

# Kapitel 7

## Lagrangesche Mechanik

Häufig ist man gar nicht an der Berechnung der Zwangskräfte interessiert. Dann ist es wesentlich bequemer, eine Formulierung der Mechanik zu wählen, bei der diese aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Im folgenden werden wir sehen, daß diese Elimination der Zwangskräfte von den LAGRANGE-Gleichungen erster Art zu den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art führt.

### 7.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Bei  $3N$  Koordinaten  $x_{ia}$  und  $s$  holonomen Zwangsbedingungen sind nur

$$f = 3N - s \quad (7.1)$$

Koordinaten voneinander unabhängig. Wir nennen  $f$  die Anzahl *Freiheitsgrade* des mechanischen Systems. Wir wählen nun  $f$  geeignete verallgemeinerte Koordinaten  $q^1, \dots, q^f$ , so daß diese die Lage des mechanischen Systems festlegen,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, q^1, \dots, q^f), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.2)$$

und die holonomen Zwangsbedingungen identisch erfüllt sind

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1(t, q^1, \dots, q^f), \dots, \mathbf{r}_N(t, q^1, \dots, q^f)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (7.3)$$

Als Beispiel betrachten wir die rheonome, holonome Zwangsbedingung, daß sich ein Massenpunkt auf der Oberfläche einer in  $z$ -Richtung bewegten Kugel mit Radius  $R$  bewegt. Die Nebenbedingung für dieses in  $z$ -Richtung bewegte sphärische Pendel ist

$$F(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{r} - z_0(t)\mathbf{e}_3)^2 - R^2 = 0. \quad (7.4)$$

Hierbei beschreibt das gegebene  $z_0(t)$  die verschiebbare Position des Aufhängepunktes der Kugel. Das System besitzt 2 Freiheitsgrade und entsprechend 2 verallgemeinerte Koordinaten, die man mit den Winkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$  der Kugelkoordinaten um den Aufhängepunkt des

Pendels identifizieren kann,

$$\begin{aligned}x(t, \vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \cos \varphi \\y(t, \vartheta, \varphi) &= R \sin \vartheta \sin \varphi \\z(t, \vartheta, \varphi) &= R \cos \vartheta + z_0(t)\end{aligned}\tag{7.5}$$

Die Nebenbedingung (7.4) ist damit identisch erfüllt, wenn  $R$  die Pendellänge ist. Wie schon bei früheren Systemen, zum Beispiel dem starren Körper, haben die verallgemeinerten Koordinaten nicht die Dimension einer Länge. Im vorliegenden Fall sind die Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  dimensionslos.

Nun wollen wir das D'ALEMBERTSche Prinzip, nach dem die Summe der eingprägten und Trägheitskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten,

$$\sum_{i=1}^N (\mathfrak{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0,\tag{7.6}$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreiben. Für die virtuellen Verrückungen lesen wir wegen  $\delta t = 0$  ab:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j.\tag{7.7}$$

Damit ergibt sich für die Arbeit, die von den Kräften  $\mathfrak{F}_i$  bei virtuellen Verrückungen geleistet wird

$$\delta A_1 = \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^f \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j = \sum_{j=1}^f \left( \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) \delta q^j.$$

Hier führen wir die *verallgemeinerten Kräfte*

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathfrak{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}\tag{7.8}$$

ein. Dann vereinfacht sich der Ausdruck für die von den eingprägten Kräften geleistete Arbeit zu

$$\delta A_1 = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q^j.\tag{7.9}$$

Entsprechend erhalten wir für die Arbeit, die von den Trägheitskräften bei virtueller Verrückungen verrichtet wird

$$\delta A_2 = - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \stackrel{(7.7)}{=} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^f m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \delta q^j.\tag{7.10}$$

In einer Nebenrechnung untersuchen wir

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.\tag{7.11}$$

Einerseits erhalten wir für den letzten Faktor

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \sum \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^k \partial q^j} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q^j} \quad (7.12)$$

und andererseits gilt wegen

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (7.13)$$

auch

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q^j \partial t}. \quad (7.14)$$

Vergleichen wir die Resultate (7.14) und (7.12), so folgt die Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j}. \quad (7.15)$$

Die totale Zeitableitung von  $\partial \mathbf{r}_i / \partial q^j$  ist also gleich der partiellen Ableitung der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}_i$  nach der verallgemeinerten Koordinate  $q^j$ . Dies setzen wir in (7.11) ein, mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j},$$

so daß (7.10) übergeht in

$$\delta A_2 = - \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^f \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) \delta q^j + \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^f \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \delta q^j. \quad (7.16)$$

Mit (7.9) und (7.16) schreibt sich das D'ALEMBERT-Prinzip der virtuellen Verrückungen  $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$  gemäß

$$\sum_{j=1}^f \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \right] - Q_j \right\} \delta q^j = 0. \quad (7.17)$$

Es gilt in dieser Form noch ganz allgemein. Wichtig ist die Spezialisierung auf *holonome Zwangsbedingungen*. Dann sind die virtuellen Verrückungen  $\delta q^j$  der verallgemeinerten Koordinaten beliebig, und es folgt aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip (7.17)

$$\sum_{i=1}^N \left[ m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j} \right] = Q_j. \quad (7.18)$$

Die beiden Terme auf der linken Seite lassen sich nun leicht mit der kinetischen Energie des Systems in Verbindung bringen. Dazu differenzieren wir diese nach den verallgemeinerten Koordinaten,

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q^j},$$

und nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}^j} \stackrel{(7.13)}{=} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.$$

Damit lautet das D'ALEMBERTSche Prinzip

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j = 0. \quad (7.19)$$

In dieser Form gilt das Prinzip für beliebige eingeprägte Kräfte. Für Potentialkräfte kann es allerdings noch eleganter formuliert werden.

## 7.2 Lagrange-Funktion

Für Potentialkräfte  $\mathfrak{F}_i = -\nabla_i V$  vereinfachen sich die verallgemeinerten Kräfte zu

$$Q_j = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.20)$$

Um die verallgemeinerten Kräfte zu bestimmen, ersetzt man also die  $\mathbf{r}_i$  im Potential  $V(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  durch die verallgemeinerten Koordinaten,

$$V(t, q^1, \dots, q^f) = V\left(t, \mathbf{r}_1(t, q^1, \dots, q^f), \dots, \mathbf{r}_N(t, q^1, \dots, q^f)\right),$$

und bildet den Gradient bezüglich der  $q^j$ . Damit vereinfacht sich das D'ALEMBERTSche Prinzip zu

$$\sum_{j=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q^j} (T - V) \right) \delta q^j = 0. \quad (7.21)$$

Wir haben benutzt, daß  $V$  nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}^j$  abhängt. Mit der Definition der in der theoretischen Physik äußerst wichtigen *LAGRANGE-Funktion*

$$L(t, q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) = T(t, q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) - V(t, q^1, \dots, q^f) \quad (7.22)$$

folgt dann

$$\sum_{j=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \delta q^j = 0. \quad (7.23)$$

Für ein konservatives System mit holonomen Zwangsbedingungen, der Regelfall in den folgenden Betrachtungen, erhalten wir die *LAGRANGE-Gleichungen 2. Art*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0. \quad (7.24)$$

Diese LAGRANGE-Gleichungen ersetzen die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen. Es sind  $f$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren vollständige Lösung die Kenntnis von  $2f$  Anfangsbedingungen erfordert. Die holonomen Zwangsbedingungen tauchen in den Bewegungsgleichungen nicht mehr auf.

