

Übung zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 8

Aufgabe 24: Kombinatorik

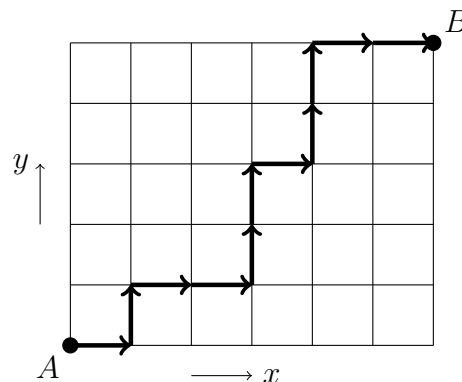
2 Punkte

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W , bei 100-maligem Würfeln 20-mal eine 6 zu würfeln? Hinweis: die Antwort $(1/6)^{20}$ ist nicht korrekt (siehe die Notizen „Elemente der Kombinatorik“ auf meiner Homepage)

Aufgabe 25: Anzahl Wege auf dem Gitter

2 Punkte

Wir betrachten ein 6×5 Rechteck-Gitter, siehe Abbildung. Auf wie viele Weisen kann man über die Gitterpunkte von A nach B gelangen, wobei man entweder in die x - oder y -Richtung vorwärts schreiten muss. In der Abbildung ist eine Möglichkeit skizziert.



Aufgabe 26: Lehramt: Barometrische Höhenformel

3 Punkte

N Teilchen der Masse m in einem idealen Gas befinden sich unter dem Einfluss des Gravitationspotentials mgz in einem (unendlich hoch gedachten und senkrecht stehenden) Zylinder. Die potentielle Energie eines Teilchens sei $E = mgz$, wobei z die Höhe über dem Zylinderboden ($z = 0$) sei. Bestimmen Sie aus der Boltzmann-Verteilung die barometrische Höhenformel, die angibt wieviel Teilchen $n(z)dz$ sich in der Höhe $z \dots z + dz$ befinden und wie der Druck mit z abnimmt.

Hinweis: In der Vorlesung wurde die Boltzmannverteilung

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \propto e^{-H/kT}$$

für freien Teilchen behandelt. Hier ist H die Hamiltonfunktion $H = T + V$ als Funktion der Geschwindigkeit (bzw. Impuls) und Ort. In dieser Form gilt die Verteilung auch für Teilchen in äußeren Feldern, allerdings hängt sie dann nicht nur vom Impuls sondern auch dem Ort des Teilchens ab.

Aufgabe 26: Bachelor: Volumen einer n -dimensionalen Kugel

2+1 = 3 Punkte

Argumentieren Sie, warum das gesamte Volumen einer n -dimensionalen Kugel vom Radius R bereits in der dünnen Oberflächenschicht an der Kugeloberfläche enthalten ist, wenn n hinreichend groß ist. Wie groß muss n sein, damit innerhalb der dünnen Kugelschale mit innerem Radius $(1 - 10^{-3})R$ und äußerem Radius R bereits der $(1 - 10^{-6})$ 'te Teil des Volumens der Kugel enthalten ist. Plotten Sie die relevanten Funktionen $r \rightarrow r^n$ für $r = 1, 5, 10$ und 100 .

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 15. Dezember 2016

Lösungen

Aufgabe 24: Kombinatorik

Da die Wahrscheinlichkeit $1/6$ ist, eine 6 zu würfeln, und $5/6$, keine 6 zu würfeln, gilt nach der Produktregel

$$W = \left(\frac{1}{6}\right)^{20} \left(\frac{5}{6}\right)^{80} \cdot \frac{100!}{20!} 80! \approx 0.06786.$$

Der dritte Faktor gibt die Zahl der Möglichkeiten an, wann die 20 „Sechser“ bei 100 Würfeln erscheinen können. Das Resultat berechnet man am besten mit Hilfe der Stirling'schen Formel abschätzen.

