Kapitel 3

Spezielle Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir die für die QM wichtigen Differentialgleichungen

$$w'' + p(x)w' + q(x)w = 0, \tag{3.1}$$

etwas genauer. Mit Hinblick auf die Anwendungen bezeichnen wir im Folgenden die unabhängige Variable mit x anstatt mit t. Die Koeffizientenfunktionen p und q können dabei Singularitäten aufweisen.

3.1 Die Legendresche Differentialgleichung

Eine DG von besonderem Interesse ist die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - x^2)w'' - 2xw' + l(l + 1)w = 0, \tag{3.2}$$

wobei l eine Konstante ist. Offensichtlich haben die Koeffizientenfunktionen $p = -2x/(1-x^2)$ und $q = l(l + 1)/(1 - x^2)$ bei $x = \pm 1$ einfache Pole. Wir versuchen eine Lösung in Form einer formalen Potenzreihe in x zu finden. Ist α die niedrigste vorkommende Potenz, dann hat die Reihe die Form

$$w = x^\alpha \sum_0^\infty a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0. \tag{3.3}$$

Wir nehmen an die Reihe konvergiert (dies kann hinterher überprüft werden), so daß (3.3) gliedweise differenziert werden darf. Einsetzen von (3.3) in (3.2) ergibt

$$\sum_n a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2} = \sum_n a_n\big[(\alpha+n)(\alpha+n+1)-l(l+1)\big]x^{\alpha+n}.$$

Dies ist nur möglich wenn der Koeffizient jeder Potenz von x verschwindet. Da $n \geq 0$ ist, kommen als niedrigste Potenzen $\alpha-2$ und $\alpha-1$ vor, und zwar nur auf der linken Seite. Also muß

$$a_0\alpha(\alpha-1)=0 \quad \text{und} \quad \alpha(\alpha+1)a_1 = 0$$

gelten. Dies sind die sogenannten *Bestimmungleichungen*. Da $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, implizieren diese

$$\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1.$$

Der Koeffizientvergleich bringt a_{n+2} mit a_n folgendermassen in Verbindung

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)-l(l+1)}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}a_n.$$

Für $\alpha = 0$ kann man a_0 und a_1 beliebig vorgeben und findet

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} a_{2r} &= \alpha_r a_0 = \frac{(-)^r l(l-2)\cdots(l-2r+2)\cdot(l+1)(l+3)\cdots(l+2r-1)}{(2r)!}a_0 \\ a_{2r+1} &= \beta_r a_1 = \frac{(-)^r(l-1)(l-3)\cdots(l-2r+1)\cdot(l+2)(l+4)\cdots(l+2r)}{(2r+1)!}a_1. \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ muß $a_1 = 0$ gelten und es treten nur gerade Potenzen in der Reihenentwicklung auf. Für ein willkürlich vorgegebenes a_0 findet man für $\alpha = 1$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)-l(l+1)}{(n+2)(n+3)}a_n, \qquad n = 0,2,4,\dots$$

mit der Lösung

$$a_{2r} = \beta_r a_0.$$

Es ergeben sich die folgenden Potenzreihenentwicklungen: Für $\alpha = 0$:

$$w = a_0 \sum_{r=0,\dots} \alpha_r x^{2r} \quad \text{und} \quad w = a_1 x \sum_{r=0,\dots} \beta_r x^{2r} \tag{3.4}$$

und für $\alpha = 1$:

$$w = a_0 x \sum_{r=0,\dots} \beta_r x^{2r}.$$

Diese letzte Lösung ist gleich dem a_1-Anteil der ersten Lösung. Es genügt daher, den Fall $\alpha = 0$ zu untersuchen. Wegen

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

sind die obigen Reihen absolut konvergent für $|x| < 1$. Die Reihen definieren *analytische Funktionen* innerhalb des Einheitskreises.

Es ist auch möglich Lösungen außerhalb des Einheitskreises zu finden. Dazu machen wir den Reihenansatz

$$w = x^\alpha \sum_0^\infty \frac{a_n}{x^n}.$$

Setzen wir in die Differentialgleichung ein, so finden wir

$$\begin{aligned} 0 &= x^\alpha \Big(\big[\alpha(\alpha+1) - l(l+1)\big] a_0 + \big[(\alpha-1)\alpha - l(l+1)\big] \frac{a_1}{x} \Big) \\ &+ \sum_{n=0}^\infty \Big(\big[(\alpha-n-2)(\alpha-n-1) - l(l+1)\big] a_{n+2} - (\alpha-n)(\alpha-n-1) a_n \Big) \frac{1}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichungen ergeben sich nach Nullsetzen der Koeffizienten der höchsten beiden Potenzen:

$$[\alpha(\alpha+1) - l(l+1)]a_0 = 0 \quad \text{und} \quad [(\alpha-1)\alpha - l(l+1)]a_1 = 0.$$

Da wir $a_0 \neq 0$ voraussetzen, muß

$$\alpha = l \quad \text{oder} \quad \alpha = -(l+1)$$

gelten und damit muß a_1 verschwinden. Die Rekursionsrelationen sind

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{(\alpha-n-2)(\alpha-n-1) - l(l+1)} a_n.$$

Für $\alpha = l$ und $\alpha = -l-1$ vereinfachen sich diese zu

$$a_{n+2} = \frac{(l-n)(l-n-1)}{(n+2)(n-2l+1)} a_n \quad \text{resp.} \quad a_{n+2} = \frac{(l+n+1)(l+n+2)}{(n+2)(n+2l+3)} a_n.$$

Damit sind die beiden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} w &= x^l \Big(1 + \sum_{r=1,\dots} (-1)^r \frac{(l-2r+1)(l-2r+2)\cdots(l-1)l}{2r\cdots 2\cdot(2l-2r+1)\cdots(2l-3)(2l-1)} \, x^{-2r} \Big) a_0 \\ w &= x^{-l-1} \Big(1 + \sum_{r=1,\cdots} \frac{(l+1)\cdots(l+2r)}{2\cdot 4\cdots 2r(2l+3)(2l+5)\cdots(2l+2r+1)} \, x^{-2r} \Big) a_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für $|x| > 1$ und definieren dort analytische Funktionen.

