Übung zur Thermodynamik/Statistischen Physik**Blatt 9, nur für Bachelor-Studenten****Aufgabe 27: Thermodynamik eines Spingitters**

4 Punkte

Ein System von N an bestimmten Gitterplätzen lokalisierten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Spingitter) befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$. Jedem Spin ist ein magnetisches Moment μ zugeordnet. Die Energie des Systems ist dann ($B = |\mathbf{B}|$) gegeben durch

$$E = -(N_{\uparrow} - N_{\downarrow}) \mu B.$$

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Mikrozustände und berechnen Sie die Entropie
2. Geben Sie kalorische und thermische Zustandsgleichung an
3. Diskutieren Sie die Fälle $T = 0$, $T = \infty$, $N_{\uparrow} \geq N_{\downarrow}$ und $N_{\uparrow} \leq N_{\downarrow}$.

Aufgabe 28: Klassisches Ideales Gas I

5+1+1 = 7 Punkte

Gegeben sei ein klassisches mono-atomares ideales Gas bestehend aus N Atomen mit Masse m in einem Kasten mit Volumen V . Die kanonische Zustandssumme lautet

$$Z_{\beta} = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \prod_{i=1}^N d^3x_i d^3p_i e^{-\beta H(x)}, \quad H(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2$$

worin $x = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ einen Punkt in Γ bezeichnet.

1. Führen Sie die Ortsintegration aus und integrieren Sie über alle Impulse bei festgehaltener Gesamtenergie. Berechnen Sie $G(E)$ in

$$Z_{\beta} = \int dE G(E) e^{-\beta E}, \quad G(E) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \prod_{i=1}^N d^3x_i d^3p_i \delta(E - H(x)),$$

und anschließend Z_{β} . Zeigen Sie, dass Z_{β} faktorisiert, $Z_{\beta} = (V/\lambda^3)^N/N!$ und bestimmen Sie λ .

2. Was ist die Bedeutung von $G(E)$?
3. Die Länge λ ist die thermische Wellenlänge. Sie beschreibt die mittlere de Broglie-Wellenlänge eines Teilchens in einem Systems im thermischen Gleichgewicht. Ein Gas wechselwirkender Bosonen kondensiert wenn λ kleiner als der mittlere Abstand zwischen den Teilchen wird. Bestimme die thermische Wellenlänge für Rubidiumatome bei 10 nK.

Hinweis: Die Oberfläche der Einheitssphäre in d Dimensionen ist

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Bei der Lösung braucht man das Integral

$$\int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-x} = \Gamma(s)$$

Aufgabe 29: Klassisches ideales Gas II

2+3+2 = 7 Punkte

Für das ideale Gas ist $H(x)$ die Summe von Einteilchen-Hamiltonfunktionen und wir können Z_β auch schreiben als

$$Z_\beta = \frac{1}{N!} \int d\epsilon_1 \cdots d\epsilon_N \prod_{i=1}^N d^3x_i d^3p_i (\delta(\mathbf{p}_i^2/2m - \epsilon_i) e^{-\beta\epsilon_i}) = \frac{1}{N!} z^N$$

mit

$$z = \int d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}, \quad g(\epsilon) = \frac{1}{h^3} \int d^3x d^3p \delta(\mathbf{p}^2/2m - \epsilon)$$

1. Berechne die Einteilchenzustandsdichte $g(\epsilon)$, die Einteilchenzustandssumme z und prüfe nach, dass das Resultat für $Z(\beta)$ mit dem Resultat in 28.1 übereinstimmt.

Mit Hilfe von $G(E)$ kann man die Mittelwerte von $H(x)$ oder Potenzen von $H(x)$ berechnen, z.B.

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z_\beta} \frac{1}{h^{3N} N!} \int \prod_{i=1}^N d^3x_i d^3p_i H(x) e^{-\beta H(x)} = \frac{\int dE E G(E) e^{-\beta E}}{\int dE G(E) e^{-\beta E}}$$

2. Wie berechnet sich der Erwartungswert von $H(x)$ mit Hilfe der Einteilchenzustandsdichte $g(\epsilon)$ aus? Berechne nun die innere Energie $U = \langle H \rangle$ und die mittlere Energie eines Atoms, entweder mit Hilfe von $G(E)$ oder von $g(\epsilon)$.
3. Berechnen Sie alternativ die innere Energie als Ableitung einer aus Z gebildeten Größe nach β und bestätigen Sie das Resultat unter 1.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 22. Dezember 2016