In der NEWTONschen Mechanik sind Impuls und Kraft, also vektorielle Objekte, die primären Größen. In der LAGRANGESchen Mechanik sind es Energie, Arbeit, LAGRANGE-Funktion sowie die noch einzuführende Wirkung, also skalare Objekte. Dies ist ein großer Vorteil bei der Untersuchung von Symmetrien und der Konstruktion von Erhaltungsgrößen. Der LAGRANGE-Formalismus ist auch für klassische Feldtheorien von sehr großer Bedeutung. Darüber hinaus spielt er eine wichtige Rolle bei der Quantisierung von physikalischen Systemen<sup>1</sup>. Die elegante und mächtige LAGRANGESche Formulierung ist aus der modernen theoretischen Physik nicht mehr wegzudenken.

### 7.2.1 Rollpendel, zyklische Koordinaten

Wir wollen hier etwas üben, wie man üblicherweise mechanische Probleme mit Hilfe des LAGRANGE-Formalismus löst. Wir setzen zuerst holonome Zwangsbedingungen und konservative Kräfte voraus. Die Lösungsmethode besteht aus fünf Teilschritten:

- Formuliere die Zwangsbedingungen.
- Finde die verallgemeinerten Koordinaten.
- Stelle die LAGRANGE-Funktion  $L = T - V$  auf.
- Leite die LAGRANGE-Gleichungen ab und löse sie.
- Transformiere zurück auf die ursprünglichen 'anschaulichen' Koordinaten.

Der letzte Schritt ist nicht immer notwendig und auch nicht immer möglich.

Wir wollen folgende Aufgaben mit Hilfe des LAGRANGE-Formalismus lösen: Wir betrachten

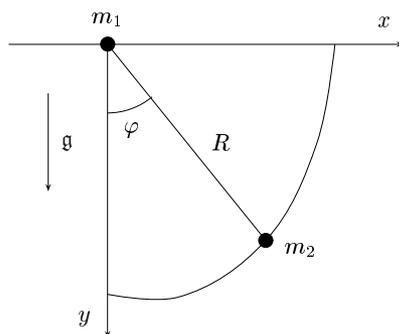


Abbildung 7.1:

ein Rollpendel der Länge  $R$ . Die Masse  $m_1$  bewege sich reibungsfrei entlang einer horizontalen Geraden. Welche Bahnen beschreiben die Massen  $m_1$  und  $m_2$  unter dem Einfluß des Schwerfeldes?

<sup>1</sup>So machen die Pfadintegrale wesentlichen Gebrauch von der LAGRANGE-Funktion.

Als Gerade wählen wir die  $x$ -Achse wie in der Abbildung (7.1) angedeutet. Es liegen vier holonom-skleronome Zwangsbedingungen vor:

$$\begin{aligned} 0 &= z_1 = z_2 \\ 0 &= y_1 = 0 \\ 0 &= (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - R^2. \end{aligned}$$

Es bleiben  $6 - 4 = 2$  Freiheitsgrade übrig. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir  $x_1$  und  $\varphi$ . Mit den Transformationsformeln

$$x_2 = x_1 + R \sin \varphi, \quad y_2 = R \cos \varphi \quad (7.25)$$

lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi),$$

und die potentielle Energie

$$V = -m_2 g R \cos \varphi.$$

Dies ergibt folgende LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (R^2 \dot{\varphi}^2 + 2R \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 R g \cos \varphi. \quad (7.26)$$

Wir sehen, daß  $L$  nicht von  $x_1$  abhängt. Dies führt uns allgemeiner auf die Definition einer *zyklischen Koordinate*:

$$q^j \text{ zyklisch} \iff \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \equiv p_j = \text{const.} \quad (7.27)$$

Für kartesische Koordinaten ist

$$\nabla_{\dot{x}_i} L = \nabla_{\dot{x}_i} T = \nabla_{\dot{x}_i} \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^2 = m_i \dot{x}_i = \mathbf{p}_i$$

der Impuls des  $i$ 'ten Teilchens. Entsprechend heißt  $p_j$  der verallgemeinerte Impuls zur Koordinate  $q^j$  oder auch der zu  $q^j$  (*kanonisch*) *konjugierte Impuls*. Es folgt also, daß der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls zeitunabhängig ist. Jede zyklische Koordinate führt automatisch auf einen Erhaltungssatz. Man sollte deshalb die verallgemeinerte Koordinaten so wählen, daß möglichst viele von ihnen zyklisch sind.

Für ein Rollpendel ist  $x_1$  zyklisch. Der erhaltene konjugierte Impuls ist

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const.}$$

Er ist gleich dem Gesamtimpuls des Systems in Richtung der  $x$ -Achse. Wir lösen nun nach der Geschwindigkeit  $\dot{x}_1$  auf,

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{M} - \mu_2 R \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{M},$$

und integrieren

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{p_1}{M} t - \mu_2 R (\sin \varphi(0) - \sin \varphi(t)) \quad (7.28)$$

gesetzt wurde. Anfänglich sei der erste Massenpunkt bei  $x_1 = 0$  und der zweite Massenpunkt hänge senkrecht nach unten. Der erste Massenpunkt bewege sich nach links und der Winkel  $\varphi$  nehme zu. Wir wählen die Anfangsbedingungen so, daß die Lösung eine einfache Form hat:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 & , & & \dot{x}_1(0) &= -\mu_2 R \omega_0 \\ \varphi(0) &= 0 & , & & \dot{\varphi}(0) &= \omega_0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Daraus folgt zunächst

$$p_1 = 0 \quad \text{und} \quad c = 0.$$

Mit diesen Anfangsbedingungen schwingt der erste Massenpunkt um seine Ruhelage,

$$x_1(t) = -\mu_2 \sin \varphi(t). \quad (7.30)$$

Mit den Transformationsformeln (7.25) folgt für den zweiten Massenpunkt

$$x_2(t) = \frac{m_1}{M} R \sin \varphi(t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = R \cos \varphi(t).$$

Wegen

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{m_1}{M} R, \quad b = R$$

bewegt sich dieser auf einer Ellipse mit der horizontalen Halbachse  $a = m_1 R/M$  und der vertikalen Halbachse  $b = R > a$ . Für  $m_2 \ll m_1$  geht dies über in die Schwingung eines Pendels mit festem Aufhängepunkt.