Wir verfügen nun über zwei Arten von Lösungen der Legendreschen DG: Die Reihen (3.4) konvergieren innerhalb des Einheitskreises und die Reihen (3.5) außerhalb. Für bestimmte l können diese Reihen zu Polynomen werden. Die Reihe (3.4a) bricht ab für positive gerade oder negative ungerade l. Im ersten Fall, $l = 2k$ löst dann das Polynom

$$w = a\Big(1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^{l/2}\frac{l(l-2)\cdots 2\cdot(l+1)\cdots(2l-1)}{l!}x^l\Big)$$

die DG. Für diese l bricht aber auch die Reihe (3.5a) ab und wird zum Polynom

$$w = ax^l\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \ldots + (-1)^{l/2}\frac{l!}{l(l-2)\ldots 2\cdot(l+1)\cdots(2l-1)}x^{-l}\Big).$$

Diese beiden Lösungen werden identisch, wenn man die zweite mit dem konstanten Faktor

$$(-1)^{l/2}\frac{l(l-2)\cdots 2\cdot(l+1)\ldots(2l-1)}{l!}$$

multipliziert. Die partikulären Lösungen (3.4a) und (3.5a) sind also gleich für gerade positive l. Ist l ungerade und negativ zeigt ein Vergleich, daß (3.4a) und (3.5b) identisch sind.

Die Reihe (3.4b) bricht ab wenn l ungerade und positiv oder gerade und negativ ist. Ist l ungerade und positiv, so ergibt sich aus (3.4b)

$$w = a\Big(x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-1)(l-3)\cdots 2\cdot(l+2)\cdots(2l-1)}{l!}x^l\Big)$$

während (3.5a) zu

$$w = ax^l\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \ldots + (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{l!}{2\cdot 4\cdot(l-1)\cdot(l+2)\cdots(2l-1)}x^{-l+1}\Big)$$

wird. Diese beiden Polynome sind aber bis auf einen Faktor identisch. Ist l gerade und negativ, so geht (3.4b) in (3.5b) über.

Die Lösungen (3.5) sind in der mathematischen Physik von großer Bedeutung. Setzt man die Konstante in a_0 in (3.5a) gleich

$$\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{(2l-1)(2l-3)\cdots 1}{l!}$$

so heißt das sich ergebende Polynom l-ten Grades *Legendrepolynom*:

$$P_l(x) = \frac{(2l-1)!!x^l}{l!}\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{-4} - \cdots\Big). \tag{3.6}$$

Die Reihe ist bis zum konstanten Glied herab fortzusetzen. Anderseits bezeichnet man (3.5b) mit der Konstanten

$$a_0 = \frac{2^l(l!)^2}{(2l+1)!}, \qquad l \in \mathbb{N},$$

mit Q_l. Es ist eine unendliche Reihe:

$$Q_l = \frac{l!x^{-l-1}}{(2l+1)!!}\Big(1 + \frac{(l{+}1)(l{+}2)}{2(2l{+}3)}x^{-2} + \frac{(l{+}1)(l{+}2)(l{+}3)(l{+}4)}{(2\cdot 4)(2l{+}3)(2l{+}5)}x^{-4} + \dots\Big) \tag{3.7}$$

Wir fassen zusammen:

Ist l ein ganze positive Zahl, so ist (3.6) ein Polynom und (3.7) eine unendliche Reihe. Die allgemeine Lösung der Legendreschen DG ist eine Linearkombination von P_l und Q_l.

Ist l eine negative Zahl, so wird P_l eine unendliche Reihe und (3.7) ein Polynom. Die allgemeine Lösung ist wiederum eine Linearkombination der beiden.

Bei fast allen Anwendungen ist die Variable x der Cosinus eines Winkels $x = \cos\theta$; diese Werte schließen $x = \pm 1$ ein. Wir haben gesehen, daß Lösungen die für $x = \pm 1$ regulär sind, nur für ganzzahlige l auftreten. Dann können wir uns auf die Lösungen P_l und Q_l beschränken, da sich alle anderen Lösungen auf diese reduzieren. Überdies bemerkt man, daß die Lösung (3.5b) mit $-(l+1)$ anstelle von l gerade (3.5a) ist. Also können wir $l \geq 0$ annehmen und behalten nur noch (3.6) als reguläre Lösungen. In physikalischen Problemen ist $P_l(\cos\theta)$ die einzige Lösung der Legendreschen DG von praktischem Interesse. Die tiefsten Legendrepolynome sind:

$$\begin{gathered} P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = (3x^2-1)/2 \\ P_3 = (5x^3 - 3x)/2, \quad P_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Der Vollständigkeit wegen gebe ich noch die tiefsten $Q's$ an:

$$\begin{aligned} &Q_0 = \frac{1}{2}v(x), \quad Q_1 = \frac{x}{2}v(x) - 1, \quad Q_2 = \frac{1}{2}P_2(x)v(x) - \frac{3x}{2} \\ &\text{wo} \qquad v(x) = \log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Erzeugende Funktion

Die Legendrepolynome können durch Ableiten von einfachen Polynomen erzeugt werden:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

Beweis: Wir differenzieren die Gleichung

$$(x^2-1)u' = 2lxu \tag{3.9}$$

$(l+1)$-mal nach x. Unter Benutzung von

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots$$

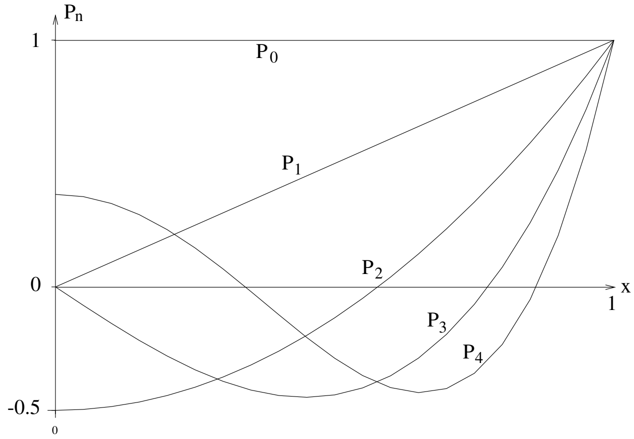


Abbildung 3.1: *Die Legendrepolynome P_l für $l = 0, 1, 2, 3, 4$.*

ergibt sich

$$(x^2-1)u^{(l+2)} + 2x(l+1)u^{(l+1)} + l(l+1)u^{(l)} = 2lxu^{(l+1)} + 2l(l+1)u^{(l)}$$

beziehungsweise die Legendresche Differentialgleichung für $u^{(l)}$:

$$(x^2-1)u^{(l+2)} + 2xu^{(l+1)} - l(l+1)u^{(l)} = 0.$$

Nun erfüllt aber gerade $u = (x^2-1)^l$ die Gleichung (3.9). Setzen wir noch $w = u^{(l)}/2^l l!$, dann löst w die Legendresche Differentialgleichung.

