

Kapitel 6

Lie-Algebren

Dieses Kapitel soll eine Einführung in die Theorie der LIE-Algebren und deren Darstellungen geben. Beispiele von Lie-Algebren sind weitverbreitet. Das bekannteste Beispiel einer LIE-Algebra ist wohl der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt als Multiplikation: es gelten die Identitäten

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0 \quad \text{sowie} \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = 0.$$

Sie kennen die Darstellungstheorie aus der Theorie des Drehimpulses in der Quantenmechanik. Weiter sind LIE-Algebren bereits in der Mechanik anzutreffen: die POISSON-Klammer in der HAMILTONSchen Mechanik versieht den Raum der C^∞ -Phasenraumfunktionen mit der Struktur einer LIE-Algebra (sogar einer POISSON-Algebra). LIE-Algebren treten in der Physik meist als infinitesimale Symmetrieoperationen auf. Aus der Klassifikation dieser Darstellungen kann man deshalb Strukturaussagen über die Lösungen der zugrundeliegenden Dynamik machen. So sind zum Beispiel die Elementarteilchen Elemente der Multipletts von Eichsymmetrie-Algebren.

Wir betrachten hier eine n -dimensionale LIE-Gruppe G und identifizieren den Tangentialraum am Einselement e als LIE-Algebra der Gruppe. Es sei also U eine Koordinatenumgebung von e und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ lokale Koordinaten in einer Karte von U . Das Einselement sei durch die Wahl

$$g(\alpha = 0) = e \tag{6.1} \quad \{\text{lieal2}\}$$

ausgezeichnet. Man kann nun um $g = e$ im Koordinatenraum entwickeln, also eine Taylorreihe für die Gruppenelemente in einer Umgebung des Einselement ansetzen,

$$g(\alpha) = g(0) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0} + O(\alpha^2). \quad (6.2) \quad \{\text{lieal4}\}$$

Die ersten Ableitungen beschreiben die Struktur der Gruppe nahe der Einheit. Man definiert mit ihrer Hilfe die *Generatoren* oder infinitesimalen Erzeugenden der LIE-Gruppe,

$$X_i \equiv \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0}, \quad \text{so dass} \quad g(\alpha) = e + \alpha_i X_i + O(\alpha^2). \quad (6.3) \quad \{\text{lieal6}\}$$

Zum Beispiel ist die Erzeugende X_1 tangential zur Koordinatenkurve $g(\alpha_1, 0, \dots, 0)$ durch die Gruppen-Eins. Ist nun $\alpha(t)$ eine Kurve mit $\alpha(0) = 0$ in der gewählten Karte, dann beschreibt $g(\alpha(t)) \equiv g(t)$ eine Kurve auf der Gruppe mit $g(0) = e$ und es gilt

$$X = \frac{dg(t)}{dt} \Big|_0 = \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0} \dot{\alpha}_i(0) = X_i \dot{\alpha}_i(0). \quad (6.4) \quad \{\text{lieal8}\}$$

Wählt man für $\alpha(t)$ die i 'te Koordinatenlinie, dann ist $X = X_i$. Also sind die infinitesimalen Erzeugenden *tangential* an den Kurven durch e an der Stelle e und die Menge aller Erzeugenden ist gleich dem Tangentialraum $T_e(G)$ an der Gruppen-Eins. Die Anzahl unabhängiger Generatoren ist gleich der Zahl der unabhängigen reellen Parameter der LIE-Gruppe, also gleich ihrer Dimension. Die Generatoren einer Matrixgruppe sind ebenfalls Matrizen.

6.1 Die Lie-Algebra $su(2)$

Zur Einstimmung betrachten wir die nicht-ABELSche LIE-Gruppe $SU(2)$. Es seien also $g(t)$ 2-dimensionale Matrizen mit $g(t)g^\dagger(t) = \mathbb{1}_2$. Die Ableitung dieser Bedingung nach t an der Stelle $t = 0$ führt auf folgende Bedingung an die Generatoren $X = \dot{g}(0)$:

$$\dot{g}(0) g^\dagger(0) + g(0) \dot{g}^\dagger(0) = X + X^\dagger = 0.$$

Deshalb sind die Erzeugenden der unitären Gruppe 2-dimensionale antihermiteschen Matrizen. Die Elemente aus $SU(2)$ haben zusätzlich die Eigenschaft $\det g(t) = 1$. Es ergibt sich mit Hilfe der bekannten Formel

$$\frac{d}{dt} \log \det g = \text{Sp} (g^{-1} \dot{g}) \quad (6.5) \quad \{\text{lieal10}\}$$

deshalb die Zusatzbedingung $\text{Sp} X = 0$. Die Menge der Generatoren von $SU(2)$ wird mit $su(2)$ bezeichnet,

$$su(2) = \{X \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) | X = -X^\dagger, \text{Sp} X = 0\}. \quad (6.6) \quad \{\text{lieal12}\}$$

Sie bildet offensichtlich einen *linearen Raum*. Neben jeder Linearkombination ist aber auch der Kommutator zweier Elemente aus $su(2)$ wieder in $su(2)$, wie man leicht beweist:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]^\dagger &= X_2 X_1 - X_1 X_2 = -[X_1, X_2] \\ \text{Sp}[X_1, X_2] &= \text{Sp}(X_1 X_2) - \text{Sp}(X_2 X_1) = 0. \end{aligned}$$

Die erzeugenden Elemente bilden eine LIE-Algebra:

Definition [Lie-Algebra]: Eine LIE-Algebra \mathfrak{g} ist ein K -Vektorraum versehen mit einer bilinearen Abbildung (LIE-Klammer)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

mit den beiden Eigenschaften:

1. $[X, X] = 0$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ (d.h. die Klammer ist alternierend),
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (JACOBI-Identität).

Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass die LIE-Klammer *antisymmetrisch* ist,

$$0 = [X + Y, X + Y] = [X, Y] + [Y, X] \implies [X, Y] = -[Y, X]. \quad (6.7) \quad \{\text{lieal14}\}$$

Führen wir ein Basis X_1, \dots, X_n im n -dimensionalen Vektorraum \mathfrak{g} ein, dann ist der Kommutator zweier Basiselemente eine Linearkombination der Basiselemente,

$$[X_i, X_j] = f_{ijk} X_k. \quad (6.8) \quad \{\text{lieal15}\}$$

Die Konstanten $f_{ijk} = -f_{jik}$ heißen Strukturkonstanten der LIE-Algebra \mathfrak{g} .

