Friedrich-Schiller-Universität Jena Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Marc Steinhauser
M.Sc. Julian Lenz

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 1

Aufgabe 1: Satz von Euler 2+1 = 3 Punkte

Eine Funktion mehrerer Variablen mit der Eigenschaft

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \ldots, x_n)$$

heißt **homogene Funktion** m-ten Grades

1. Man beweise den Satz von Euler für eine homogene Funktion m-ten Gardes,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = mf$$

2. In der Thermodynamik tritt der Spezialfall von Funktionen ersten Grades auf, zum Beispiel erfüllt die Entropie S als Funktion von innerer Energie U, Volumen V und Teilchenzahl N die Beziehung

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N)\,.$$

Sie bedeutet, dass sich z.B. bei Verdopplung des Systems (doppelte Energie, doppeltes Volumen und doppelte Teilchenzahl) die Entropie verdoppelt. Eine Größe mit dieser Eigenschaft heißt extensiv. In der Vorlesung werden wir zeigen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} = -\frac{\mu}{T}$$

gelten, wobei die zwei Indizes nach den Klammern angeben, welche zwei Variablen bei der Ableitung jeweils festgehalten werden. Welche Beziehung zwischen den extensiven Größen S, E, V und N folgt daraus?

Aufgabe 2: Integralsatz von Green 3 Punkte

Der Integralsatz von Green in $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\oint_{\mathrm{C}} (X\,dx + Y\,dy) = \int\int_{\mathrm{G}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$$

mit einer geschlossenen Kurve C und der von C eingeschlossenen Fläche G. Zeigen Sie, dass das Linienintegral

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left\{\left(6xy^2 - y^3\right) dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right) dy\right\}, \quad \mathrm{A} = (1,2), \quad \mathrm{B} = (3,4)$$

wegunabhängig ist und berechnen Sie es.

Aufgabe 3: Integrierender Faktor 1+2 Punkte

a) Zeigen Sie, dass das Differential $\omega = xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ unvollständig ist.
b) Finden Sie eine Funktion $g(x, y)$ (einen integrierenden Faktor), damit aus dem unvollständigen Differential ω ein vollständiges Differential wird, $g\omega = \mathrm{d}F$.

Aufgabe 4: Reversible Ausdehnung von Gasen 3 Punkte

Ein Mol eines idealen Gases dehnt sich reversibel auf das doppelte Volumen aus: a) unter konstantem Druck (isobar) b) unter konstanter Temperatur (isotherm). Wie groß sind die Ausdehnungsarbeiten und die zuzuführenden Wärmemengen. Geben Sie diese ebenfalls für ein Mol eines van der Waals-Gases an.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Freitag, den 26.10.2018