3.2 Orthogonale Polynome in Hilberträumen

Wir wollen nun beweisen, daß die Legendrepolynome eine Orthogonalsystem auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bilden. Die Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ bilden einen linearen Raum. Als inneres Produkt wählen wir

$$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} \bar{f}(x)g(x)dx. \tag{3.10}$$

Dies ist in der Tat ein Skalarprodukt:
Es ist linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument,

$$(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1(f,g_1) + \alpha_2(f,g_2) \quad \text{und} \quad (f,g) = \overline{(g,f)},$$

und es ist positiv

$$(f,f) \geq 0 \quad \text{und} \quad (f,f) = 0 \quad \text{nur falls} \quad f = 0.$$

Zwei Funktionen f, g (Vektoren in diesem unendlich dimensionalen Funktionenraum) sind orthogonal, falls $(f,g) = 0$ ist. Die Länge oder Norm einer Funktion ist

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

Also ist der Raum der stetigen Funktionen $[-1,1] \to C$ ein sogenannter normierter Raum. Der Abstand zwischen zwei Funktionen ist

$$d(f,g) = \|f - g\|.$$

Ist der Raum bezüglich dieser Metrik vollständig, so heißt er Hilbertraum: Ein *Hilbertraum* ist ein linearer Raum, der bezüglich der über das innere Produkt induzierten Metrik vollständig ist. In einem Hilbertraum konvergieren zum Beispiel alle Cauchy-Folgen gegen ein Element des Hilbertraumes. Ist $\mathcal{H}$ ein Raum mit Skalarprodukt, dann gelten die Ungleichungen

Satz:

$$|(f,g)| \leq \|f\|\,\|g\| \quad \text{und} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Weiterhin ist

$$\|g\| \leq \|\lambda f + g\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in C$$

genau dann, wenn $(f,g) = 0$ ist.

Beweis: Sei $\alpha = (f,g)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\lambda) + \|g\|^2. \tag{3.11}$$

Damit gilt die letzte Aussage im Satz für $\alpha = 0$. Ist $f = 0$, dann sind die erste und letzte Behauptung trivial erfüllt. Sei nun $f \neq 0$. Wir setzen $\lambda = -\alpha/\|f\|^2$. Mit diesem λ wird (3.11) zu

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|g\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|f\|^2}.$$

Dies beweist die erste Ungleichung und zeigt, daß die dritte Behauptung nur für $\alpha = 0$ gelten kann. Die zweite Ungleichung im Satz folgt aus der ersten (man quadriere die zweite Ungleichung).

Der Raum der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ ist bezüglich der von (3.10) induzierten Norm nicht vollständig. Man kann in aber vervollständigen. Der etwas größere Raum wird mit

$$L_2([-1,1])$$

bezeichnet.

In der Physik treten oft Polynome oder allgemeiner Funktionensysteme auf (zum Beispiel die Hermite-Polynome) die orthogonal bezüglich eines gewichteten L_2 Raumes sind. Das Skalarprodukt ist dann

$$(f,g) = \int\limits_M \rho(x)\bar{f}(x)g(x)d^n x, \qquad \rho(x) > 0.$$

Das Integrationsgebiet $M \subset R^n$ kann ein endliches oder unendliches Gebiet sein. Die Dichte ρ muß eine positive Funktion sein. Die Vervollständigung des Funktionenraumes bezüglich der von $(.,.)$ induzierten Norm ist $L_2(M,\rho)$. Das Skalarprodukt und die zugehörige Norm erfüllen alle obigen Eigenschaften.

Orthogonalität der Legendrepolynome

Die Legendrepolynome sind orthogonal in $L_2([0,1])$. Dies ist einfach zu beweisen. Dazu schreiben wir die Legendresche Differentialgleichung wie folgt:

$$Aw = l(l+1)w, \qquad A = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}. \tag{3.12}$$

Allgemein ist der zu A adjungierte Operator A wie folgt definiert:

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g).$$

Für einen symmetrischen Operator ist $A = A^\dagger$. Für den Differentialoperator A in (3.12) gilt nun

$$(f, Ag) = \int\limits_{-1}^{1} \bar{f}Ag = -(1-x^2)(\bar{f}g' - \bar{f}'g)|_{-1}^{1} + \int \overline{Af}g = (Af, g),$$

wobei wir annahmen, daß f und g bei $x = \pm 1$ regulär sind, so daß die Oberflächenterme verschwinden. Für Funktionenräume deren Elemente bei $x = \pm 1$ regulär sind, ist also A in (3.12) symmetrisch. Insbesondere gilt

$$(AP_k, P_l) = k(k+1)(P_k, P_l) = (P_k, AP_l) = l(l+1)(P_k, P_l).$$

Für $l \neq k$ muß also $(P_l, P_k) = 0$ gelten. Deshalb sind die Legendrepolynome orthogonal zueinander. Es verbleibt noch, die Norm von P_l zu bestimmen. Mit

$$\int\limits_{-1} \Big(\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^l\Big)^2 = \frac{2}{2l+1}4^l(l!)^2$$

findet man, daß

$$(P_l, P_l) = \frac{2}{2l+1} \quad \text{und damit} \quad (P_k, P_l) = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

3.2.1 Zugeordnete Legendrefunktionen oder Kugelfunktionen

Bei der Behandlung von wasserstoffähnlichen Atomen in der QM wird man auf die DG

$$(1-x^2)w'' - 2xw' + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)w = 0 \tag{3.13}$$

geführt, wobei l und m ganzzahlig sind. Es erfülle P_l die Legendresche Differentialgleichung (3.2), dann erfüllt die *Helmholtzsche Funktion*

$$P_l^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m}P_l$$

die DG

$$\Big((1-x^2)\frac{d}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d}{dx} + \Big(l(l+1) - m(m+1)\Big)P_l^{(m)} = 0.$$

Man braucht nur die Legendresche DG m-mal zu differenzieren. Wir setzen nun

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{-m/2}y_l^{(m)}(x).$$

und bestimmen durch Einsetzen diejenige DG, der $y_l^{(m)}$ genügt. Man findet die DG (3.13) und damit lösen die

$$y_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{3.14}$$

die DG (3.13). Die Funktion $y_l^{(m)}$ ist als zugeordnete Legendreschefunktion oder als zugeordnete Kugelfunktion bekannt. Die Helmholtz-Funktion $P_l^{(m)}$ ist ein Polynom vom Grad $l-m$. Die zugeordnete Legendrefunktion ist ein Polynom form Grad l.