Wir haben das Problem noch nicht vollständig gelöst, da wir die Zeitabhängigkeit des Winkels  $\varphi$  noch nicht kennen. Wir haben aber noch eine weitere LAGRANGE-Gleichung für  $\varphi$  zur Verfügung. Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 R (R \dot{\varphi} + \dot{x}_1 \cos \varphi) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 R (R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi - \dot{x}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 R (\dot{x}_1 \dot{\varphi} + g) \sin \varphi \end{aligned}$$

lautet die entsprechende LAGRANGE-Gleichung 2. Art

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. \quad (7.31)$$

Für kleine Werte des Winkels  $\varphi$  können wir

$$\cos \varphi \sim 1 \quad \text{und} \quad \sin \varphi \sim \varphi$$

setzen, wodurch sich (7.31) zu

$$R \ddot{\varphi} + \ddot{x}_1 + g \varphi = 0$$

vereinfacht. Aus (7.30) lesen wir ab

$$\ddot{x}_1 = -\mu_2 (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \sim -\mu_2 \ddot{\varphi}.$$

Dies ergibt für den Winkel  $\varphi$  folgende linearisierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \frac{M}{m_1} \varphi \sim 0.$$

Mit den gewählten Anfangsbedingungen (7.29) ist die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega^2 = \frac{g}{R} \frac{M}{m_1}. \quad (7.32)$$

**Numerische Lösung:** Wir wollen die soeben abgeleitete Lösung der linearisierten Gleichung mit der numerischen Lösung vergleichen. Diese erhält man, indem man die nichtlineare Differentialgleichung für den Winkel,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sin \varphi}{1 - \mu_2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{g}{R} + \mu_2 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \right)$$

mit Anfangswerten  $\varphi(0)$  und  $\dot{\varphi}(0)$  löst und in

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{p_1}{M} t + \mu_2 R (\sin \varphi(0) - \sin \varphi(t))$$

einsetzt. Um die geplottete numerische und linearisierte Lösungen zu erhalten, haben wir

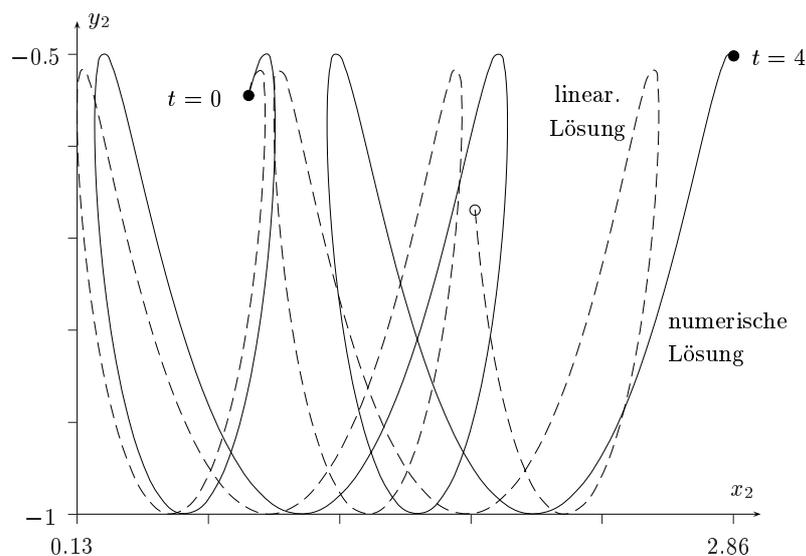


Abbildung 7.2: Die Bewegung des Massenpunktes  $m_2$  für die im Text angegebenen Parameter und Anfangsbedingungen.

die nichtlineare Differentialgleichung für den Winkel  $\varphi$  in ein System erster Ordnung umgewandelt und im File kugelpendel.sci abgespeichert:

```
function phidot=kugelpendel(t,phi)
phidot(1)=phi(2);
sinus=sin(phi(1));cosinus=cos(phi(1));
```

```

phidot(2)=-sinus/(M-m2*cosinus^2)*(m2*cosinus*phi(2)^2+g.81*M/R)
endfunction

```

Die numerische Berechnung der Bahn von  $m_2$  und deren graphische Darstellung wird von der Routine `kugelpendel.prg` geleistet:

```

getf('kugelpendel.sci');
p1=1.5; // Gesamtimpuls des Systems
x10=[0,0]; // Anfangsort/geschwindigkeit von m1: [x10,dotx10]
phio=[1;1]; // Anfangswinkel/geschwindigkeit von m2: [phio,dotphio]
m2=1;M=3; // Massen in kg
R=1; // Länge des Pendelstabes in m
omega=sqrt(g.81*M/((M-m2)*R)); // Frequenz der linearisierten Lösung
t=linspace(0,4,100);
// Lösung für phi in linearer Näherung
philin=phio(1)*cos(omega*t)+phio(2)/omega*sin(omega*t);
// numerische Lösung für phi
phi=ode(phio,0,t,kugelpendel);
x1=x10(1)+p1/M*t+m2*R/M*(sin(phio(1))-sin(phi(1,:))); // numerisch
x1l=x10(1)+p1/M*t+m2*R/M*(sin(phio(1))-sin(philin)); // linearisiert
// Bewegung des zweiten Körpers
x2=x1+R*sin(phi(1,:));
y2=-R*cos(phi(1,:));
x2l=x1l+R*sin(philin);
y2l=-R*cos(philin);
xbasc();
plot2d([x2',x2l'],[y2',y2l']);

```

In der obigen Figur (7.2) haben wir also folgende Parameter (in MKS-Einheiten) gewählt:

$$p_1 = 1.5, \quad m_2 = 2, \quad M = 3 \quad \text{und} \quad R = 1.$$

Die anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten sind

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 1.$$

Für die gewählten Anfangsbedingungen schwingt  $\varphi(t)$  zwischen 1 und  $-1$  hin und her. Da die Linearisierung der Differentialgleichung nur für  $\varphi \ll 1$  begründet werden kann, ist es doch bemerkenswert, dass die Lösung der linearisierten Gleichung für frühe Zeiten der numerischen Lösung relativ genau folgt.

## 7.2.2 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Im LAGRANGESchen Formalismus ist es relativ einfach, einen Zusammenhang herzustellen zwischen der Struktur des Euklidischen Raumes und der Zeit einerseits und den erhaltenen Größen andererseits. Diesen werden wir nun systematisch ableiten.

