nullpunkt der Temperatur sind alle Ein teilchenzustände bis zur Fermi-Energie

$$\epsilon_F = \mu \quad (6.70)$$

besetzt und alle höher liegenden unbesetzt.

Die Fermi-Energie gibt also die

höchste Energie an, die ein Teilchen im Gas

im Grundzustand des Systems haben kann.

Ebenso ist ein der Fermi-Energie entsprechender Fermi-Impuls definierbar:

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}. \quad (6.71)$$

Im Limes (6.69) vereinfachen sich die Ausdrücke der verschiedenen Größen:

mittlere Teilchendichte:  $\langle N \rangle = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{3} D(\epsilon_F) \epsilon_F \quad (6.72)$

innere Energie:  $U = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{5} D(\epsilon_F) \epsilon_F^2 = \frac{3}{5} \langle N \rangle \epsilon_F \quad (6.73)$

Gl. (6.72) lässt sich auch invertieren und führt auf einen

Zusammenhang zwischen Fermi-Energie und Teilchendichte:

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{(2s+1)\pi}{6} \right)^{2/3} n^{2/3}, \quad n = \frac{\langle N \rangle}{V} \quad (6.74)$$

bzw. zwischen Fermi-Impuls und Teilchendichte

$$p_F = \frac{h}{2} \sqrt[3]{\frac{(2s+1)\pi}{6}} n^{1/3} \quad (6.75)$$

Per constructionem hängen diese Gleichungen für thermodynamische Zustandsgrößen nicht mehr von der Temperatur ab, da der Limes  $T \rightarrow 0$  genommen wurde. Da sich die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\bar{n}_F(\epsilon)$  jedoch exponentiell schnell der Stufenfunktion in (6.69) annähert, ist zu erwarten, dass diese Insensitivität der Zustandsgrößen auf die Temperatur auch für endliche kleine Temperaturen gültig ist. Als Maß für den Gültigkeitsbereich kann man die Fermi-Temperatur definieren

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{h^2}{8k_B m} \left( \frac{(2s+1)\pi}{6} \right)^{2/3} n^{2/3}. \quad (6.76)$$

Der Limes  $T \rightarrow 0$  bleibt eine hinreichend gute Beschreibung des Fermi-Gases auch bei endlichen  $T$ , solange  $T \ll T_F$ .

Es gilt nämlich

$$1 \ll \left( \frac{E_F}{T} \right)^{1/2} = \underbrace{\left( \frac{9\pi}{16(2s+1)} \right)^{1/6}}_{\approx \mathcal{O}(1)} \lambda_T m^{1/3} \approx \lambda_T m^{1/3} \quad (6.77)$$

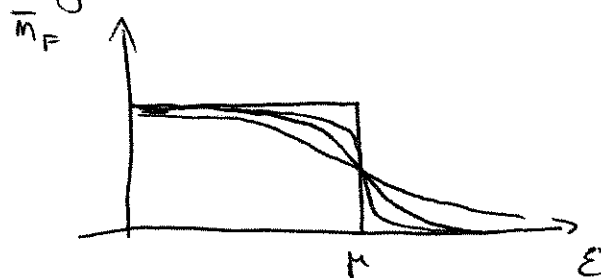
d.h. die thermische de-Broglie Wellenlänge ist deutlich größer als der mittlere Teilchenabstand  $\sim \frac{1}{m^{1/3}}$  in diesem Regime. Wie oben angesprochen ist dies ein Maß dafür, dass quantenstatistische Effekte gegenüber klassisch thermodynamischen Effekten dominieren.

Es macht also Sinn, in diesem Temperaturbereich (trotz Unabhängigkeit von der Temperatur) von

$$\underline{P} = \frac{(6.47)}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{5} m \varepsilon_F = \frac{h^2}{20m} \left( \frac{(2s+1)\pi}{6} \right)^{2/3} m^{5/3} \quad (6.78)$$

als der thermischen Zustandsgleichung des entarteten Fermi-Gases nahe dem absoluten Temperatur-Nullpunkt zu sprechen. Anders als beim klassischen idealen Gas verschwindet der Druck also nicht für  $T \rightarrow 0$  sondern ist proportional zur (Teilchendichte)<sup>5/3</sup>.

Mit zunehmender Temperatur wird die Stufenfunktion in (6.69) zunehmend "ausgeschminkt",



d.h. für  $T > 0$  sind nicht mehr alle Zustände mit Energie  $E < E_F$  voll besetzt, jedoch gibt es besetzte Zustände mit  $E > E_F$ . Dies führt zu Korrekturen in den obigen Gleichungen für das entartete Fermi-Gas.

Diese lassen sich im Regime  $T < T_F$  systematisch mit Hilfe der Sommerfeld'schen Tieftemperaturentwicklung, d.h. der Entwicklung der Fermi-Integrale für große Fugazität  $z \gg 1$ , berechnen.

Als einfache Anwendung betrachten wir Metalle mit einem Valenzelektron, das in der festen Phase des Metalls zu einem quasi-freien Leitungselektron wird. Die Teilchendichte der Leitungselektronen ist somit durch die Teilchendichte der Atome bestimmt. Mit der Annahme, dass sich die Leitungselektronen wie ein ideales Fermi-Gas verhalten, finden wir für die

Fermi-Energie:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{2/3} \quad (6.79)$$

mit der <sup>Valenz</sup>-Elektronendichte  $n_e$  und dem Elektronenspin  $s = \frac{1}{2}$ ,  $2s+1=2$ .

Typische Werte für  $n_e$ ,  $E_F$  und die weiteren ableitbaren charakteristischen Größen Fermi-Geschwindigkeit

$$v_F = \frac{p_F}{m} = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} \quad \text{und die Fermi-Temperatur sind z.B.}$$

	$n_e [10^{22} \text{ cm}^{-3}]$	$n_F [10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}]$	$E_F [\text{eV}]$	$T_F [10^4 \text{ K}]$
Na	2.5	1.1	3.1	3.7
Cs	0.86	0.73	1.5	1.8

Die Fermi-Geschwindigkeit liegt ca. bei  $\frac{1}{300}$  der Lichtgeschwindigkeit, die nicht-relativistische Behandlung ist also konsistent.

Die Fermi-Temperatur liegt bei einigen 10.000 Grad, so dass bei Zimmertemperatur oder Tieftemperaturwertes  $T \ll T_F$  gut erfüllt sein sollte.

Die Tieftemperaturentwicklung liefert nun z.B. eine Korrektur zur inneren Energie  $U$  in (6.73), die quadratisch in  $T$  ist

$$U = \frac{3}{5} \langle N \rangle E_F + \frac{1}{2} c T^2 \quad (\text{ohne Rechnung}) \quad (8.80)$$

$$\text{mit } c = \frac{\pi^2}{2} \langle N \rangle k_B T_F^{-1}$$

Über die Wärmekapazität  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  kann

die Konstante  $c$  leicht im Experiment vermessen werden.

Es findet sich für Natrium  $\frac{C_{\text{exp}}}{C_{\text{theo}}} = 1.21$  und

für Cäsium  $\frac{C_{\text{exp}}}{C_{\text{theo}}} \approx 1.35$ , d.h. eine qualitativ

gute Übereinstimmung mit der Hypothese die Valenzelektronen als <sup>ideales</sup> Fermi-Gas zu nähern. Die Abweichungen

sind also ein Maß für die Relevanz der Elektron-Elektron und Elektron-Gitter-Wechselwirkung.