Friedrich-Schiller-Universität Jena Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 10

Aufgabe 28: Ideales klassisches Gas im rotierenden Zylinder 2+2 = 4 Punkte

Ein Zylinder mit Radius R und Länge ℓ ist mit einem idealen Gas gefüllt. Der Zylinder rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Längsachse (z-Achse). Die Hamiltonfunktion, welche die Bewegung im rotierenden Koordinatensystem (in dem das Gas ruht) beschreibt, ist

$$H^* = H - \omega L_z$$

mit Hamiltonfunktion H im ruhenden Bezugssystem und $\vec{L}$ als Gesamtdrehimpuls. Gravitationseffekte seien vernachlässigbar. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle\rho\rangle$ der Dichte $\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)$ des idealen Gases, wenn sich das Gas bei der Temperatur T im thermischen Gleichgewicht befindet. Hierin ist m die Gesamtmasse des Gases.

Hinweis: In Zylinderkoordinaten ist

$$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varrho}\delta(z)\delta(\varrho)\delta(\varphi)\,.$$

Aufgabe 29: Dichtematrizen 1+(1+1) = 3 Punkte

Betrachten Sie ein abgeschlossenes, quantenmechanisches System, das ein Ensemble unterschiedlicher Zustände enthält. Ein bestimmter Zustand $|\psi_i\rangle$ ist mit der Wahrscheinlichkeit p_i realisiert, so dass die Dichtematrix des Systems

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

ist. Der Mittelwert einer Observablen ist

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_i p_i\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle$$

- Zeigen Sie, dass für den Mittelwert $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{A})$ gilt.
- Verifizieren Sie, dass die Entropie

  $$S := -k\,\mathrm{Sp}(\hat{\rho}\log\hat{\rho}), \quad \log\hat{\rho} = \sum_i \log p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

  zeitlich konstant ist. Beweisen Sie das zuerst für ein stationäres System, indem Sie die Energiebasis zur Berechnung von $\hat{\rho}$ und der Spur benutzen. Geben Sie danach das Argument für ein nicht-stationäres System und eine beliebige Orthonormalbasis im Hilbertraum.

Bitte wenden

Aufgabe 30: Reine und gemischte Zustände 5 Punkte

Gegeben sei ein System von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, welches in der Eigenbasis des Spinoperators $\hat{S}_z$

(a) durch einen gemischten Zustand mit dem Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{3}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

(b) durch den reinen Zustand

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle$$

beschrieben wird. Berechnen Sie in beiden Fällen die Erwartungswerte der Spinoperatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ sowie den Erwartungswert der Entropie.

Hinweis: Die normierten Eigenzustände von $\hat{S}_z$ erfüllen

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \qquad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle.$$

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Mittwoch, den 16.01.2019