Wir nennen ein System *zeitlich homogen*, wenn sich seine Eigenschaften als invariant gegenüber Zeitverschiebungen erweisen. Die Ergebnisse von Messungen sind dann unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. Dies bedeutet aber, daß die LAGRANGE-Funktion  $L$  des Systems

nicht explizit von der Zeit abhängen kann. Wir werden sehen, daß die Invarianz bezüglich einer Verschiebung des Zeitursprungs,

$$L(t) = L(t + \tau) \implies \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (7.33)$$

auf eine Erhaltungsgröße führt, die mit der Energie des Systems identifiziert werden kann. Wegen  $\partial L / \partial t = 0$  hat man nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^j} \ddot{q}^j \right) \stackrel{(7.24)}{=} \sum_j \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^j} \ddot{q}^j \right\} \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j \right) = \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Definieren wir die Funktion

$$H(q, \dot{q}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L \quad (7.35)$$

so folgt für Systeme, deren LAGRANGE-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, die zeitliche Konstanz dieser Funktion,

$$H(q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) = \text{const.} \quad (7.36)$$

Sei nun  $L = T - V$ , mit  $T$  homogen quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Wir erinnern daran, daß  $F(x_1, \dots, x_n)$  homogen vom Grade  $m$  heißt, wenn

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \dots, x_n) \quad (7.37)$$

gilt. Dann gilt der EULERSche Satz

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} x_j = mF, \quad (7.38)$$

welcher leicht aus (7.37) folgt, wenn man diese Gleichung nach  $\lambda$  ableitet und dann  $\lambda = 1$  setzt. Sei ferner das Potential  $V$  unabhängig von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}^j$ . Dann ist die zeitunabhängige Funktion  $H$  in (7.35) gleich

$$H = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} (T - V) \dot{q}^j - T + V = T + V = E, \quad (7.39)$$

also die *Energie* des Systems. In diesem Fall ist (7.36) der *Energiesatz*.

### 7.3 Kreisel im Lagrange Formalismus

Wenn ein Kreisel nicht frei ist, empfiehlt sich der Übergang von den EULERSchen zu den LAGRANGESchen Gleichungen. Naheliegende verallgemeinerte Koordinaten sind die Eulerschen Winkel. Wählen wir das körperfeste kartesische System  $\epsilon'_a$  in Richtung der Hauptachsen,

dann schreibt sich wegen (5.17) und (5.13) die kinetische Energie des unsymmetrischen Kreisels gemäß

$$\begin{aligned}
T &= \frac{A}{2}\omega_1'^2 + \frac{B}{2}\omega_2'^2 + \frac{C}{2}\omega_3'^2 \\
&= \frac{A}{2}(\sin\psi \sin\vartheta\dot{\varphi} + \cos\psi\dot{\vartheta})^2 + \frac{B}{2}(\cos\psi \sin\vartheta\dot{\varphi} - \sin\psi\dot{\vartheta})^2 \\
&\quad + \frac{C}{2}(\cos\vartheta\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2.
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Dieser Ausdruck ist homogen quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten. Für eine Potentialkraft mit Potential  $V(\varphi, \vartheta, \psi)$  führt die LAGRANGE-Funktion  $L = T - V$  auf die LAGRANGE-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= Q_\vartheta \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_\psi
\end{aligned} \tag{7.41}$$

mit den verallgemeinerten Kräften

$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = M'_\varphi, \quad Q_\vartheta = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = M'_\vartheta, \quad Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = M'_\psi. \tag{7.42}$$

Diese sind die Komponenten des Drehmoments um die raumfeste 3-Achse, die Knotenlinie und die körperfeste 3-Achse. Die Energie  $E = T + V$  des Kreisels ist eine Konstante der Bewegung.

In welcher Beziehung stehen die LAGRANGE-Gleichungen zu den EULER-Gleichungen? Betrachte die dritte LAGRANGE-Gleichung. Wegen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = C\omega_3' \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = A\omega_1'\omega_2' - B\omega_2'\omega_1'$$

ist die LAGRANGE-Gleichung für  $\psi$  identisch zur dritten EULER-Gleichung

$$C\dot{\omega}_3' - (A - B)\omega_1'\omega_2' = M'_\psi.$$

Die erste und die zweite EULER-Gleichung erhält man ebenfalls, allerdings nicht unmittelbar als LAGRANGE-Gleichungen für  $\varphi$  und  $\vartheta$ , weil diese die 'falschen'  $\mathfrak{M}$ -Komponenten haben.

Für den *freien unsymmetrischen* Kreisel ist die kinetische Energie gleich der LAGRANGE-Funktion,  $T = L$ , und entsprechend ist der Winkel  $\varphi$  eine *zyklische Koordinate*. Der zugehörige zeitlich erhaltene konjugierte Impuls

$$\begin{aligned}
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sin\psi \sin\vartheta A\omega_1' + \cos\psi \sin\vartheta B\omega_2' + \cos\vartheta C\omega_3' \\
&= R_{31}L_1' + R_{32}L_2' + R_{33}L_3' = L_3
\end{aligned}$$

ist gleich dem Drehimpuls um die raumfeste 3-Achse.

### 7.3.1 Schwere symmetrische Kreisel II

Für symmetrische Kreisel vereinfacht sich die kinetische Energie der Rotation (7.40) zu

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2. \quad (7.43)$$

Im Abschnitt (5.6) haben wir die potentielle Energie des gestützten symmetrischen Kreisels im Schwerfeld berechnet. Damit ergibt sich folgende LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 - Mgs \cos \vartheta, \quad (7.44)$$

wobei  $A, A, C$  die Hauptträgheitsmomente des symmetrischen Kreisels bezüglich des ruhenden Stützpunktes sind. Offensichtlich sind  $\varphi$  und  $\psi$  zyklische Koordinaten. Die entsprechenden zeitlich konstanten konjugierten Impulse sind

$$p_\psi = C(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) \equiv L'_3 \quad \text{und} \quad p_\varphi = A \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + L'_3 \cos \vartheta \equiv L_3. \quad (7.45)$$

Sie sind gleich den erhaltenden Drehimpulsen um die Figurenachse und die 3-Achse. Da die LAGRANGE-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt und da  $T$  homogen-quadratisch in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten ist, ist nach (7.36) die *Energie*

$$E = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + Mgs \cos \vartheta, \quad (7.46)$$

eine Konstante der Bewegung. Mit (7.45) kann man  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$  zu Gunsten von  $L_3$  und  $L'_3$  aus der Energie eliminieren,

$$E = \frac{A}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_3 - \cos \vartheta L'_3)^2}{2A \sin^2 \vartheta} + \frac{L'_3{}^2}{2C} + Mgs \cos \vartheta \quad (7.47)$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $\vartheta$ . Führt man die Variable

$$u = \cos \vartheta$$

ein, so erhält man für  $u(t)$  die Differentialgleichung

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad (7.48)$$

$$f(u) = \frac{2}{A} \left( E - \frac{L'_3{}^2}{2C} - Mgsu \right) (1 - u^2) - \left( \frac{L_3 - L'_3 u}{A} \right)^2. \quad (7.49)$$

Das kubische Polynom  $f(u)$  ist negativ für  $u = \pm 1$  und positiv für  $u \rightarrow \infty$ . Die Variable  $u$  liegt definitionsgemäß im Intervall  $[-1, 1]$  und deshalb muß das kubische Polynom  $f(u)$  in diesem Intervall positive Werte annehmen, damit (7.48) eine reelle Lösung hat. Das Polynom hat daher zwei Nullstellen  $u_1 \leq u_2$  in diesem Intervall und die Bewegung ist auf den Bereich  $u_1 \leq u \leq u_2$  beschränkt. Die dritte Nullstelle von  $f$  ist ebenfalls reell und größer als 1, siehe Abbildung (7.3).