Aufgabe 25: Anzahl Wege auf dem Gitter

Insgesamt muss man $N = 5 + 6$ Schritte tun, davon 5 in die y -Richtung und 6 in die x -Richtung. Die Reihenfolge ist beliebig. Für die Zahl der unterscheidbaren Wege m gilt daher:

$$m = \frac{(5+6)!}{5!6!} = 462.$$

Aufgabe 25: Lehramt: Barometrische Höhenformel

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit Impuls $\mathbf{p}$ und in der Höhe h zu finden ist

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-H(\mathbf{x}, \mathbf{p})/kT} = \frac{1}{Z} e^{-\mathbf{p}^2/2mkT - mgz/kT}$$

Der Faktor z sorgt dafür, dass das Integral über alle Impulse und über die Orte im Zylinder gleich Eins ist. Wir interessieren uns nicht für die Impulse und nur für die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Ortsraum. Dann finden wir

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \rho(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z'} e^{-mgz/kT}, \quad Z' = \int_0^\infty e^{-mgz/kT} = \frac{kT}{mg}$$

Die Teilchendichte ist dann

$$n(\mathbf{x}) = N\rho(\mathbf{x}) = \frac{mgN}{kT} e^{-mgz/kT}$$

Für den Druck finden wir mit dem idealen Gasgesetz

$$p = \frac{N}{V} kT = n(\mathbf{x})kT = \frac{N}{mg} e^{-mgz/kT} = e^{-Mgz/RT}, \quad M = \text{Molmasse}$$

Aufgabe 26: Bachelor: Volumen einer N -dimensionalen Kugel

Das Volumen der n -dimensionalen Kugel vom Radius R ist

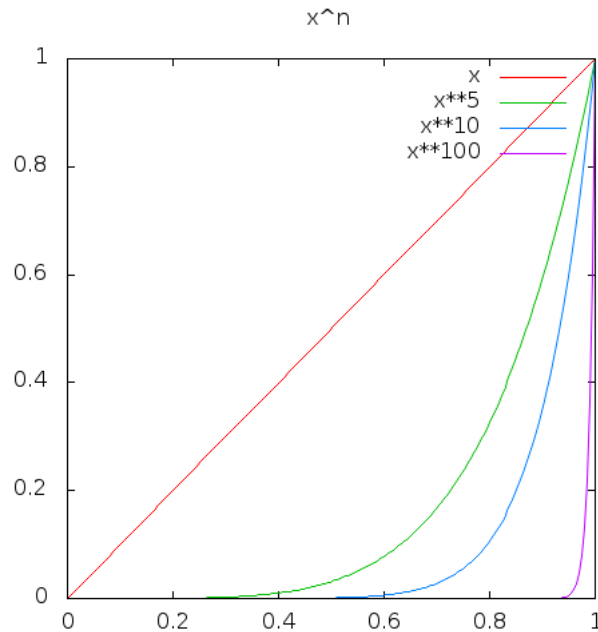
$$V_K(R) = C_n R^n, \quad C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

Im Folgenden brauchen wir C_n nicht mehr. Wir bestimmen das Verhältnis der Volumen einer Kugel vom Radius $R(1 - \epsilon)$ und einer Kugel vom Radius R :

$$\frac{V_K(R - \epsilon)}{V_K(R)} = \left(\frac{(1 - \epsilon)R}{R}\right)^n = (1 - \epsilon)^n.$$

Wir können die Aufgabenstellung auch so formulieren, dass wir n bestimmen müssen, so dass für $\epsilon = 10^{-3}$ dieses Verhältnis kleiner als 10^{-6} ist, also gilt:

$$(1 - 10^{-3})^n \leq 10^{-6} \quad \text{bzw.} \quad n \geq -6 / \log_{10}(1 - 10^{-3}) = 13808,602.$$



Aufgabe 27: Bachelor: Energieschale

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m}$$

Das Phasenraumvolumen der Energiekugel $H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \leq E$ ist

$$\text{Vol}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N \mid H \leq E) = \int_{\mathbf{x}_k \in V} d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_N \int_{H \leq E} d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N$$

