Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Wintersemester 2018/19

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 9

Aufgabe 28: Mikrokanonische vs. kanonische Gesamtheit 1+2+2 = 5 Punkte

Die kanonische Zustandssumme Z_β lässt sich als Laplace-Transformierte der mikrokanonischen Zustandsdichte (=Zustandssumme) gemäß

$$Z_\beta = \int_{E_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}E\, Z_E\, \mathrm{e}^{-\beta E}, \qquad Z_E = \frac{1}{h^{3N} N!} \int_\Gamma \delta\big(E - H(x)\big) \prod_i \mathrm{d}^3 x_i\, \mathrm{d}^3 p_i$$

auffassen.

1. Begründen Sie diese Beziehung.
2. Bestimmen Sie damit die kanonische Zustandssumme des idealen Gases.
   Hinweis: Die Gammafunktion ist definiert als $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ und erfüllt $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$.
3. Betrachten Sie eine kanonische Zustandssumme der Form

   $$Z_\beta = \mathrm{e}^{-\beta E_{\min}} \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^{3N} .$$

   Bestimmen Sie die zugehörige Zustandsdichte, indem Sie die inverse Laplace-Transformation als Kurvenintegral in der komplexen β-Ebene gemäß der Formel

   $$\frac{\mathrm{d}\Omega_E}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\beta\, Z_\beta\, \mathrm{e}^{\beta E}$$

   berechnen. Hierbei ist b eine reelle Zahl, die so gewählt werden muss, dass der Integrationsweg 'rechts' aller vorhandenen Singularitäten verläuft.

Aufgabe 29: Ideales Gas in eindimensionalen Kasten 5 Punkte

Betrachten Sie ein System von $N \gg 1$ wechselwirkungsfreien ununterscheidbaren Teilchen der Masse m, die sich nur eindimensional längs der x-Achse in dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

bewegen können. Geben Sie mit Hilfe der klassischen mikrokanonischen Verteilung die Entropie S, die freie Energie F und das chemische Potential μ in den Variablen T, L und N an und berechnen Sie die kalorische sowie die thermische Zustandsgleichung. Nutzen Sie dabei die Stirling-Formel, um Ausdrücke der Form $\ln N!$ zu approximieren.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Mittwoch, den 19.12.2018