Die Lösung ist als elliptisches Integral darstellbar,

$$t = \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \quad (7.50)$$

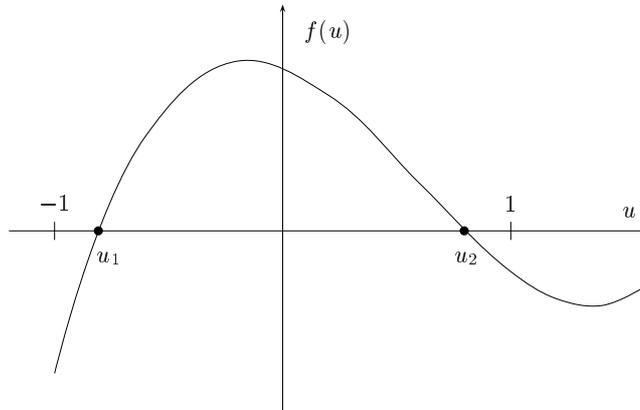


Abbildung 7.3: Das kubische Polynom (7.49).

Die Figurenachse pendelt zwischen den Werten  $\vartheta_1 = \arccos u_1$  und  $\vartheta_2 = \arccos u_2$  hin und her und  $\vartheta(t)$  beschreibt die *Nutation* des schweren Kreisels, d.h. das 'Nicken' der Figuren- achse gegenüber der raumfesten  $\mathbf{e}_3$ -Achse.

Die Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie ergibt sich nach (7.45) zu

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3 - L'_3 \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}. \quad (7.51)$$

Sie ändert bei der Bewegung ihr Vorzeichen, wenn  $u_3 = L_3/L'_3 = \cos \vartheta_3$  im Bereich  $u_1 < u_3 < u_2$  liegt. Der Durchstoßpunkt der Figurenachse beschreibt dann auf der Einheitskugel eine Kurve der in Abbildung (7.4c) skizzierten Art. Diese Kurve wird der *Locus* der Figu- renachse genannt. Liegt aber  $\vartheta_3$  nicht zwischen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ , dann ergibt sich eine Kurve wie

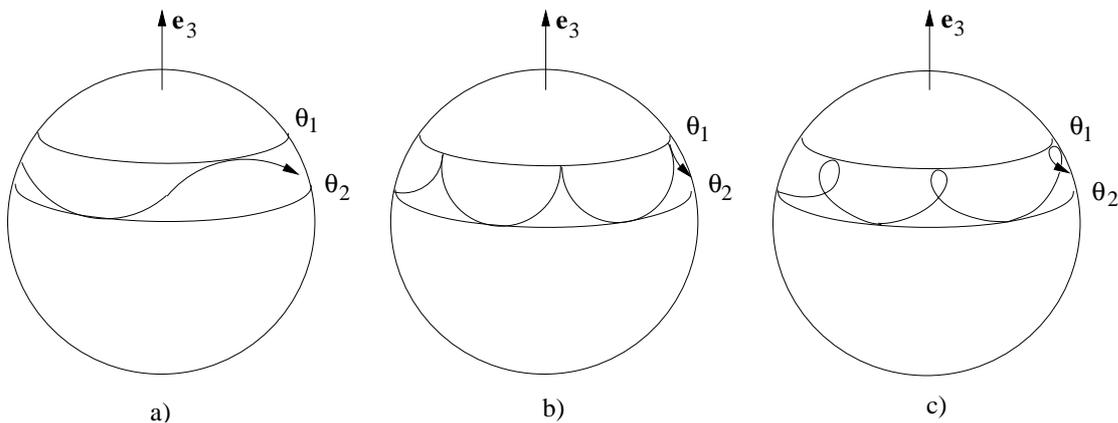


Abbildung 7.4: Der Locus der Figurenachse des schweren symmetrischen Kreisels.

in Abbildung (7.4a). Die Bewegung der Figurenachse des schweren Kreisels in  $\varphi$ -Richtung bezeichnet man als *Präzession*. Im allgemeinen hat man eine Überlagerung von Präzession und Nutation. Wählt man die Bedingungen so, daß  $u_1 = u_2$  gilt, dann ist  $\vartheta = \text{konstant}$  und  $\dot{\varphi} = \text{konstant}$ . Diese nutationsfreie Bewegung des Kreisels bezeichnet man als *reguläre*

*Präzession.* Die reguläre Präzession ist beim schweren Kreisel (im Gegensatz zum Fall des kräftefreien symmetrischen Kreisel) ein *partikuläre* Bewegungsform desselben.

Ähnlich wie für den unsymmetrischen kräftefreien Kreisel, kann die Lösung für den symmetrischen kräftefreien durch elliptische Funktionen ausgedrückt werden. Für ein weitergehendes Studium von Kreiseln verweise ich auf die Literatur [9].

## 7.4 Eichtransformationen

Wir nehmen an es gäbe ein verallgemeinertes Potential  $V = V(t, q, \dot{q})$  als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und *Geschwindigkeiten*, so daß sich die verallgemeinerten Kräfte (7.8) wie folgt schreiben lassen,

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.52)$$

Dann folgt aus (7.19)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - Q_j \right) \delta q^j &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial V}{\partial q^j} \right) \delta q^j \\ &= \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \delta q^j = 0 \end{aligned}$$

mit der LAGRANGE-Funktion

$$L(t, q, \dot{q}) = T(t, q, \dot{q}) - V(t, q, \dot{q}). \quad (7.53)$$

Für holonome Zwangsbedingungen sind die virtuellen Verrückungen  $\delta q^j$  beliebig und es folgen die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0. \quad (7.54)$$

Das verallgemeinerte Potential kann nicht beliebig gewählt werden. Um dies einzusehen, wenden wir die Kettenregel auf (7.52) an,

$$Q_j = \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q^k \partial \dot{q}^j} \dot{q}^k + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}^j} - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (7.55)$$

Da die verallgemeinerten Kräfte (7.8) nicht von den Beschleunigungen abhängen sollen, darf das Potential  $V$  höchstens linear von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}^j$  abhängen. Es muß deshalb die Form

$$V(t, q, \dot{q}) = U(t, q) + \sum_{k=1}^f B_k(t, q) \dot{q}^k \quad (7.56)$$

haben. Dies führt auf verallgemeinerten Kräfte der Gestalt

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q^j} + \frac{\partial B_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial B_j}{\partial q^k} - \frac{\partial B_k}{\partial q^j} \right) \dot{q}^k, \quad (7.57)$$

die höchstens linear von den Geschwindigkeiten abhängen.