3.3 Der Satz von Fuchs

Wir wollen die Frage beantworten, wann die Lösungen einer Differentialgleichung in eine Potenzreihe entwickelt werden können. Zur Vorbereitung betrachten wir die DG

$$w'' + c\frac{w}{x^m} = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Setzen wir die Reihenentwicklung $x^\alpha \sum a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$ ein, so finden wir

$$\sum a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2} + c\sum a_n x^{n+\alpha-m} = 0.$$

Für $m > 2$ erscheint die niedrigste Potenz $\sim x^{\alpha-m}$ im zweiten Term. Der entsprechende Koeffizient a_0 muß deshalb verschwinden. Für $m = 2$ muß $a_0\big(\alpha^2 - \alpha + c\big) = 0$ gelten. Die

$a_n, n > 0$ müssen verschwinden, und die allgemeine Lösung ist

$$w = c_1 x^{\frac{1}{2}+\beta} + c_2 x^{\frac{1}{2}-\beta}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{4} - c}, \qquad m = 2.$$

Es gibt als immer zwei Potenzlösungen. Eine davon kann bei $x = 0$ singulär werden. Für $m < 2$ kann die Rekursionsformel gelöst werden und führt auf eine konvergente und nichttriviale Lösung:

$$\alpha \in \{0, 1\}, \qquad a_{n+2} = -\frac{c}{(n+2+\alpha)(n+\alpha+1)} a_{n+m}.$$

Die entsprechende Reihe ist konvergent für alle x und definiert eine analytische Funktion.

Ein zweites instruktives Beispiel ist die Gleichung

$$w'' + c\frac{w'}{x^m} = 0$$

welche zu

$$\sum a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2} + c \sum a_n (n+\alpha) x^{n+\alpha-1-m} = 0$$

führt. Für $m > 1$ muß $a_0\alpha$, und damit α, verschwinden. Die Rekursrelation ist

$$\frac{a_{n+m-1}}{a_n} = -\frac{1}{c}\frac{n(n-1)}{n+m-1}.$$

Die Reihe hat verschwindenden Konvergenzradius und es gibt keine Lösung die eine Potenzreihenentwicklung hat. Für $m = 1$ ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von $w = 1$ und $w = x^{1-c}$. Für $m < 1$ folgt

$$\alpha \in \{0, 1\}, \qquad a_{n+1} = -\frac{c a_{n+m}(n+m)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}.$$

Dies definiert wiederum eine analytische Funktion. Die Gleichungen

$$w'' + c\frac{w}{x^3} \quad \text{und} \quad w'' + c\frac{w'}{x^2}$$

besitzen einen singulären Punkt in $x = 0$, was die Ursache für das Versagen der Reihenentwicklung ist. Im Falle der Legendreschen DG haben die Funktionen p und q einfache Pole an den Stellen $x = \pm 1$, weshalb die erhaltene allgemeine Lösung diese beiden Punkte auslässt. In den eben betrachteten Gleichungen ist $x = 0$ ein singulärer Punkt. Ob Lösungen eine (konvergente) Potenzreihenentwicklung an einer singulären Stelle zulassen hängt offensichtlich vom Divergenzgrad von p und q ab. Wir geben noch ein drittes Beispiel, um den Sachverhalt zu illustrieren. Die Lösung der Gleichung

$$w'' + \frac{w'}{x} - \frac{w}{x^2} = 0$$

kann in der Form $x^\alpha \sum a_n x^n$ entwickelt werden. Man findet für die allgemeine Lösung

$$w = \frac{a_0}{x} + a_2 x.$$

Es gibt eine bei $x = 0$ reguläre und eine divergente Lösung. Welche Singularitäten von p, q noch eine Integration durch Reihen in der Umgebung des singulären Punktes erlauben wird durch den Satz von Fuchs geklärt:

Satz: Wenn die DG

$$w'' + pw' + qw = 0$$

in $x = x_0$ einen singulären Punkt besitzt, so gibt es dennoch eine konvergente Potenzreihenentwicklung der Lösung in $x = x_0$ (eventuell mit endlich vielen negativen Potenzen) falls $(x - x_0)p(x)$ und $(x - x_0)^2 q(x)$ endlich bleiben für $x \to x_0$.

Singuläre Punkte welche die Voraussetzungen des Fuchsschen Satzes erfüllen heißen *außerwesentliche* Singularitäten der DG; alle übrigen heißen *wesentlich*. Eine DG, die in der ganzen komplexen Ebene keine wesentlichen Singularitäten besitzt, heißt eine DG vom Fuchsschen Typ. Selbst wenn x_0 eine außerwesentliche Singularität ist, braucht man bei der Integration der DG durch Reihen nicht zwei unabhängige Lösungen zu erhalten. Man kann zwei unabhängige Lösungen der Form

$$w_1 = (x - x_0)^{\alpha_1} \sum a_n (x - x_0)^n \quad \text{und} \quad w_2 = (x - x_0)^{\alpha_2} \sum b_n (x - x_0)^n$$

immer dann erhalten, wenn die beiden Wurzeln α_1 und α_2 der bestimmenden Gleichung sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden.

3.4 Integraltransformationen

Es sei eine Differentialgleichung

$$Lw + \lambda w = 0$$

gegeben, wobei L ein Differentialoperator ist. Statt $w(z)$ führen wir eine neue Funktion $v(\zeta)$ der komplexen Variablen ζ durch eine Gleichung

$$w(z) = \int_C K(z, \zeta) v(\zeta) d\zeta \tag{3.15}$$

ein, wobei der *Transformationskern* $K(z, \zeta)$ in jeder der beiden Variablen analytisch sein soll. Der Integrationsweg C in der komplexen ζ-Ebene wird jeweils geeignet zu bestimmen sein. Die Differentialgleichung geht über in

$$\int_C \big(LK + \lambda K\big) v(\zeta) d\zeta = 0,$$

wobei sich der Operator L auf die Variable z bezieht. Nun soll K die partielle Differentialgleichung

$$LK = AK,$$

erfüllen, wobei A nur auf die Variable ζ wirkt, so folgt

$$\int\limits_C (AK + \lambda K)v(\zeta)d\zeta = \int\limits_C K(z,\zeta)\big(A^\dagger v + \lambda v\big)d\zeta = 0.$$

Der Weg C ist hier so zu wählen, daß die Randterme verschwinden. Falls die partielle DG $LK = AK$, für deren Wahl man Spielraum hat, und die transformierte DG

$$A^\dagger v + \lambda v = 0 \tag{3.16}$$

explizit gelöst werden können, so erhält man mit dieser Methode die Lösung $w(z)$ in der angegebenen Integralform.