Wir kehren zu $SU(2)$ zurück. Jedes Element der LIE-Algebra $su(2)$ ist eine Linearkombination der drei spurlosen und hermiteschen PAULI-Matrizen,

$$X \in su(2) \iff X = i\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Mit $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma})^2 = v^2 \mathbb{1}$, wobei v den Betrag von \mathbf{v} bezeichnet, folgt

$$\exp(X) = \exp(i\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}) = \cos v \sigma_0 + i \sin v \hat{\mathbf{v}}\boldsymbol{\sigma}. \quad (6.9) \quad \{\text{lieal16}\}$$

Setzen wir in dieser Formel

$$\cos v + i\hat{v}_3 \sin v = a \quad \text{und} \quad \sin v (i\hat{v}_1 - \hat{v}_2) = b,$$

dann ist $\exp(X)$ genau die $SU(2)$ -Matrix in (4.1). Die Bedingung $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ist für unsere Parametrisierung automatisch erfüllt. Also kann jede $SU(2)$ -Matrix als Exponent einer anti-hermiteschen und spurlosen Matrix geschrieben werden,

$$X \in \mathfrak{su}(2) \implies g = \exp(X) \in SU(2) \quad (6.10) \quad \{\text{lieal18}\}$$

Im gewissen Sinn gilt auch die Umkehrung: Mit X liegt auch tX im linearen Raum $\mathfrak{su}(2)$ und $g(t) = \exp(tX)$ ist eine einparametrische Kurve auf der Gruppe mit $g(0) = e$. Die Ableitung nach t an der Stelle 0 liegt dann in der LIE-Algebra

$$g = \exp(tX) \in \mathfrak{su}(2) \implies X = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathfrak{su}(2). \quad (6.11) \quad \{\text{lieal20}\}$$

Für die quantenmechanische Drehgruppe besteht also ein einfacher Zusammenhang zwischen LIE-Gruppe und LIE-Algebra. Dies gilt auch für allgemeinere LIE-Gruppen und dies wollen wir im folgenden Abschnitt einsehen.

6.2 Lie-Algebren von Lie-Gruppen

Wir zeigen nun, dass die infinitesimalen Erzeugenden

$$X = \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0} = \dot{g}(0), \quad g(0) = e, \quad (6.12) \quad \{\text{lieal24}\}$$

eine LIE-Algebra bilden. Dazu betrachten wir zwei Kurven $g_1(t)$ und $g_2(t)$ die für $t = 0$ durch e gehen und an dieser Stelle die Tangentialvektoren X_1 und X_2 besitzen. Dann ist auch $g(\alpha_1 t)g(\alpha_2 t)$ eine derartige Kurve für beliebige reelle Konstanten α_1 und α_2 mit Tangentialvektor

$$\left. \frac{d}{dt} (g_1(\alpha_1 t)g_2(\alpha_2 t)) \right|_{t=0} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

und die infinitesimalen Erzeugenden bilden einen *linearen Raum* \mathfrak{g} . Wegen

$$\left. \frac{d}{dt} (g_1 g_2(t) g_1^{-1}) \right|_{t=0} = g_1 X_2 g_1^{-1}$$

ist für beliebige $g \in G$ mit X auch gXg^{-1} in diesem Raum. Die Abbildung

$$\text{Ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (6.13) \quad \{\text{lieal26}\}$$

ist ein *Darstellung* der Gruppe auf dem linearen Raum \mathfrak{g} , da für alle $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\text{Ad}(g_1 g_2) X = g_1 g_2 X g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 (\text{Ad}(g_2) X) g_1^{-1} = \text{Ad}(g_1) \text{Ad}(g_2) X$$

und $\text{Ad}(e)X = X$. Diese Darstellung existiert für jede LIE-Gruppe und sie heißt *adjungierte Darstellung* von G . Die Dimension dieser Darstellung ist gleich der Dimension der Gruppe.

Also beschreibt $g_1(t)X_2g_1^{-1}(t)$ eine Kurve im linearen Raum \mathfrak{g} . Der Tangentialvektor

$$\frac{d}{dt} (g_1(t)X_2g_1^{-1}(t)) \Big|_{t=0} = [X_1, X_2],$$

muss dann ebenfalls im linearen Raum \mathfrak{g} liegen. Also liegen mit X_1 und X_2 auch deren Kommutator $[X_1, X_2]$ in \mathfrak{g} . Der Kommutator ist bilinear und antisymmetrisch und erfüllt die JACOBI-Identität

$$[X, [Y, Z]] + \text{zyklisch} = 0. \quad (6.14) \quad \{\mathbf{8}\}$$

Damit definieren die infinitesimalen Erzeugenden einer LIE-Gruppe G eine LIE-Algebra \mathfrak{g} . Wir diskutieren nun die LIE-Algebren der klassischen LIE-Gruppen.

Die Lie-Algebra $sl(n, \mathbb{K})$ der Gruppe $SL(n, \mathbb{K})$:

Wir betrachten eine Kurve $g(t)$ in $SL(n, \mathbb{K})$ mit $g(0) = \mathbb{1}_n$. Die Bedingung $\det g(t) = 1$ impliziert für die infinitesimale Erzeugende $X = \dot{g}(0)$ die algebraische Bedingung $\text{Sp } X = 0$. Deshalb enthält die LIE-Algebra die spurlosen Matrizen,

$$sl(n, \mathbb{K}) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \text{Sp } X = 0\}. \quad (6.15) \quad \{\mathbf{1sn1}\}$$

Die Dimension der LIE-Algebra ist gleich der Dimension der LIE-Gruppe

$$\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 1 \quad \text{und} \quad \dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1. \quad (6.16) \quad \{\mathbf{1sn3}\}$$

Die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ der Dimension 6 ist die Überlagerung der LORENTZ-Gruppe und spielt eine herausragende Rolle in der Theorie der Spinorfelder.

