Friedrich-Schiller-Universität Jena Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 7

Aufgabe 22: Adiabatische Entmagnetisierung (Kühlung) 2+2+1 = 5 Punkte

Wir betrachten ein magenetisierbares Medium, modelliert durch N Spins, und vernachlässigen mechanische Beträge aufgrund einer Volumenänderung, so dass $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - M\mathrm{d}H$. Die Magnetisierung hänge vom magnetischen Feld wie folgt ab:

$$M(T,H) = N\mu \tanh \frac{\mu H}{kT}\,.$$

Aus der Statistischen Mechanik ist bekannt, dass für (nicht-wechselwirkende) Spins die Entropie S nur eine Funktion der Variablen $x = \mu H/kT$ ist, und wegen ihrer informationstheoretischen Bedeutung erwarten wir, dass $S(x=0) = kN\log 2$ ist.

1. Berechnen Sie $nC_H(T,H) - nC_H(T,0)$ als Funktion von x.
2. Berechnen Sie die Entropieänderung $S(T,H)$.
   Hinweis: um die „Integrationskonstante“ $S(T,0)$ zu finden, könnte die Information in der Aufgabenstellung nützlich sein.
3. Charakterisieren Sie die Adiabaten und begründen Sie, dass bei einer adiabatischen Entmagnetisierung der Paramagnet abkühlt.

Aufgabe 23: Trajektorie und Hamiltonscher Fluss 1+1+2+1+2 = 7 Punkte

Wir betrachten den ein-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Der Phasenraum ist $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Im Folgenden wählen wir ein Einheitensystem, in dem $m = \omega = 1$ gilt.

1. Bestimmen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld $X_H = J\nabla H$. Skizzieren Sie das Vektorfeld.
2. Bestimmen Sie die Trajektorie mit Anfangspunkt (q_0, p_0) im Phasenraum.
3. Der Fluss $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung

   $$\Phi_t(x) = M_t\,x, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

   Was für eine Matrix ist M_t? Zeigen Sie, dass M_t eine symplektische Matrix ist.
   Bemerkung: für nichtlineare Systeme ist Φ_t natürlich keine lineare Abbildung.
4. Betrachte nun ein im Schwerefeld fallendes Teilchen mit

   $$H = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

   Skizziere das Hamiltonsche Vektorfeld.

5. Der Fluss hat die Form

$$\phi_t(x) = M_t\, x + b(t)\,, \qquad x = \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}$$

Bestimme M_t und $b(t)$ und beweise, dass ϕ_t symplektisch ist.

Aufgabe 24: Volumen einer n-dimensionalen Kugel 2+1 = 3 Punkte

Argumentieren Sie, warum das gesamte Volumen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius R bereits in der dünnen Oberflächenschicht an der Kugeloberfläche enthalten ist, wenn n hinreichen groß ist.

1. Wie groß muss n sein, damit innerhalb der dünnen Kugelschale mit innerem Radius $(1 - 10^{-3})R$ und äußerem Radius R bereits der $(1 - 10^{-6})$'te Teil des Volumens der Kugel enthalten ist.
2. Plotten Sie die relevanten Funktionen $r \to r^n$ für $n = 1, 5, 10$ und 100.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Mittwoch, den 05.12.2018