In der Analysis treten solche Integraltransformationen in verschiedener Gestalt auf. Für den Kerne

$$K(z,\zeta) = e^{z\zeta}, \quad K(z,\zeta) = e^{iz\zeta} \quad \text{und} \quad K(z,\zeta) = (z-\zeta)^\alpha$$

sind dies die Transformation von Laplace und Euler. Im Folgenden werden wir Integraltransformationen für mehrere Differentialgleichungen diskutieren.

3.5 Besselfunktionen

Wir beginnen mit der für die QM wichtigen Besselschen Differentialgleichung. Dies ist die folgende Differentialgleichung

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \lambda^2)w = Lw - \lambda^2 w = 0, \qquad \lambda = \text{konstant}.$$

Sie ist eine Gleichung vom Fuchsschen Typ mit einer außerwesentlichen Singularität bei $z = 0$. Da $z = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit der Gleichung ist, kann dort ihre Lösung in eine Potenzreihe entwickelt werden. Man findet

$$(\alpha^2 - \lambda^2)a_0 = 0, \quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_n}{\lambda^2 - (n+2+\alpha)^2}.$$

Offensichtlich ist $\alpha = \pm\lambda$ und $a_1 = 0$. Für $\alpha = \lambda$ findet man

$$w = a_0 z^\lambda \Big(1 - \frac{z^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4(2\lambda+2)(2\lambda+4)} + \cdots\Big)$$

und für $\alpha = -\lambda$

$$w = a_0 z^{-\lambda} \Big(1 + \frac{z^2}{2(2\lambda-2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4(2\lambda-2)(2\lambda-4)} + \cdots\Big).$$

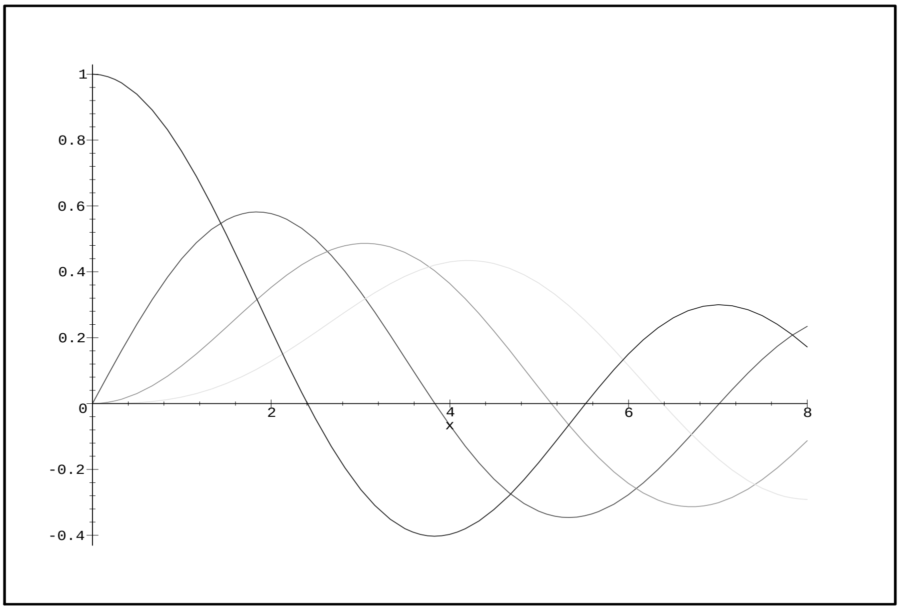
Diese Lösung geht aus der ersten durch die Ersetzung $\lambda \to -\lambda$ hervor. Setzen wir

$$a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)},$$

dann nennt man den sich ergebenden Ausdruck

$$J_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{\lambda+2n}$$

Besselfunktion vom Grade λ.



Die Besselfunktionen vom Grade = 0,1,2,3.

Die vollständige Lösung der Besselschen Differentialgleichung (λ nicht ganzzahlig) ist also

$$w = aJ_\lambda(z) + bJ_{-\lambda}(z). \tag{3.17}$$

Die J_λ sind die *Besselfunktionen* der Ordnung λ.

Für $\lambda = l \in \{1, 2, \ldots\}$ ist

$$J_{-l}(z) = \sum_{n=l,l+1,\ldots} \frac{(-)^n}{n!(n-l)!} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2n-l},$$

wobei wir

$$\lim_{\lambda\to -l}\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}=0\quad \text{für}\quad n=l-1,l-2,\dots$$

benutzten. Setzten wir $m=n-l$ so finden wir

$$J_{-l}(z)=\sum_{m=0,1,\dots}\frac{(-)^{m+l}}{(m+l)!m!}\big(\frac{z}{2}\big)^{2m+l}=(-)^l J_l(z).$$

Für ganzzahlige λ sind also J_λ und $J_{-\lambda}$ linear abhängig.

Integraltransformation

Setzen wir $w=\int Kv d\zeta$ so folgt

$$\int_C \big(z^2K_{zz}+zK_z+z^2K-\lambda^2K\big)v(\zeta)d\zeta=0.$$

Wir fordern nun, daß

$$LK=z^2K_{zz}+zK_z+z^2K=-K_{\zeta\zeta}=AK$$

gilt, mit der in der ganzen z und ζ-Ebene regulären Lösung

$$K(z,\zeta)=e^{\pm iz\sin\zeta}.$$

Die Besselsche DG geht über in

$$\int_C \big(K_{\zeta\zeta}+\lambda^2K\big)v(\zeta)d\zeta=0$$

oder, wie man nach partieller Integration erkennt, in

$$\int_C K(z,\zeta)\big(v''+\lambda^2v\big)d\zeta-\int_C\frac{d}{d\zeta}\big(Kv'-K_\zeta v\big)d\zeta=0.$$