Die Lie-Algebra $so(n)$ der Gruppe $SO(n)$:

Jetzt betrachten wir eine Kurve $R(t)$ in der Gruppe $O(n)$. Die differenzierbare Kurve wird wegen $R(0) = \mathbb{1}$ für alle t in der zusammenhängenden Untergruppe $SO(n) \subset O(n)$ liegen. Eine Erzeugende $X = \dot{R}(0)$ erfüllt die Bedingungen

$$0 = \frac{d}{dt} (R^T(t)R(t)) \Big|_{t=0} = X^T + X.$$

Also ist die LIE-Algebra von $SO(n)$ die Menge der antisymmetrischen reellen Matrizen,

$$so(n) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid X = -X^T\} \quad (6.17) \quad \{\mathbf{son1}\}$$

Diese Gruppe und ihre LIE-Algebra haben die Dimension

$$\dim(SO(n)) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (6.18) \quad \{\mathbf{son3}\}$$

Die Gruppen $SO(3)$ der Drehungen im EUKLIDischen Raum und die Gruppe $SO(4)$ der LOR-

ENTZ-Transformationen in EUKLIDischen Feldtheorien treten als Raum- bzw. als Raumzeit-Symmetrien auf.

Die Lie-Algebra $u(n)$ der Gruppe $U(n)$:

Aus der Bedingung $U^\dagger(t)U(t) = \mathbb{1}$ und $U(0) = \mathbb{1}$ folgt für $X = \dot{U}(0)$ die Bedingung $X^\dagger + X = 0$. Daher ist die LIE-Algebra der unitären Gruppen

$$u(n) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) | X = -X^\dagger\} \quad (6.19) \quad \{\text{un1}\}$$

die Menge aller antihermiteschen komplexen $n \times n$ -Matrizen. Entsprechend ist die Dimension der Gruppe

$$\dim U(n) = n^2. \quad (6.20) \quad \{\text{un3}\}$$

Die Eichsymmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung ist die Gruppe $U(2)$ modulo einer kleinen diskreten Untergruppe.

Die Lie-Algebra $su(n)$ der Gruppe $SU(n)$:

Diese bestehen aus allen Erzeugenden von $U(n)$ die verschwindende Spur haben,

$$su(n) = \{X \in u(n) | \text{Sp } X = 0\}. \quad (6.21) \quad \{\text{un5}\}$$

Die Dimensionen sind

$$\dim SU(n) = n^2 - 1. \quad (6.22) \quad \{\text{un7}\}$$

Den Spezialfall $n = 2$ führt auf die quantenmechanische Drehgruppe der Dimension 3. Sie wurde im letzten Abschnitt ausführlich behandelt.

Die Lie-Algebra $sp(2n, \mathbb{K})$ der Gruppe $Sp(2n, \mathbb{K})$:

Leiten wir die definierende Bedingung $M^T J M = J$ mit $M = M(t)$ nach t ab, so finden wir für die Erzeugenden $X = \dot{M}(0)$ die Bedingung

$$sp(2n, \mathbb{K}) = \{X \in \text{Mat}(2n, \mathbb{K}) | X^T J + J X = 0\}. \quad (6.23) \quad \{\text{sp2n1}\}$$

Damit haben wir die LIE-Algebren aller klassischen LIE-Gruppen charakterisiert. Man kann die Dimensionen dieser LIE-Algebra leicht bestimmen und überlasse Ihnen diese Rechnung.

6.3 Die Lie-Algebra von $SU(3)$

Die 8-dimensionale Gruppe $SU(3)$ und ihre LIE-Algebra spielen eine wichtige Rolle in der Elementarteilchenphysik und soll hier etwas näher untersucht werden. Die 8 Erzeugenden X_i sind antihermitesche und spurlose Matrizen 3×3 -Matrizen. In der physikalischen Literatur

ist es üblich, anstelle der antihermiteschen Erzeugenden X_i die hermiteschen 'Erzeugenden' $T_i = iX_i$ zu verwenden, da die T_i zu Observablen werden. Die hermiteschen Erzeugenden erfüllen Kommutationsrelationen

$$[T_i, T_j] = if_{ijk}T_k \tag{6.24} \quad \{\text{sud1}\}$$

mit reellen Strukturkonstanten. Für jede kompakte LIE-Algebra sind die Strukturkonstanten vollständig antisymmetrisch in i, j, k . Als Basis wählen wir die GELL-MANN Matrizen λ_i in

$$T_i = \frac{1}{2}\lambda_i. \tag{6.25} \quad \{\text{sud3}\}$$

Diese spurlosen hermiteschen 3×3 -Matrizen haben die Form

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrizen sind orthogonal bezüglich das durch die Spur definierte Skalarprodukt,

$$(\lambda_i, \lambda_j) \equiv \text{Sp} \lambda_i^\dagger \lambda_j = 2\delta_{ij},$$

und für die Strukturkonstanten in

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k$$

findet man

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6.26) $\{\text{sud5}\}$

Nun stellt sich die Frage, wieviele der Erzeugenden simultan diagonalisiert werden können, oder äquivalent dazu, was die maximale Anzahl kommutierender Basiselemente ist. Diese wichtige Zahl nennt man den *Rang* r der Gruppe. Ein maximaler Satz kommutierender Basiselemente spannen die CARTAN *Unteralgebra* von \mathfrak{g} auf. Der Rang r der Gruppe ist dann gerade die Dimension der CARTAN Unteralgebra. Der Rang von $SU(N)$ ist $N - 1$. Das heißt, für $SU(3)$ gibt es genau zwei Erzeugende die miteinander kommutieren. Üblicherweise wählt man die zwei diagonalen Matrizen λ_3 und λ_8 als Basis der CARTAN Unteralgebra. Es gibt keine weitere (linear unabhängige) hermitesche und spurlose Matrix, die mit diesen zwei Erzeugenden kommutiert.