Wir betrachten nun den einfachen Fall eines Punktteilchens, das keine Nebenbedingungen erfüllt, so daß die kartesischen Koordinaten als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden dürfen. Dann gehen die verallgemeinerten Kräfte (7.57) über in Komponenten der Kraft bezüglich einer kartesischen Basis,

$$F_a = -\frac{\partial U}{\partial x_a} + \frac{\partial B_a}{\partial t} + \sum_{b=1}^3 \left( \frac{\partial B_a}{\partial x_b} - \frac{\partial B_b}{\partial x_a} \right) \dot{x}_b. \quad (7.58)$$

Für  $B_a = 0$  ist dies offensichtlich eine Potentialkraft.

Wir betrachten nun die LORENTZ-Kraft auf eine bewegte Ladung  $q$  im elektromagnetischen Feld im SI-Einheitensystem,

$$\mathfrak{F}_a = q\mathfrak{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathfrak{B} \implies F_a = qE_a + q\epsilon_{abc}\dot{x}_b B_c. \quad (7.59)$$

Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  lassen sich aus dem skalaren Potential  $\varphi$  und dem Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  gewinnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} &\iff E_a = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t} \\ \mathfrak{B} = \nabla \wedge \mathfrak{A} &\iff B_a = \epsilon_{abc} \frac{\partial A_c}{\partial x_b}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Wir setzen dies in die Formel (7.59) für die Komponenten der LORENTZ-Kraft ein,

$$F_a = -q\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} - q\frac{\partial A_a}{\partial t} + q\left(\frac{\partial A_b}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial x_b}\right)\dot{x}_b. \quad (7.61)$$

Der Vergleich mit (7.58) führt auf die Identifikationen

$$U = q\varphi \quad \text{und} \quad B_a = -qA_a.$$

Demnach lautet die LAGRANGE-Funktion eines geladenen (nichtrelativistischen) Teilchens im elektromagnetischen Feld

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(t, \mathbf{r}) + q\mathfrak{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (7.62)$$

Es stellt sich nun die Frage, ob verschiedene LAGRANGE-Funktionen zu denselben Bewegungsgleichungen führen können, oder ob  $L$  eindeutig bestimmt ist. Wir werden nun zeigen, daß es verschiedene LAGRANGE-Funktionen gibt, die zu denselben Bewegungsgleichungen Anlass geben. Dazu untersuchen wir die Transformation

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \frac{dF(t, q)}{dt}, \quad (7.63)$$

wobei  $F = F(t, q)$  eine beliebige Funktion der Zeit und Koordinaten darstellt, so daß

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \sum_{k=1}^f \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7.64)$$

gilt. Die partiellen Ableitungen der neuen LAGRANGE-Funktion nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und Koordinaten sind

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial F}{\partial q^j} \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial q^j} = \frac{\partial L}{\partial q^j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t},$$

und führen schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial q^j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^j} \dot{q}^k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^j} \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k - \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial t} \stackrel{(7.54)}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Es wurde benutzt, daß man die zweiten partiellen Ableitungen bei zweimal differenzierbaren Funktionen vertauschen darf. Man kann also die LAGRANGE-Funktion der mechanischen *Eichtransformation* (7.63) unterziehen, ohne daß sich die Bewegungsgleichungen ändern. Demnach sind alle durch (7.63) miteinander verbundenen LAGRANGE-Funktionen als gleichberechtigt anzusehen. Man nennt die Abbildung  $L \rightarrow L'$  eine *Eichtransformation* mit Eichfunktion  $F$ . Oft sagt man auch,  $L$  und  $L'$  seien *eich-äquivalente* LAGRANGE-Funktionen.

So ist zum Beispiel die LAGRANGE-Funktion  $L$  in (7.62) eich-äquivalent zu

$$\begin{aligned} L'(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi'(t, \mathbf{r}) + q\mathfrak{A}'(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad \text{mit} \\ \varphi' &= \varphi + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \nabla \lambda, \end{aligned} \quad (7.66)$$

wobei wir  $F = -q\lambda$  gesetzt haben. Die eich-transformierten Potentiale  $\varphi'$  und  $\mathfrak{A}'$  geben Anlaß zu derselben LORENTZ-Gleichung wie die ursprünglichen Potentiale  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$ . Dies sollte sie nicht erstaunen, da  $(\varphi, \mathfrak{A})$  und  $(\varphi', \mathfrak{A}')$  zu demselben elektrischen Feld und zu derselben magnetischen Induktion führen.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß neben einer Standard-LAGRANGE-Funktion  $L$  weitere LAGRANGE-Funktionen existieren können, die nicht eich-äquivalent zu  $L$  sind, aber auf dieselben Bewegungsgleichungen führen. So erhält man die einfache Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (7.67)$$

sowohl aus der Standard-LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - x^2)$$

als auch aus folgenden LAGRANGE-Funktionen:

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= 2 \frac{\dot{x}}{x} \arctan \frac{\dot{x}}{x} - \log(x^2 + x^2) \\ \hat{L}_2 &= \frac{1}{3} \dot{x}^4 + 2\dot{x}^2 x^2 - x^4 \\ \hat{L}_3 &= \frac{1}{x^2} (\dot{x}^2 + x^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Diese sind nicht eich-äquivalent zu  $L$ . Es gibt keine Funktionen  $F_i(t, q)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , für die  $\hat{L}_i = L + \dot{F}_i$  gilt. Zum Beispiel führt  $\hat{L}_2$  auf die Bewegungsgleichung

$$f(x, \dot{x})(\ddot{x} + x) = 0, \quad f(x, \dot{x}) = 4(x^2 + \dot{x}^2) \geq 0,$$

welche die ursprüngliche Gleichung (7.67) impliziert.