Die transformierte DG $v''+\lambda^2v=0$ hat die Lösungen $\exp(\pm i\lambda\zeta)$. Nun müssen wir noch den Integrationsweg C geeignet wählen damit die Oberflächenterme verschwinden. Auf den senkrechten Abschnitten der in Abb. 3.2 mit C_1 und C_2 bezeichneten Wege ist wegen $\sin(\zeta=\xi+i\eta)=\sin\xi\cos(i\eta)+\sin(i\eta)\cos\xi$ gleich

$$\sin\zeta=\sin\xi\cosh\eta+i\cos\xi\sinh\eta=-i\sinh|\eta|$$

und damit der Realteil von

$$-iz\sin\zeta=-z\sinh|\eta|\quad\text{gleich}\quad -\Re(z)\sinh|\eta|,$$

also negativ für $\Re(z)>0$. Setzen wir $K(z,\zeta)=\exp(-iz\sin\zeta)$ so strebt auf C_1 und C_2 der Zusatzterm $Kv'-K_\zeta v$ beiderseits gegen Null, und wir erhalten in den Integralen

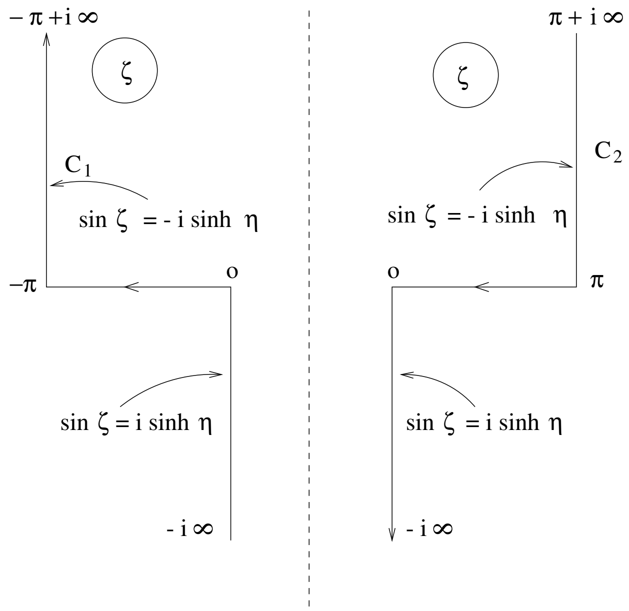


Abbildung 3.2: *Integrationswege in der komplexen ζ-Ebene*

$$H^1_\lambda(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta \quad \text{und} \quad H^2_\lambda(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta \tag{3.18}$$

zwei Lösungen der Besselschen DG, die sogenannten *Hankelfunktionen.* Man sieht leicht, daß diese Integrale für $\Re(z) > 0$ konvergieren.

Für die analytische Fortsetzung zu $\Re(z) \leq 0$ deformieren wir den Integrationsweg C_1. Wir setzen

$$\lambda = a + ib, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy$$

dann sind der Real- und Imaginärteil der Funktion

$$f(\zeta) = -iz\sin\zeta + i\lambda\zeta$$

im Exponenten

$$\begin{aligned} \Re f(\zeta) &= \quad y\sin\xi\cosh\eta + x\cos\xi\sinh\eta - b\xi - a\eta \\ \Im f(\zeta) &= -x\sin\xi\cosh\eta + y\cos\xi\sinh\eta + a\xi - b\eta. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir für die senkrechten Teile des Weges C_1 statt der Abszissen 0 und $-\pi$ die Abszissen ξ_0 und $-\pi - \xi_0$. Wegen

$$\Re f(\zeta) \sim \frac{1}{2}e^{|\eta|}\big(y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0\big) + O(|\eta|) \quad \text{für} \quad |\eta| \to \infty$$

ist das Integral

$$\int_{C_1} e^{f(\zeta)} d\zeta$$

für solche z konvergent, für welche

$$y \sin \xi_0 - x \cos \xi_0 < 0$$

ist. Vergrößert man nun ξ_0, dann dreht sich die Halbebene auf welcher das Integral kon-

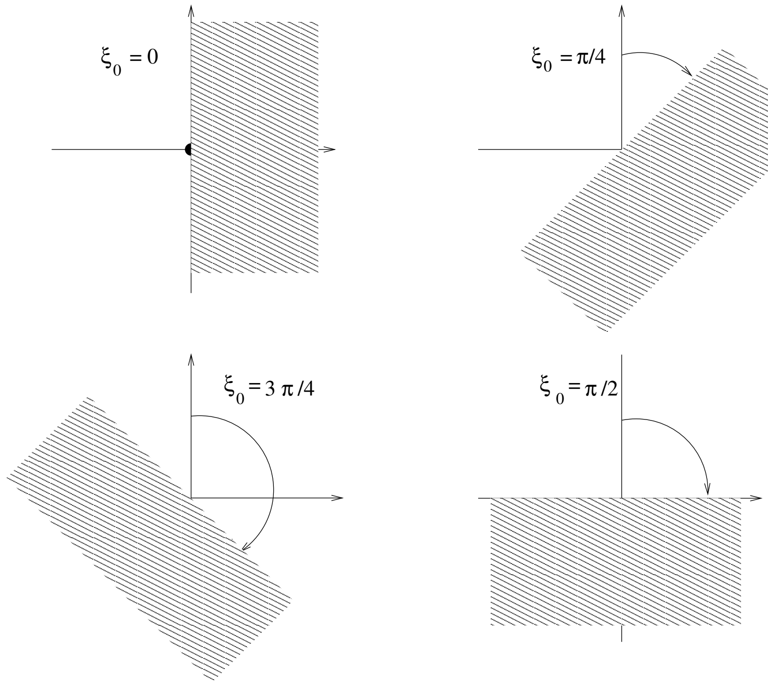


Abbildung 3.3: *Deformation des Integrationsweges in der Integraltransformation*

vergiert und eine in z analytische Funktion definiert, um den Punkt $z = 0$. Zum Beispiel, definiert das Integral mit $\xi_0 = 0$ eine analytische Funktion in der Halbebenen $\Re z > 0$ und das Integral mit $\xi_0 = \pi/2$ eine analytische Funktion in der Halbebene $\Im z < 0$. Die Viertelebene mit $\Re z > 0$ und $\Im z < 0$ liegt in beiden Halbebenen. Auf dieser Viertelebene stimmen die beiden Integrale aber überein. Sind $C_1(0)$ und $C_1(\pi/2)$ die beiden Integrationswege mit $\xi_0 = 0$ und $\xi_0 = \pi/2$, so gilt

$$\int_{C_1(0)} e^{f(\zeta)} d\zeta = \int_{C_1(\pi/2)} e^{f(\zeta)} d\zeta$$

für $\Re z > 0$ und $\Im z < 0$, da der eine Weg so in den anderen deformiert werden kann, ohne daß die Randterme beitragen. Lassen wir also ξ_0 in geeigneter Weise eine unbeschränkte Folge positive oder negative Werte durchlaufen, so entsteht nach und nach das gesamte analytische Gebilde der Funktion $H^1_\lambda(z)$, nämlich eine Riemannsche Fläche, die im Nullpunkt einen Verzweigungspunkt mit von λ abhängiger Ordnung besitzt (siehe Abb. 3.3).