A. Wipf, Mathematische Methoden der Physik

6.4 Darstellungen von Lie-Algebren

Eine n -dimensionale Darstellung ist ein Gruppenhomomorphismus von G in eine Untergruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen. Jede derartige Darstellung definiert eine LIE-Algebra Homomorphismus von \mathfrak{g} in eine Unter-LIE-Algebra der $n \times n$ Matrizen. Wie dieser Zusammenhang genauer aussieht, wollen wir im Folgenden untersuchen. Es sei also $g \rightarrow T(g)$ eine Darstellung von G . Wir definieren die Elemente der von T induzierten Darstellung T_* der LIE-Algebra gemäß

$$T_*(X) = \frac{d}{dt}T(g(t))|_{t=0}, \quad \text{wobei } \dot{g}(0) = X \quad (6.27) \quad \{\text{ind1}\}$$

ist. Aus der Darstellungseigenschaft der T folgt nun, daß T_* linear ist und daß die $T_*(X)$ dieselben Kommutationregeln wie die X erfüllen. Die Linearität ist einfach zu beweisen:

$$\begin{aligned} T_*(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) &= \frac{d}{dt}T(g_1(\alpha_1 t)g_2(\alpha_2 t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}T(g_1(\alpha_1 t))|_{t=0}T(g_2(0)) + T(g_1(0))\frac{d}{dt}g_2(\alpha_2 t)|_{t=0} \\ &= \alpha_1 T_*(X_1) + \alpha_2 T_*(X_2). \end{aligned} \quad (6.28) \quad \{\text{ind3}\}$$

Die Darstellungseigenschaft folgt aus

$$T_*(g_1 X_2 g_1^{-1}) = \frac{d}{dt}T(g_1 g_2(t) g_1^{-1})|_{t=0} = T(g_1)T_*(X_2)T^{-1}(g_1) \quad (6.29) \quad \{\text{ind5}\}$$

und der Eigenschaft, daß T_* linear ist, so daß

$$\frac{d}{dt}(T(g_1(t))T_*(X_2)T^{-1}(g_1(t)))|_{t=0} = [T_*(X_1), T_*(X_2)] = T_*([X_1, X_2])$$

ist. Die Eigenschaft

$$[T_*(X_1), T_*(X_2)] = T_*([X_1, X_2]), \quad \forall X_1, X_2 \quad (6.30) \quad \{\text{ind7}\}$$

bedeutet, daß die $T_*(X)$ dieselbe LIE-Algebra bilden wie die infinitesimalen Erzeugenden X der Gruppe G . Es kommt nicht darauf an ob wir zuerst den Kommutator von X_1 und X_2 berechnen und dann dessen Bild unter der induzierten Darstellung T_* , oder ob wir zuerst die Bilder von X_1 und X_2 berechnen und danach deren Kommutator. Der Gruppen-Homomorphismus induziert eine LIE-Algebra Homomorphismus.

Wir wenden dies nun auf g in (5.17) an, für welches (t wird zu θ)

$$X = \frac{d}{d\theta}g|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} i \cos \psi & \sin \psi e^{i\varphi} \\ -\sin \psi e^{-i\varphi} & -i \cos \psi \end{pmatrix} \quad (6.31) \quad \{\text{ind9}\}$$

ist. Für die dreidimensionale Darstellung in (5.64) findet man dann

$$T_*(X) = \begin{pmatrix} i \cos \psi & \sqrt{2} \sin \psi e^{i\varphi} & 0 \\ -\sqrt{2} \sin \psi e^{-i\varphi} & 0 & \sqrt{2} \sin \psi e^{i\varphi} \\ 0 & -\sqrt{2} \sin \psi e^{-i\varphi} & -i \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Nach dem Basiswechsel (5.65) zur (reellen) Darstellung (5.66) erhält man die äquivalente Darstellung

$$T_*(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \psi & 2 \sin \psi \cos \varphi \\ \cos \psi & 0 & 2 \sin \psi \sin \varphi \\ -2 \sin \psi \cos \varphi & -2 \sin \psi \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.32) \quad \{\text{ind11}\}$$

Die infinitesimalen Erzeugenden der Darstellung (5.66) sind also die reellen antisymmetrischen 3×3 Matrizen. Dies muß so sein, denn einerseits ist

$$T_*(X) = \frac{d}{d\theta}T(g(\theta, \psi, \varphi))|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta}R(\theta, \psi, \varphi)|_{\theta=0} \quad (6.33) \quad \{\text{ind13}\}$$

und andererseits

$$0 = \frac{d}{d\theta}(RR^t) \implies T_*(X) + T_*^t(X) = 0.$$

Jede irreduzible Darstellung einer Gruppe ist eine irreduzible Darstellung der LIE-Algebra zugeordnet und (beinahe) umgekehrt. In der Physik konstruiert man oft die Darstellungen einer Gruppe indem man die Darstellungen der zugehörigen LIE-Algebra studiert.

Nun können wir auf jeder LIE-Algebra \mathfrak{g} ein Skalarprodukt definieren¹:

$$(X, Y) = \text{Sp } X^\dagger Y = -\text{Sp } XY. \quad (6.34) \quad \{\text{ind15}\}$$

Dieses Skalarprodukt ist invariant unter der adjungierten Darstellung,

$$(\text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y) = -\text{Sp } gXg^{-1}gYg^{-1} = (X, Y), \quad (6.35) \quad \{\text{ind17}\}$$

wobei wir die Invarianz der Spur bei zyklischer Vertauschung der Argumente benutzten. Man sagt kurz, das Skalarprodukt ist Ad-invariant.

Nun wollen wir noch die 'Treuheit' der adjungierten Darstellung untersuchen. Dazu müssen wir bestimmen wieviele Gruppenelement auf dasselbe $\text{Ad}(g)$ abgebildet werden:

$$\text{Ad}(g_1)X = \text{Ad}(g_2)X \iff \text{Ad}(g_2^{-1}g_1)X = X, \quad \forall X \in \mathcal{G}.$$

¹für allgemeine LIE-Gruppe ist dies die KILLINGform

Die Frage ist also, wieviele Gruppenelemente g gibt es, sodaß

$$gXg^{-1} = X \quad \text{für alle } X. \quad (6.36) \quad \{\text{ind19}\}$$

Wir erinnern uns daran, dass das *Zentrum* von G diejenigen Elemente enthält, die mit allen anderen Elementen kommutieren,

$$\mathcal{Z} = \{z | zg = gz \quad \forall g \in G\} \subset G. \quad (6.37) \quad \{\text{ind21}\}$$

Das Zentrum ist eine ABELSche Untergruppe. Offensichtlich ist

$$zXz^{-1} = \frac{d}{dt} (zg(s)z^{-1})|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = X.$$

Tatsächlich sind die Zentrumselemente die einzigen Elemente mit dieser Eigenschaft und

$$\text{Ad}(g_1) = \text{Ad}(g_2) \iff g_2 = g_1 z, \quad z \in \mathcal{Z}. \quad (6.38) \quad \{\text{ind23}\}$$

Das Zentrum von $SU(2)$ besteht aus $\{e, -e\}$. Die adjungierte Darstellung $SU(2) \rightarrow SO(3)$ bildet g und $-g$ in die gleichen Drehungen ab.