## 7.5 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen in NEWTONschen Mechanik sind unter *Punkttransformationen*

$$q^j \longrightarrow Q^j = Q^j(t, q) \quad \text{mit} \quad \det \left( \frac{\partial Q^j}{\partial q^k} \right) \neq 0, \quad (7.68)$$

nicht forminvariant. So lauten für die Zentralkraftbewegung die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten nicht

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad mr^2\ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (\text{falsch!}),$$

wie man es bei Forminvarianz erwarten würde, sondern

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0,$$

siehe (2.105). Die LAGRANGE-Gleichungen sind dagegen *forminvariant*, behalten also ihre Form unter Punkttransformationen bei. Um dies zu beweisen, gehen wir von den LAGRANGE-Gleichungen in den alten Koordinaten aus und rechnen sie in die neuen Koordinaten um. Mit

$$\dot{q}^j = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q^j}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{Q}^k} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^k}. \quad (7.69)$$

Die LAGRANGE-Funktion in den neuen Koordinaten  $Q$  erhalten wir durch Einsetzen der inversen Punkttransformation  $q^j = q^j(t, Q)$  in die alte LAGRANGE-Funktion

$$L'(t, Q, \dot{Q}) = L[q(t, Q), \dot{q}(t, Q, \dot{Q}), t]. \quad (7.70)$$

Demnach ändern LAGRANGE-Funktionen zwar ihre Form, nicht aber ihren Wert. Mit den Umrechnungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial Q^j} &= \sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^j} \right] \\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^j} \stackrel{(7.69)}{=} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} &= \sum_{k=1}^f \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^j} \right], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die schon früher bewiesene Tatsache benutzten, daß die Zeitableitung von  $\partial q^k / \partial Q^j$  gleich der partiellen Ableitung von  $q^k$  nach  $Q^j$  ist, folgt dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial Q^j} = \sum_{k=1}^f \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right] \frac{\partial q^k}{\partial Q^j},$$

oder, da für eine Punkttransformation die Ableitungsmatrix  $(\partial q^k / \partial Q^j)$  invertierbar ist, daß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^j} - \frac{\partial L'}{\partial Q^j} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad (7.71)$$

ist. Wenn die LAGRANGE-Gleichungen in einem Koordinatensystem erfüllt sind, so sind sie es auch in jedem anderen. Die Gleichungen sind unter Punkttransformationen *forminvariant*. Wegen der im Allgemeinen verschiedenen Gestalt der LAGRANGE-Funktionen ist das explizite Aussehen der Bewegungsgleichungen natürlich von den Koordinaten abhängig. Die Forminvarianz ist sehr nützlich, da sie oft eine mühelose Aufstellung der Bewegungsgleichungen in beliebigen (zulässigen) Koordinatensystemen, zum Beispiel auch in beschleunigten Bezugssystemen, ermöglicht.

## 7.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem

Im Abschnitt (7.2.1) haben wir bereits gesehen, daß die kanonisch konjugierten Impulse

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \quad (7.72)$$

von zyklischen Koordinaten  $q^j$  Erhaltungsgrößen sind. Es folgt unmittelbar, daß Symmetrien Erhaltungssätze nach sich ziehen: Wenn ein mechanisches System unter der Verschiebung einer Koordinate  $q^j$  invariant ist (eine Symmetrie aufweist), so kann diese Koordinate nicht in der Lagrangefunktion auftreten und ist daher zyklisch. Der zugehörige Impuls  $p_j$  bildet dann eine Erhaltungsgröße. Somit liefern Symmetrien zyklische Koordinaten und damit die Erhaltung der entsprechenden Impulse. Die Ausarbeitung dieser Beobachtung ist der Inhalt des Theorems von EMMY NOETHER<sup>2</sup>, das wir jetzt besprechen werden.

Wie soeben diskutiert, sind Koordinaten, deren Verschiebung

$$q^j \longrightarrow q'^j = q^j + \alpha, \quad (7.73)$$

die LAGRANGE-Funktion nicht ändern,

$$\begin{aligned} &L(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \alpha, q^{j+1}, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^i, \dots, \dot{q}^f) \\ &= L(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^i, \dots, \dot{q}^f) \end{aligned}$$

zyklisch, und die entsprechenden Impulse sind Erhaltungsgrößen. Man sagt dann,  $L$  sei *translationsinvariant* bezüglich der verallgemeinerten Richtung  $q^j$ , oder auch  $L$  sein *invariant* bezüglich der Transformation

$$q'^j = q^j + \alpha, \quad q'^k = q^k \quad \text{für } k \neq j.$$

Man kommt so ganz natürlich auf die Idee, daß allgemein das Auftreten von Konstanten der Bewegung mit Transformationseigenschaften von  $L$  zusammenhängt. In der Tat ist es EMMY NOETHER gelungen, einen solchen allgemeinen Zusammenhang herzustellen. Um diesen einzusehen, untersuchen wir Koordinatentransformationen

$$q^j \longrightarrow q'^j = q'^j(t, q, \alpha), \quad j = 1, \dots, f, \quad (7.74)$$

die invertierbar

$$q^j = q^j(t, q', \alpha) \quad (7.75)$$

---

<sup>2</sup>Genau genommen, gibt es zwei Theoreme von E. Noether, welche sich auf Symmetrien beziehen.

und in dem kontinuierlichen Parameter  $\alpha$  stetig differenzierbar sein müssen. Für  $\alpha = 0$  sollen die neuen Koordinaten  $q'$  in die alten übergehen,

$$q'^j(t, q, \alpha = 0) = q^j. \quad (7.76)$$

Beispiele für solche Koordinatentransformationen sind die Galilei-Transformationen. Wir ersetzen die alten Koordinaten durch die neuen und finden die LAGRANGE-Funktion in den neuen Koordinaten,

$$L(t, q, \dot{q}) = L\left[t, q(t, q', \alpha), \frac{d}{dt}q(t, q', \alpha)\right] \equiv L'(t, q', \dot{q}', \alpha), \quad (7.77)$$

Wir berechnen die partielle Ableitung von  $L'$  nach dem Parameter  $\alpha$ , wobei die Variablen  $q'^j, \dot{q}'^j$  festgehalten werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{d}{dt} q^j(t, q', \alpha) \right\} \right] \\ &\stackrel{(7.54)}{=} \sum_{j=1}^f \left[ \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right\} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} q^j(t, q', \alpha) \right\} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Diese Identität gilt für alle Werte von  $\alpha$ . Sie vereinfacht sich für  $\alpha = 0$ , da wegen (7.76) dann die neuen Koordinaten gleich den alten sind.

Interessant sind für uns Koordinatentransformationen, welche die LAGRANGE-Funktion invariant lassen

$$L(t, q, \dot{q}) \stackrel{(7.77)}{=} L'(t, q', \dot{q}', \alpha) \stackrel{\text{Invarianz}}{=} L(t, q', \dot{q}') \quad (7.79)$$

Wegen der zweiten Gleichung hängt  $L'$  bei festgehaltenen  $q'$  und  $\dot{q}'$  nicht von  $\alpha$  ab. Dies darf man nicht aus der ersten Gleichung schließen: Ändern wir  $\alpha$  bei festgehaltenen  $q'$  und  $\dot{q}'$ , so ändern sich im allgemeinen die alten Koordinaten  $q^j$  und alten Geschwindigkeiten  $\dot{q}^j$  und damit  $L(t, q, \dot{q})$ . Aber wegen der Invarianz von  $L$  verschwindet die linke Seite in (7.78) und es folgt sofort das bedeutende

**Satz von Emmy Noether:** *Die Funktion*

$$I(t, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (7.80)$$

*ist eine Erhaltungsgröße, wenn die LAGRANGE-Funktion unter der kontinuierlichen, stetig differenzierbaren Koordinatentransformation (7.74) invariant ist. Zu jeder Transformation (7.74), welche  $L$  nicht ändert, gehört eine Konstante der Bewegung.*

Der zu einer zyklischen Koordinate gehörende Erhaltungssatz folgt sofort aus (7.80) mit  $q'^j = q^j + \alpha$ .