Für $\xi_0 = -\pi/2$ verschwindet der waagerechte Bestandteil des Integrationsweges, und wir erhalten

$$H^1_\lambda(z) = \frac{e^{-i\pi\lambda/2}}{i\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz\cosh\eta - \lambda\eta} d\eta \tag{3.19}$$

welches die Funktion in der oberen Halbebene $\Im z > 0$ darstellt. Lassen wir im Sektor

$$\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$$

ins Unendliche wachsen, so strebt der Integrand auf dem ganzen Integrationsweg gegen Null. Ähnlich argumentiert man, daß $H^\lambda_2(z)$ gegen Null strebt, wenn z im Sektor

$$\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta$$

ins Unendliche wächst. Damit haben wir bewiesen, daß

Lemma Die Hankelfunktionen erfüllen

$$\begin{array}{lcccll} H^1_\lambda(z) & \longrightarrow & 0 & \text{für} & |z| \to \infty, & \delta \leq \arg(z) \leq \pi - \delta \\ H^2_\lambda(z) & \longrightarrow & 0 & \text{für} & |z| \to \infty, & \pi + \delta \leq \arg(z) \leq 2\pi - \delta. \end{array}$$

Man kann leicht zeigen, daß H^1_λ auf der negativen und H^2_λ auf der positiven imaginären Achse mit $|z| \to \infty$ über alle Grenzen wachsen. Damit müssen H^1_λ, H^2_λ linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sein.

Um die Hankel- mit den Besselfunktionen in Verbindung zu bringen, bemerken wir, daß für reelle λ und reelle z die Lösungen H^1_λ und H^2_λ konjugiert komplex zueinander sind.

Ersetzen wir in der Darstellung

$$\overline{H^1_\lambda(z)} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\bar{C}_1} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta} d\zeta,$$

wobei $\bar{C}_1$ das Spiegelbild von C_1 an der reellen Achse ist, ζ durch $-\zeta$, so folgt

$$\overline{H^1_\lambda(z)} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\bar{C}_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta.$$

Da $-\bar{C}_1$ gleich dem im negativen Sinne durchlaufenen Wege C_2 ist, so wird

$$\overline{H^1_\lambda(z)} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta = H^2_\lambda(z),$$

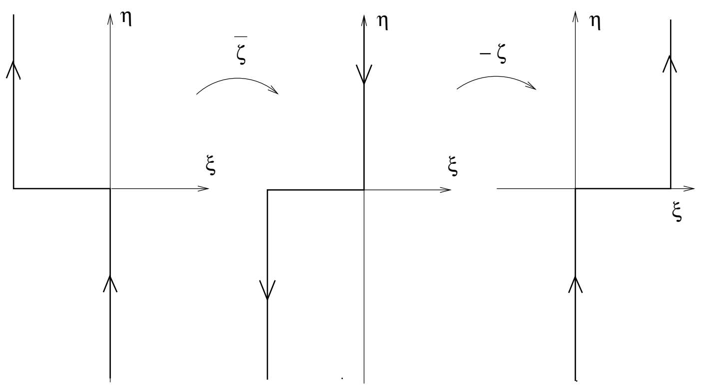


Abbildung 3.4: *Die verschiedenen Integrationswege.*

was zu beweisen war. $H^i_\lambda(z)$ und $H^i_{-\lambda}(z)$ erfüllen dieselbe Differentialgleichung, die ja nur λ^2 enthält. Deshalb müssen diese 4 Funktionen linear abhängig sein. Da $H^i_\lambda(z)$ und $H^i_{-\lambda}(z)$ dasselbe asymptotische Verhalten zeigen, liegt die Vermutung nahe, daß sie abhängig sind. Um dies zu beweisen ersetzt man in der Integraldarstellung

$$H^1_{-\lambda}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta$$

ζ durch $-\zeta-\pi$. Dann ist

$$H^1_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\pi}\int_{\tilde{C}_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta.$$

Aber da $\tilde{C}_1$ gleich das im negative Sinn durchlaufene C_1 ist, haben wir gezeigt, daß

$$H^1_{-\lambda}(z) = e^{i\lambda\pi}H^1_\lambda(z)$$

gilt. Analog beweist man, daß

$$H^2_{-\lambda}(z) = e^{-i\lambda\pi}H^2_\lambda(z)$$

Damit sind

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}\big(H^1_\lambda(z) + H^2_\lambda(z)\big) \quad \text{und} \quad N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}\big(H^1_\lambda(z) - H^2_\lambda(z)\big)$$

Lösungen der Besselgleichungen, welche für reelle λ und z reell sind und welche

$$\begin{pmatrix} J_{-\lambda}(z) \\ N_{-\lambda}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi\lambda & -\sin\pi\lambda \\ \sin\pi\lambda & \cos\pi\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_\lambda(z) \\ N_\lambda(z) \end{pmatrix}$$

erfüllen. Es sind die Besselschen und Neumannschen Funktionen vom Index λ.

Integraldarstellung der Besselschen Funktionen

Addieren wir H^1_λ und H^2_λ, so heben sich die auf der imaginären Achse laufenden Integrationswege in Abb.(3.2). Wir erhalten also in für $\Re(z) > 0$ die folgende Darstellung für J_λ:

$$J_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_C e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta, \qquad \Re z > 0, \tag{3.20}$$

wobei C der in Abb. 3.2 gekennzeichnete Weg ist.