Alle Darstellungen T_j von $SU(2)$ gewinnt man indem man die definierende Darstellung $T_{\frac{1}{2}}$ (auch fundamentale Darstellung genannt) genügend oft mit sich tensoriert. Zum Beispiel ist die adjungierte Darstellung T_1 enthalten in

$$T_{\frac{1}{2}} \times T_{\frac{1}{2}} = T_1 + T_0.$$

Die Dimension der Darstellung T_j ist $2j+1$. In der Quantenmechanik werden die Darstellungen von $SU(2)$ mit Hilfe des *Auf-* und *Absteigeoperator* in der komplexifizierten LIE-Algebra,

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2) \quad \text{mit} \quad [\sigma_3, \sigma_{\pm}] = \pm\sigma_{\pm}, \quad (6.39) \quad \{\text{ind27}\}$$

konstruiert. Diese Konstruktion mit Hilfe von Leiteroperatoren kann für allgemeine kompakte (halbeinfache) LIE-Algebren verallgemeinert werden.

6.5 Wurzeln einer Lie-Algebra

Wir verallgemeinern die Konstruktion der Auf- und Absteigeoperatoren auf beliebige LIE-Algebren. Es seien $H_i, i = 1, \dots, r$ eine Basis einer CARTAN-Unteralgebra, also einer maximalen Unteralgebra von kommutierenden Generatoren. Nun erweitern wir die H_i durch komplexe Kombinationen E_{α} der X_i , so dass

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad 1 \leq i \leq r. \tag{6.40} \quad \{\text{wurz1}\}$$

Der reelle r -dimensionale Vektor α heißt Wurzel von \mathfrak{g} und E_α ist der zur Wurzel α gehörige Stufenoperator. Man kann zeigen, dass es zu jeder Wurzel (bis auf Vielfaches) nur einen Stufenoperator gibt. Wegen

$$H_i E_\alpha - E_\alpha H_i = \alpha_i E_\alpha \longrightarrow E_\alpha^\dagger H_i - H_i E_\alpha^\dagger = \alpha_i E_\alpha^\dagger \tag{6.41} \quad \{\text{wurz3}\}$$

ist mit α auch $-\alpha$ eine Wurzelvektor und der entsprechende Stufenoperator ist $E_{-\alpha} = E_\alpha^\dagger$. Die Menge der Wurzeln bezeichnen wir mit Φ . Die Anzahl Wurzeln ist

$$|\Phi| = \text{Dim } \mathfrak{G} - \text{Rang } \mathfrak{G}. \tag{6.42} \quad \{\text{wurz5}\}$$

Zum Beispiel hat $SU(3)$ $8 - 2 = 6$ Wurzeln. Wegen der JAKOBI-Identität ist

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = -[E_\beta, [H_i, E_\alpha]] - [E_\alpha, [E_\beta, H_i]] = (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta],$$

so dass mit α, β auch $\alpha + \beta$ eine Wurzel ist, falls $E_{\alpha+\beta} \sim [E_\alpha, E_\beta]$ nicht verschwindet. Schließlich kommutiert $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ mit den H_i und muß in der CARTAN-Unteralgebra liegen, also eine Linearkombination der H_i sein, $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \beta_i H_i$. Nun ist aber

$$\text{Sp } H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \text{Sp } E_{-\alpha} [H_i, E_\alpha] = \alpha_i \text{Sp } (E_{-\alpha} E_\alpha) = \text{Sp } H_i \beta_j H_j = \beta_i \text{Sp } H_i^2.$$

Nun können wir die Stufenoperatoren so normieren, dass wir schließlich folgende Kommutationsregeln haben

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \text{ eine Wurzel ist} \\ 2\alpha \cdot H / \alpha^2 \equiv H_\alpha & \text{falls } \alpha = -\beta \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.43} \quad \{\text{wurz7}\}$$

Man kann die antisymmetrischen $\epsilon(\alpha, \beta)$ gleich ± 1 wählen. Für jede Wurzel α bilden

$$\{I_+, I_-, I_3\} \sim \{E_\alpha, E_{-\alpha}, 2\alpha \cdot H / \alpha^2\} \tag{6.44} \quad \{\text{wurz9}\}$$

eine $su(2)$ Unteralgebra (in der komplexen Basis) mit den bekannte $su(2)$ -Kommutationsregeln

$$[I_+, I_-] = I_3, \quad [I_3, I_\pm] = \pm I_\pm, . \tag{6.45} \quad \{\text{wurz11}\}$$

Nun erinnern wir uns daran, dass in jeder unitären Darstellung die Eigenwerte von I_3 , dass heißt von H_α halbzahl sein müssen. Wegen

$$[H_\alpha, E_\beta] = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} E_\beta \tag{6.46} \quad \{\text{wurz13}\}$$

sind die Eigenwerte dieses Operators in der adjungierten Darstellung gleich $2(\alpha, \beta)/\alpha^2$ und wir schließen, dass

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle Wurzeln } \alpha, \beta \in \Phi. \quad (6.47) \quad \{\text{wurz15}\}$$

Mit $H_1 = \lambda_3$ und $H_2 = \lambda_8$ hat man für $SU(3)$ folgende Wurzeln und Stufenoperatoren:

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= (2, 0), & E_{\alpha_{(1)}} &= X_1 + iX_2 \\ \alpha_{(2)} &= (-1, \sqrt{3}), & E_{\alpha_{(2)}} &= X_7 + iX_7 \\ \alpha_{(3)} &= (1, \sqrt{3}), & E_{\alpha_{(3)}} &= X_4 + iX_5. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben sieht dies folgendermassen aus

$$\begin{aligned} E_{\alpha_{(1)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & H_{\alpha_{(1)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{\alpha_{(2)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & H_{\alpha_{(2)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ H_{\alpha_{(3)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & H_{\alpha_{(3)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Wurzeln einer LIE-Algebra spannen ein $\text{Rang}(G)$ -dimensionales Wurzelgitter auf. Die folgende Abbildung enthält der unitären Gruppe $SU(3)$.

