Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Wintersemester 2018/19

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 8

Aufgabe 25: Hamiltonsche Vielteilchensysteme 1.5+2+1+1+1.5 = 7 Punkte

Wir betrachten f eindimensionale harmonische Oszillatoren mit

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} m_k \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{f} m_k \omega_k^2 q_k^2$$

1. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion, den Phasenraum und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
2. Benutzen Sie Einheiten mit $m_k = \omega_k = 1$ und, wo möglich, das Tupel x der Koordinaten im Phasenraum anstelle von (q_k, p_k). Charakterisieren Sie die Energieflächen Γ_E. Berechnen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld und zeigen Sie, dass X_H quellenfrei und tangential zu seiner Energiefläche ist.
   Hinweis: Das Vektorfeld X_H ist tangential, wenn es senkrecht zum Normalenfeld steht (Γ_E ist eine Niveaufläche).
3. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.
   Hinweis: Wenn Sie mit Koordinaten x im Phasenraum arbeiten, wird die Lösung einfacher.
4. Zur Zeit $t = 0$ sei das System im gemischten Zustand mit
   $$\varrho(0, x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$
   Was ist der Zustand zu späteren Zeiten?
   Wenn man die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen kennt, kann man die Lösung der Liouville-Gleichung sofort hinschreiben (siehe Vorlesung).
5. Warum ist ρ zeitunabhängig? Prüfen Sie nach, dass ϱ die Liouville-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 26: Barometrische Höhenformel 3 Punkte

N Teilchen der Masse m in einem idealen Gas befinden sich unter dem Einfluss des Gravitationspotentials mgz in einem (unendlich hoch gedachten und senkrecht stehenden) Zylinder. Die potentielle Energie eines Teilchens sei $E = mgz$, wobei z die Höhe über dem Zylinderboden ($z = 0$) sei. Bestimmen Sie aus der Boltzmann-Verteilung die barometrische Höhenformel, die angibt wie viele Teilchen $n(z)dz$ sich in der Höhe $z \ldots z + \mathrm{d}z$ befinden und wie der Druck mit z abnimmt.
Hinweis: In der Vorlesung wurde die Boltzmannverteilung

$$f(\boldsymbol{x}, \mathbf{v}) \propto \mathrm{e}^{-H/kT}$$

für freien Teilchen behandelt. Hier ist H die Hamiltonfunktion $H = T + V$ als Funktion der Geschwindigkeit (bzw. Impuls) und Ort. In dieser Form gilt die Verteilung auch für Teilchen in äußeren Feldern, allerdings hängt sie dann nicht nur vom Impuls sondern auch dem Ort des Teilchens ab.

Aufgabe 27: Thermodynamik eines Spingitters 1+2+1 = 4 Punkte

Ein System von N an bestimmten Gitterplätzen lokalisierten Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (Spingitter) befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$. Jedem Spin ist ein magnetisches Moment μ zugeordnet. Die Energie des Systems ist dann ($B = |\boldsymbol{B}|$) gegeben durch

$$E = -\left(N_\uparrow - N_\downarrow\right)\mu B.$$

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Mikrozustände und berechnen Sie die Entropie
2. Geben Sie kalorische und thermische Zustandsgleichung an
3. Diskutieren Sie die Fälle $T = 0$, $T = \infty$, $N_\uparrow \geq N_\downarrow$ und $N_\uparrow \leq N_\downarrow$

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Mittwoch, den 12.12.2018