Ist nun λ eine ganze Zahl, so heben sich wegen der Periodizität des Integranden die Integrale

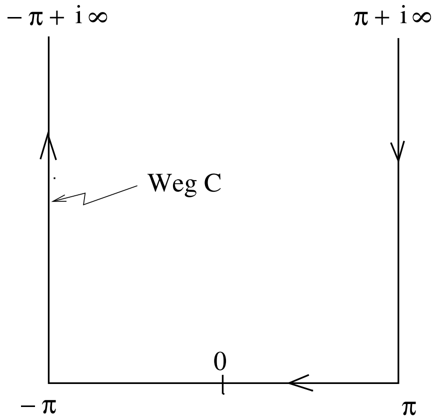


Abbildung 3.5: *Integrationsweg für Besselfunktionen.*

über die senkrechten Abschnitte von C weg und es ergibt sich

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\zeta-in\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos\big(z\sin\zeta - n\zeta\big)d\zeta. \tag{3.21}$$

Wir sehen, daß die Besselschen Funktionen mit ganzzahligem Index ganze Funktionen auf C sind. Die Darstellung (3.21) zeigt, daß $J_n(z)$ der n^{te} Fourierkoeffizient in der Fourierentwicklung von

$$e^{iz\sin\zeta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\zeta}$$

nach ζ ist. Beachten wir noch, daß $J_{-n}(z) = (-)^n J_n(z)$ ist, so erhalten wir

$$\cos(z\sin\zeta) \quad = \quad J_0 + 2\sum_1^\infty J_{2n}(z)\cos 2n\zeta$$

$$\sin(z\sin\zeta) \quad = \quad 2\sum_1^\infty J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\zeta,$$

und speziell für $\zeta = \pi/2$

$$\cos(z) = J_0 - 2J_2 + 2J_4(z) - \dots, \quad \sin(z) = 2J_1(z) - 2J_3(z) + \dots.$$

Wir geben schlußendlich noch eine zweite Integraldarstellung der Besselfunktionen an, die auf eine nützliche Rekursionsformel für die Besselfunktionen mit ganzzahligem Index führt. Es sei

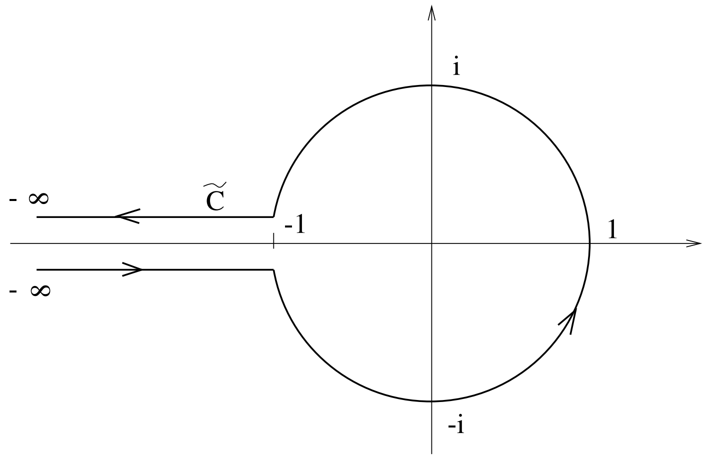


Abbildung 3.6: *Der Integrationsweg $\tilde{C}$ in der komplexen ζ-Ebene.*

$$\tilde{\zeta} = e^{-i\zeta}, \quad \text{so daß} \quad \sin\zeta = \frac{1}{2i}(\tilde{\zeta} - \frac{1}{\tilde{\zeta}}).$$

Dann geht (3.20) über in

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{C}} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta, \tag{3.22}$$

wobei wir $\tilde{\zeta}$ wieder mit ζ bezeichneten. Der neue Integrationsweg $\tilde{C}$ ist in Abb. 3.6 dargestellt. Wegen

$$0 = \int\limits_{\tilde{C}} d\zeta\, \frac{d}{d\zeta}\frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{\lambda+1}} = \int\limits_{\tilde{C}} d\zeta \Big[\frac{z}{2}\big(\frac{1}{\zeta^\lambda} + \frac{1}{\zeta^{\lambda+2}}\big) - \frac{\lambda}{\zeta^{\lambda+1}}\Big] e^{\frac{z}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}$$

ergeben sich die wichtigen Rekursionsrelationen

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda(z).$$

Diese gelten nicht nur für die Besselfunktionen, sondern auch für beide Hankelfunktionen.

3.6 Hypergeometrische Differentialgleichung

Dies ist die Differentialgleichung

$$(z^2 - z)w'' + \big[(1 + a + b)z - c\big]w' + abw = 0. \tag{3.23}$$

Die Parameter a, b und c sind Konstanten, c wird als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Die Gleichung hat außerwesentliche Singularitäten in $0, 1$ und ∞. Die Bestimmungsgleichung für die Entwicklung um $z = 0$ lautet

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha c = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1 - c$. Die Rekursionsrelation lautet

$$a_{n+1} = \frac{(\alpha + n + a)(\alpha + n + b)}{(\alpha + n + 1)(\alpha + n + c)}\, a_n.$$

Für $\alpha = 0$ vereinfacht sich diese zu

$$a_{n+1} = \frac{(a + n)(b + n)}{(n + 1)(n + c)}\, a_n$$

und damit erhalten wir für $\alpha = 0$ folgende Lösung:

$$w = A\Big(1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3! \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \cdots\Big). \tag{3.24}$$

Die Reihe in den Klammern heißt *hypergeometrische Reihe*. Sie konvergiert innerhalb des Einheitskreises. Für $a = 1$ und $b = c$ wird sie zur gewöhnlichen geometrischen Reihe; daher ihr Name. Man bezeichnet die Reihe mit $F(a, b, c; z)$. Damit ist die partikuläre Lösung $w = AF(a, b, c; z)$.
Für $\alpha = 1 - c$ lautet die die Rekursionsformel

$$a_{n+1} = \frac{(a - c + n + 1)(b - c + n + 1)}{(n + 1)(n + 2 - c)} a_n.$$

Benutzt man die neuen Konstanten $a' = a - c + 1, b' = b - c + 1$ und $c' = 2 - c$, so entsteht

$$a_{n+1} = \frac{(a' + n)(b' + n)}{(n + 1)(n + c')} a_n,$$

also dieselbe Rekursionsrelation wie für $\alpha = 0$. Die entsprechende partikuläre Lösung ist daher

$$w = Bz^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z).$$

Damit ergibt sich folgende allgemeine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$w = AF(a,b,c;z) + Bz^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z). \tag{3.25}$$

Die obige Reihendarstellung für F konvergiert innerhalb des Einheitskreises. Wir überlassen es einer Übungsaufgabe, zu zeigen, daß

$$P_l(\xi) = F(l+1, -l, 1; \frac{1-\xi}{2})$$

die Legendreschen Polynome sind. Die hypergeometrische Reihe ist ein Polynom, falls a oder b negativ ganz oder 0 sind.