Die WEYL-Reflexionen sind Automorphismen auf dem Wurzelgitter. Sei

$$\sigma_\alpha(s) = e^{i\pi s(E_\alpha + E_{-\alpha})/2} \in G.$$

Dann findet man (die dritte Ableitung ist proportional zur ersten)

$$\sigma_\alpha(s)H_\beta\sigma_\alpha^{-1}(s) = H_\beta + \frac{(\beta, \alpha)}{\beta^2} (H_\alpha \cos(\pi s) - i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \sin \pi s - H_\alpha).$$

Setzen wir $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(1)$ dann finden wir die Identität

$$\sigma_\alpha H_\beta \sigma_\alpha^{-1} = H_\beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{\beta^2} H_\alpha. \quad (6.48) \quad \{\text{wurz17}\}$$

Wegen $H_\beta = 2(\beta, H)/\beta^2$ ist diese äquivalent zu

$$\beta \longrightarrow \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{\alpha^2} \alpha. \quad (6.49) \quad \{\text{wurz19}\}$$

Dies ist aber gerade die Reflexion $\sigma_\alpha(\beta)$ von β an der Ebene senkrecht zur Wurzel α . Nun

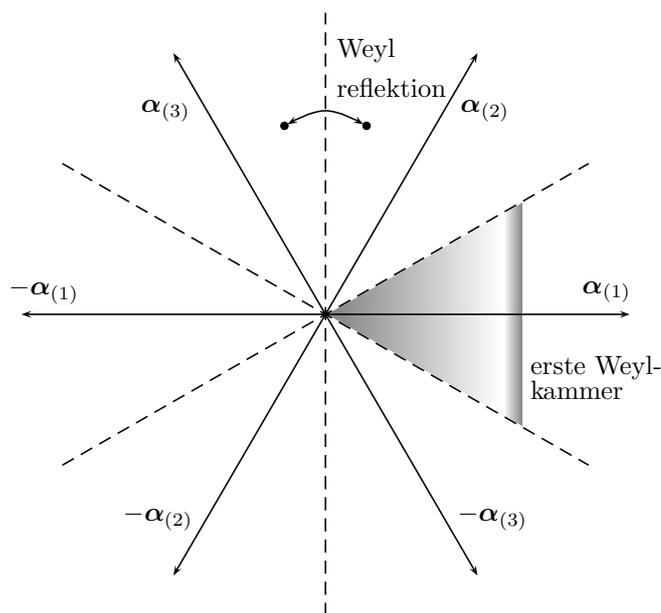


Abbildung 6.1: ^{weyl}Das Wurzelsystem von $SU(3)$.

konjugieren wir die Gleichung

$$[\sigma_\alpha H_\beta \sigma_\alpha^{-1}, E_\gamma] = [H_{\sigma_\alpha(\beta)}, E_\gamma] = 2 \frac{(\sigma_\alpha(\beta), \gamma)}{\beta^2} E_\gamma,$$

wobei wir benutzen, dass die Spiegelung σ_α längenerhaltend ist, mit σ_α^{-1} . Spiegelungen sind symmetrische Operationen und deshalb erhalten wir

$$[H_\beta, \sigma_\alpha^{-1} E_\gamma \sigma_\alpha] = 2 \frac{(\beta, \sigma_\alpha(\gamma))}{\beta^2} \sigma_\alpha^{-1} E_\gamma \sigma_\alpha.$$

Dies beweist, dass das Wurzelsystem unter den Spiegelungen senkrecht zu allen Wurzeln in sich übergeht: Für jedes Paar von Wurzeln α, β ist

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{\alpha^2} \alpha \tag{6.50} \quad \{\text{wurz21}\}$$

wieder eine Wurzel. Jede dieser Spiegelungen permutiert die Wurzeln in Φ . Diese Spiegelungen nennt man die WEYL-Reflexionen. Sie bilden die endliche WEYL-Gruppe $W(G)$. In der Abbildung (6.1) sind die Spiegelungsebenen und eine Reflexion eingezeichnet.

Im Allgemeinen ist die Anzahl Wurzeln grösser als der Rang der Gruppe, so dass diese linear abhängig sind. Deshalb ist es sinnvoll eine Basis

A. Wipf, Mathematische Methoden der Physik

$$\Delta = \{\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}\} \quad (6.51) \quad \{\text{wurz23}\}$$

auszuwählen, so dass jede Wurzel eine Linearkombination dieser *einfachen Wurzeln* ist. Man kann eine Basis wählen, so dass

$$\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_{(i)} \quad (6.52) \quad \{\text{wurz25}\}$$

wobei alle Koeffizienten $n_i \in \mathbb{Z}$ entweder ganzzahlig nichtnegativ ($n_i \geq 0$) oder ganzzahlig nichtpositiv ($n_i \leq 0$) sind. Im ersten Fall heißt α positiv, im zweiten negativ. Sind nur ein Satz einfacher Wurzeln bekannt, dann kann man durch WEYL-Reflexionen der einfachen Wurzeln das gesamte Wurzelsystem rekonstruieren.

