

4.4.3 Quanten - Einstein Gravitation ?

112

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{g} (-R(g) + 2\bar{\lambda}) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} [G] &= -2 \\ [\bar{\lambda}] &= 2 \end{aligned} \quad \text{perturbativ nicht renormisierbar}$$

kritische Dimension: $d=2 \leadsto [G_{d=2}] = 0$

aber: $\int \sqrt{g} R$ topologische Invariante in $d=2$
 (= Euler Charakteristik)
 $\Rightarrow$ keine Propagierenden Freiheitsgrade

$d > 2$?

ϵ -Entwicklung:

dim' lose Newton - Konstante: $g \sim k^\epsilon G$

$$\beta \text{ Funktion: } \partial_t g = \epsilon g - \frac{38}{3} g^2 \quad (\text{Weinberg '76})$$

$$\Rightarrow \text{nicht-Gaußscher FP: } g_* = \frac{3}{38} \epsilon \quad (4.48)$$

$\Rightarrow$ Gravitation nicht-perturbativ renormisierbar in $d=2+\epsilon$!
 (gültig für $\epsilon \ll 1$!)

Flußgleichung in Einstein-Hilbert Trunkierung (Reuter '98)

$$\Gamma_u = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{g} \left(-R(g) + 2\bar{\lambda}_k \right) \quad (4.49)$$

Dim'lose Kopplungen:

$$g = k^{d-2} G_k, \quad \lambda = k^{-2} \bar{\lambda}_k \quad (4.50)$$

Resultat der Flußgleichung:

Es existiert ein nicht-Gaußscher FP mit $g_*, \lambda_* > 0$

mit $g_* \lambda_* \approx 0.13$ in $d=4$.

($g_* \lambda_*$ im Prinzip meßbar, da im FP Regime:

$$\bar{\lambda}_k = \frac{\lambda_* g_*}{G_k} = f(G_k)_{d=4}$$

Konsequenzen in $d=4$:

$$- \left. G_k \right|_{\text{FP-Regime}} = g_* / k^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ asymptotische Freiheit im UV
(jenseits der Planck Skala)

$\Rightarrow$ Gravitation wird stark-WW
an der Planck-Skala

$\Rightarrow$ (M_P spielt ähnliche Rolle wie
 Λ_{QCD} in der starken WW)

$\Rightarrow$ IR Behandlung ($p_i^2 \ll M_P$) ist schwierig
(analog zu IR in der QCD)

$$- \quad \bar{\lambda}_n = \lambda_* \cdot k^2 \quad \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ (Quanten-) Einstein - Gl. dominiert durch $\bar{\lambda}_n$ im UV

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\bar{\lambda}_n g_{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ jede Lösung hat typischen Krümmungsradius

$$r_c(k) \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}_n}} \sim \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ Experiment mit Auflösung $l \sim \frac{1}{k}$ misst
mittlere Krümmung der Raumzeit $r_c \sim l$ im UV

$\Rightarrow$ Quantenraumzeit $\sim$ Fraktal mit Selbstähnlichkeit
jenseits der Planckskala.

- UV FP cosmology:

Teilchen - Horizont: "proper-distance" Horizont, aus
dem ein Beobachter zum kosmol. Zeitpunkt t seit
dem Urknall bei $t=0$ hat Signale empfangen können:

$$d_H(t) = \frac{t}{1-\alpha}$$

mit α : Exponent des
FRW Skalenfaktors:

$$a(t) \sim t^\alpha$$

klass. FRW: $\alpha_{cl} = \frac{2}{3+3w}$

mit $w = \begin{cases} 1/3 & \text{Strahlungsdom.} \\ 0 & \text{Materie dominiert} \end{cases}$

frühes Universum: $k = \frac{1}{2}$ mit $w = \frac{1}{3}$

115

$$\Rightarrow d_H(t) = 2t < \infty$$

FP Kosmologie: $k = \frac{4}{3+3w}$ (Konsequenz des FP's)

$\Rightarrow d_H(t) \rightarrow \infty$, es existiert kein
Teilchenhorizont und damit
kein Horizont problem

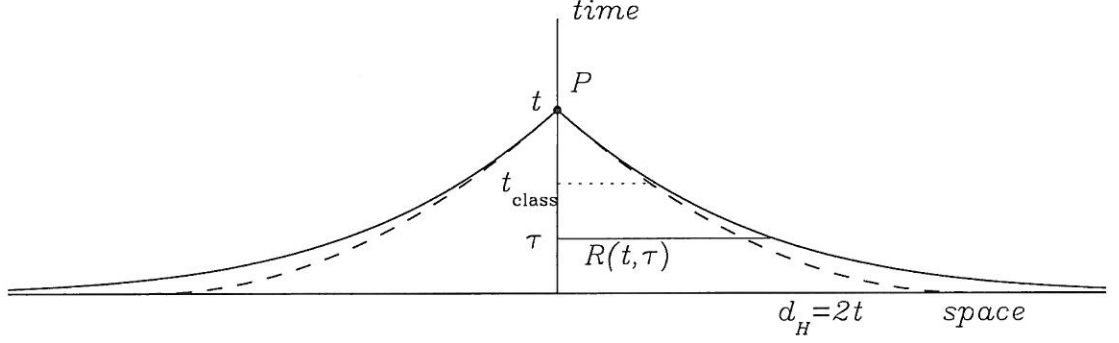


FIG. 1. Graphical representation of the proper distance $R(t, \tau)$ as a function of τ for fixed t . Only light signals emitted from points below the solid line can reach the spacetime point P . The dashed line shows $R_{\text{class}}(t, \tau)$ which gives rise to a horizon at $d_H = 2t$. The deviation of R from R_{class} becomes appreciable only for $\tau < t_{\text{class}}$.

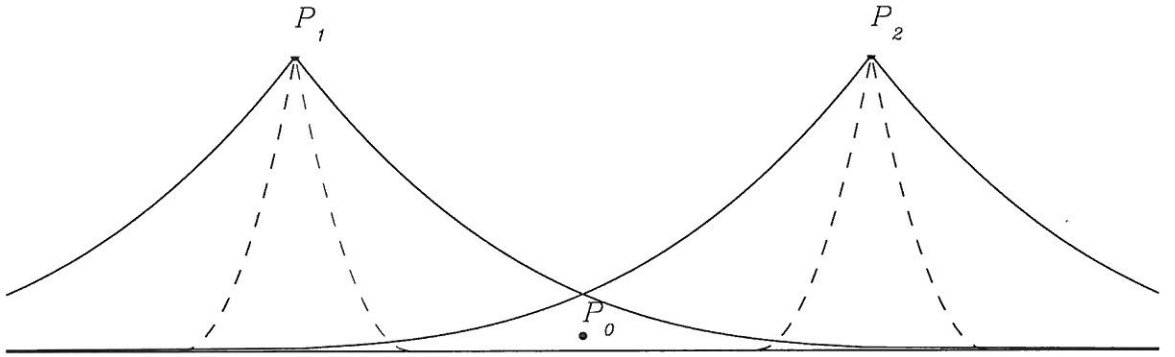


FIG. 2. While the points P_1 and P_2 are causally disconnected classically, the quantum gravity induced broadening of the backward light cones allows for events P_0 in the Planck era which can causally influence both P_1 and P_2 .