**Verallgemeinerungen:** Man erhält auch eine Erhaltungsgröße, wenn die LAGRANGE-Funktion  $L$  unter den Transformationen (7.74) in eich-äquivalente LAGRANGE-Funktionen übergeht,

$$L'(t, q', \dot{q}', \alpha) = L\left[t, q(t, q', \alpha), \frac{d}{dt}q(t, q', \alpha)\right] = L(t, q', \dot{q}') + \frac{d}{dt}F(t, q', \alpha). \quad (7.81)$$

In dieser allgemeineren Situation lautet die Erhaltungsgröße

$$I = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial q^j(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(t, q', \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}. \quad (7.82)$$

Die Gleichungen (7.80) sind ein Spezialfall dieser Gleichung.

### 7.6.1 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Man nennt ein System *räumlich isotrop*, wenn sich die Eigenschaften des Systems bei beliebigen Drehungen nicht ändern. Die LAGRANGE-Funktion eines räumlich isotropen Systems sollte invariant sein unter gleichzeitiger Drehung der Positionen aller Teilchen. Zum Beispiel ist die LAGRANGE-Funktion

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(t, r), \quad r = |\mathbf{r}| \quad (7.83)$$

für ein Partikel in einem rotationssymmetrischen Potential invariant unter Drehungen um den Ursprung,

$$\mathbf{r} = R_\alpha \mathbf{r}', \quad R = R_\alpha \in SO(3), \quad (7.84)$$

wie man leicht sieht,

$$L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L'(t, \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', \alpha) \equiv L\left\{t, R_\alpha \mathbf{r}', \frac{d}{dt}(R_\alpha \mathbf{r}')\right\} = L(t, \mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}').$$

Hier könnte man zum Beispiel für  $\alpha$  einen der drei EULER-Winkel wählen. Nach dem NOETHER-Theorem ist

$$I = m \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (R_\alpha \mathbf{r}') \Big|_{\alpha=0}$$

zeitunabhängig. Für  $R_\alpha$  wählen wir nun eine Drehung um die Achse in Richtung von  $\boldsymbol{\epsilon}$  mit Winkel  $\alpha$ . Dann ist<sup>3</sup>

$$I = \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \wedge \mathbf{r}) = \boldsymbol{\epsilon} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathcal{L}. \quad (7.85)$$

Ist  $L$  invariant unter Drehungen um beliebige Achsen, dann sind alle  $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathcal{L}$  Erhaltungsgrößen, das heißt alle Komponenten des Drehimpulses. Insbesondere sind für die drehinvariante LAGRANGE-Funktion (7.72) alle Komponenten des Drehimpulses,

$$L_1, L_2, L_3 \quad (7.86)$$

Konstanten der Bewegung.

---

<sup>3</sup> setze  $\mathbf{w} = \boldsymbol{\epsilon}$  in (5.10)

Wie man leicht beweist, ist für ein  $N$ -Körpersystem die LAGRANGE-Funktion

$$L = \sum \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i < j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (7.87)$$

ebenfalls drehinvariant, also invariant unter

$$\mathbf{r}_i = R_\alpha \mathbf{r}'_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.88)$$

d.h. unter gleichzeitiger Drehung aller  $N$  Teilchen. Die zugehörige Erhaltungsgröße findet man ganz analog wie für ein Punktteilchen. Es ist der gesamte Drehimpuls,

$$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^N \mathfrak{L}_i, \quad \mathfrak{L}_i = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i. \quad (7.89)$$

Ist die LAGRANGE-Funktion nur invariant unter Rotationen um die  $z$ -Achse, dann ist  $L_3$  eine Konstante der Bewegung, nicht aber  $L_1$  oder  $L_2$ . Dies erklärt zum Beispiel, warum für den schweren symmetrischen Kreisel die Drehimpulse  $L_1$  und  $L_2$  nicht erhalten sind. Dagegen wird auch für den schweren *unsymmetrischen* Kreisel die Komponente  $L_3$  des Drehimpulses in Richtung der Schwerebeschleunigung eine erhaltene Größe sein.

### 7.6.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung

Ein System heißt *räumlich homogen*, wenn seine Eigenschaften unabhängig vom Ort sind, d.h., wenn eine Verschiebung des gesamten Systems die Meßergebnisse nicht ändert. Gleiche Messungen an identischen Systemen im Abbeanum und Max-Wien-Platz sollten gleiche Resultate ergeben. Das ist z.B. dann der Fall, wenn die auftretenden Kräfte nur von den Teilchenabständen abhängen. Zum Beispiel ist die LAGRANGE-Funktion (7.87) invariant unter gleichzeitiger Verschiebung aller  $N$  Teilchen um einen konstanten Vektor,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{a}. \quad (7.90)$$

Wählen wir für  $\mathbf{a}$  eine Verschiebung um die Länge  $\alpha$  in Richtung von  $\mathbf{e}$ , so ist die zugehörige Erhaltungsgröße in (7.80) gleich

$$I = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{r} + \alpha \mathbf{e}) \Big|_{\alpha=0} = \mathbf{e} \cdot \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{e} \cdot \mathfrak{P}. \quad (7.91)$$

Damit sind alle drei Komponenten des gesamten Impulses  $\mathfrak{P}$ ,

$$P_1, P_2, P_3 \quad (7.92)$$

erhaltene Größen. Ist das System zum Beispiel nur invariant bezüglich Translationen in die  $x$ -Richtung, dann ist nur der Impuls in diese Richtung eine Konstante der Bewegung. Dies ist der Grund dafür, daß beim Rollpendel nur der Impuls in die  $x$ -Richtung erhalten ist.

Die erstaunlichen Beziehungen zwischen Symmetrien der Raumzeit und Erhaltungssätzen

<b>Homogenität der Zeit</b>	$\iff$	<b>Energieerhaltungssatz</b>
<b>Homogenität des Raumes</b>	$\iff$	<b>Impulserhaltungssatz</b>
<b>Isotropie des Raumes</b>	$\iff$	<b>Drehimpulserhaltungssatz</b>

sind keinesfalls auf die nichtrelativistische Mechanik beschränkt. Sie gelten zum Beispiel auch in relativistischen (Quanten)Feldtheorien.