6.6 Gewichte einer Darstellung

Wir betrachten eine endlichdimensionale Darstellung T der Gruppe G auf einem Vektorraum V . Da die $T_*(H_i)$ miteinander vertauschen, können wir sie gleichzeitig diagonalisieren,

$$T_*(H_i)|\mu\rangle = \mu_i |\mu\rangle. \quad (6.53) \quad \{\text{gew1}\}$$

Der r -dimensionale Vektor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ heißt Gewichtsvektor. Da die

$$H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha} \quad \text{und damit} \quad T_*(H_\alpha), T_*(E_\alpha), T_*(E_{-\alpha}) \quad (6.54) \quad \{\text{gew3}\}$$

eine $su(2)$ -Unteralgebra von \mathcal{G} aufspannen, muß wegen

$$T_*(H_\alpha)|\mu\rangle = \frac{2(\mu, \alpha)}{\alpha^2} |\mu\rangle \quad (6.55) \quad \{\text{gew5}\}$$

der Eigenwert auf der rechten Seite eine ganze Zahl sein,

$$\frac{2(\alpha, \mu)}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle Wurzeln} \quad \alpha \in \Phi. \quad (6.56) \quad \{\text{gew7}\}$$

Diese Bedingung definiert das *Gewichtsgitter* von \mathfrak{g} . Weiterhin zerfallen die Eigenzustände $|\mu\rangle$ in Multipletts unter der Wirkung von $H_\alpha, E_{\pm\alpha}$. Wegen

$$\sigma_\beta H_\alpha \sigma_\beta^{-1} = H_{\sigma_\beta(\alpha)}, \quad \sigma_\beta E_{\pm\alpha} \sigma_\beta^{-1} = E_{\pm\sigma_\beta(\alpha)}$$

gilt nämlich²

$$\sigma_\beta H_\alpha |\mu\rangle = \frac{2(\alpha, \mu)}{\alpha^2} \sigma_\beta |\mu\rangle = H_{\sigma_\beta(\alpha)} \sigma_\beta |\mu\rangle.$$

Setzen wir $\sigma_\beta(\alpha) = \delta$ und benutzen, dass σ_β unitär ist, dann folgt

$$H_\delta \sigma_\beta |\mu\rangle = \frac{2(\delta, \sigma_\beta(\mu))}{\delta^2} \sigma_\beta |\mu\rangle \quad (6.57) \quad \{\text{gew9}\}$$

für alle Wurzeln und Gewichte. Damit werden die Gewichte einer Darstellung unter den WEYL-Reflexionen ineinander abgebildet.

Es genügt die Forderung (6.56) für eine Basis von Wurzeln zu fordern, da alle Wurzeln durch Weylreflexionen aus diesen *einfachen Wurzeln* gewonnen werden können. Entsprechend können wir im Gewichtsgitter eine Basis von *fundamentalen Gewichten*, definiert durch

$$2 \frac{(\lambda_{(i)}, \alpha_{(j)})}{\alpha_{(j)}^2} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq r \quad (6.58) \quad \{\text{gew11}\}$$

eingeführen. Jedes Gewicht ist eine integrale Linearkombination der fundamentalen Gewichte,

$$\lambda = \sum_1^r n_i \lambda_{(i)}, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (6.59) \quad \{\text{gew13}\}$$

Sind alle ganze Zahlen $n_i \geq 0$, dann heißt λ *dominantes Gewicht*. Offensichtlich ist ein Gewicht λ dominant genau dann wenn

$$(\alpha_{(i)}, \lambda) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq r \quad (6.60) \quad \{\text{gew15}\}$$

gilt. Jedes Gewicht kann mit einer WEYL-Reflexion in ein eindeutiges dominantes Gewicht abgebildet werden. Für $SU(3)$ sind die fundamentalen Gewichte

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_{(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In jeder endlichdimensionalen Darstellung von G können wir einen Zustand $|\mu\rangle$ mit höchstem Gewicht finden, so dass

$$\langle \rho | \mu \rangle \quad \text{am grössten ist, wo} \quad \rho = \sum_1^r \lambda_{(i)} \quad (6.61) \quad \{\text{gew17}\}$$

eine spezielles dominantes Gewicht ist. Das Skalarprodukt $\langle \rho | \alpha \rangle$ ist positiv für positive α

²Im Folgenden schreiben wir wieder H_α und σ_α anstelle von $U_*(H_\alpha)$ und $U(\sigma_\alpha)$.

und negativ für negative α . Man kann zeigen, dass ρ die halbe Summe der positiven Wurzeln ist. Ein Zustand mit höchstem Gewicht wird von allen $E_\alpha, \alpha > 0$ annihiliert,

$$E_\alpha |\mu\rangle = 0, \quad \alpha > 0. \quad (6.62) \quad \{\text{gew19}\}$$

Wäre dem nicht so, dann hätte dieser Zustand Gewicht $\mu + \alpha$ und wäre grösser als μ . Zu jedem dominanten Gewicht μ gibt es eine eindeutige irreduzible Darstellung. Sie besteht aus Zuständen der Form

$$E_{-\beta_1} E_{-\beta_2} \cdots E_{-\beta_m} |\mu\rangle, \quad \beta_i > 0. \quad (6.63) \quad \{\text{gew21}\}$$

Wenden wir diese Resultate auf $SU(3)$ an. Die Gewichte

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{(1)} - \alpha_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_{(1)} - \alpha_{(3)} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine 3-dimensionale Darstellung mit höchstem Gewicht $\mu^3 = \lambda_{(1)}$. Dies ist gerade die fundamentale Darstellung mit Eigenvektoren

$$|\mu^3\rangle \sim \mathbf{e}_1, \quad |\mu^3 - \alpha_{(1)}\rangle = \mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad |\mu^3 - \alpha_{(3)}\rangle = \mathbf{e}_3.$$

Nun gibt es auch noch eine weitere drei-dimensionale Darstellung mit höchstem Gewicht $\mu^{\bar{3}} = \lambda_{(2)}$, nämlich

$$\mu^{\bar{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu^{\bar{3}} - \alpha_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mu^{\bar{3}} - \alpha_{(3)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis auf Permutationen können wir die Eigenwerte der zu dieser Darstellung gehörenden $T_*(H_i), i = 1, 2$ ablesen. Folgende Matrizen haben diese Eigenwerte (die Matrizen sind immer nur bis auf Äquivalent bestimmt)

$$T_*(H_1) = -H_1 \quad \text{und} \quad T_*(H_2) = -H_2. \quad (6.64) \quad \{\text{gew23}\}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$|\mu^{\bar{3}}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\mu^{\bar{3}} - \alpha_{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu^{\bar{3}} - \alpha_{(3)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Stufenoperatoren haben die Form

$$T_*(E_\alpha) = -E_\alpha^t. \quad (6.65) \quad \{\text{gew25}\}$$

Dies sind genau die Erzeugenden der komplex konjugierten Darstellung

$$T : g \longrightarrow \bar{g}.$$

Dies ist leicht einzusehen:

$$\dot{g}(0) = X \implies T_*(X) = \dot{\bar{g}}(0) = \bar{X} = (X^\dagger)^t = -X^t.$$

Tensorprodukt von Darstellungen: Es seien T_1 und T_2 zwei Darstellungen auf den Darstellungsräumen V_1 und V_2 . Dann ist die Tensorprodukt-Darstellung

$$T = T_1 \otimes T_2 : g \longrightarrow T_1(g) \otimes T_2(g) \tag{6.66} \quad \{\text{tensors1}\}$$

auf $V_1 \times V_2$ im Allgemeinen reduzibel, auch wenn die Darstellungen T_i irreduzibel waren. Die induzierte Darstellung der LIE-Algebra ist

$$T_*(X) = \frac{d}{dt} T_1(g(t)) \otimes T_2(g(t)) \Big|_{t=0} = T_{*1}(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes T_{*2}(X). \tag{6.67} \quad \{\text{tensors3}\}$$

Sind $|\mu^i\rangle$ höchsten Gewichte der Darstellungen T_i , dann ist $|\mu^1\rangle \otimes |\mu^2\rangle$ ein höchstes Gewicht der Tensordarstellung.

Schauen wir uns die Tensordarstellung $3 \times \bar{3}$ von $SU(3)$ etwas genauer an.

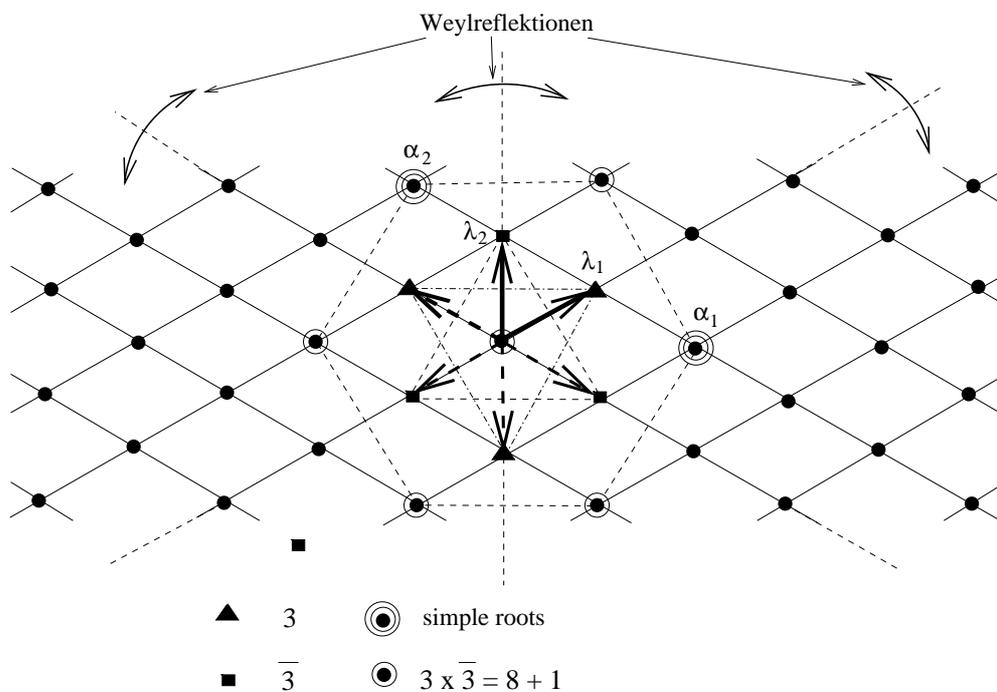


Abbildung 6.2: ^{weightsu3} Gewichtsgitter von $SU(3)$.

Die 9 Gewichte der Tensordarstellung $3 \times \bar{3}$ sind die Summen der Gewichte der Faktoren,

$$\{\lambda^{3 \times \bar{3}}\} = \{\lambda_{(i)}^3 + \lambda_{(j)}^{\bar{3}}, \quad i, j = 1, 2, 3\}.$$

Das höchste Gewicht ist $\mu^{3 \times \bar{3}} = \mu^3 + \mu^{\bar{3}} = (1, \sqrt{3})$. Diese Gewichte sind in der Figur

6.2 eingezeichnet. Nun wollen noch bestimmen, was die irreduziblen Bestandteile dieser 9-dimensionalen Darstellung ist. Sei $v_i w_j$ die 9 Komponenten eines Vektors im Tensorprodukt der Darstellungsräume von $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$. Unter der Tensordarstellung transformieren diese wie

$$v_i w_j \longrightarrow g_{ip} \bar{g}_{jq} v_p w_q \iff A \longrightarrow g A g^\dagger = g A g^{-1}, \quad A_{ij} = v_i w_j.$$

Da aber

$$\text{tr } A \longrightarrow \text{tr } g A g^{-1} = \text{tr } A \tag{6.68} \quad \{\text{tensors5}\}$$

ist, ist $\text{tr } A = \sum v_i w_i$ ein eindimensionaler invarianter Unterraum der Tensorprodukt-darstellung. Auf dem Unterraum senkrecht dazu, d.h. auf denjenigen A mit $\text{tr } A = 0$, ist (6.68) genau die adjungierte Darstellung. Als gilt

$$\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \quad \mathbf{8} = \text{adjungierte Darstellung.}$$

Eine allgemeine irreduzible Darstellung von $SU(3)$ wird durch Angabe zweier positiver ganzer Zahlen charakterisiert. Zerlegt man das höchste Gewicht μ in die fundamentalen Gewichte,

$$\mu = n\mu^3 + m\mu^{\bar{3}},$$

dann charakterisieren (m, n) die Darstellung.

(m, n)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 0)$	$(1, 1)$	$(0, 3)$	$(3, 0)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$
Dimension	1	3	$\bar{3}$	6	$\bar{6}$	$8 = \bar{8}$	10	$\bar{10}$	15	$\bar{15}$