Das Integral über die Orte gibt den Faktor V^N . Für das Impulsintegral bemerken wir, dass H nur von ξ^2 abhängt, wobei $\vec{\xi} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ ist. Wir führen Kugelkoordinaten im Impulsraum ein,

$$d^{3N}\xi = \xi^{3N-1} d\xi d\Omega, \quad \xi = |\vec{\xi}|.$$

Dann ergibt sich

$$\text{Vol}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N \mid H \leq E) = V^{3N} \Omega_{3N-1} \int_{\xi^2 \leq 2mE} d\xi \xi^{3N-1}$$

wobei

$$\Omega_{3N-1} = \frac{2\pi^{3N/2}}{\Gamma(3N/2)}$$

das Volumen der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{3N}$ ist. Wir finden

$$\text{Vol}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N \mid H(x) \leq E) = V^{3N} \Omega_{3N-1} \frac{1}{3N} (2mE)^{3N/2}$$

Wir berechnen das Verhältnis

$$\frac{\text{Vol}(H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in [E - \epsilon, E])}{\text{Vol}(H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in [0, E])} = \frac{E^{3N/2} - (E - \epsilon)^{3N/2}}{E^{3N/2}} = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{E}\right)^{3N/2}$$

Für große N schätzen wir ab

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{E}\right)^{3N/2} = \left(1 - \frac{2}{3N} \frac{3N\epsilon/2}{E}\right)^{3N/2} \approx e^{-3N\epsilon/2E}$$

1 Wahrscheinlichkeiten

Es sei p_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Ereignis i . Wir fragen zunächst nach der Wahrscheinlichkeit, dass entweder das Ereignis i oder das Ereignis j auftritt. Es gilt dann offensichtlich

$$p = p_i + p_j. \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Ereignis auftritt, ist natürlich 1,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1. \quad (2)$$

Eine grundsätzlich verschiedene Verknüpfung ist die Frage nach dem gleichzeitigen Auftreten von 2 oder allgemein k zufälligen, voneinander unabhängigen Ereignissen, also die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Ereignis 1 als auch Ereignis 2 als auch Ereignis 3 usw. auftreten. Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k. \quad (3)$$

So ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, beim Würfelspiel mit dem ersten Würfel eine 6 und mit dem zweiten Würfel eine 4 zu würfeln gleich $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Die Zahl im Nenner, also 36, gibt die Zahl der unabhängigen Gesamtmöglichkeiten an. Allgemein ist die Zahl der Möglichkeiten für das gleichzeitige Auftreten verschiedener, voneinander unabhängiger Ereignisse das Produkt der Möglichkeiten der Einzelereignisse.

Davon zu unterscheiden ist der Fall, dass es gleichgültig ist, welcher von den beiden Würfeln die 6 und 4 zeigt. Dann gibt es 2 Möglichkeiten des Auftretens einer 6 und 4, und die Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36}.$$

Ein Beispiel: Eine Urne enthalte gleich viele schwarze wie weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei dreimaligem Ziehen 2 schwarze und eine weiße Kugel zu ziehen? Vorausgesetzt sei, dass wir die gezogenen Kugel wieder in die Urne zurücklegen, bevor erneut gezogen wird. Das dreimalige Ziehen entspricht dem unabhängigen Auftreten dreier Ereignisse, hat also die Wahrscheinlichkeit $(1/2)^3$. Nun muss aber beachtet werden, dass es 3 Möglichkeiten gibt, zwei schwarze und eine weiße Kugeln hintereinander zu ziehen. Also ist die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Es gibt $N!$ Möglichkeiten N verschiedene unterscheidbare Elemente, z.B. durchnummerierte Kugeln, zu ziehen. Es ist auch die Anzahl Möglichkeiten, N unterschiedliche Elemente auf N freie Plätze einzuordnen. Sind jedoch von den N Elementen N_1 Elemente identisch, so gibt es nur $N - N_1$ unterschiedliche Elemente einzuordnen, der Rest der freien Plätze wird mit den nicht unterscheidbaren N_1 Elementen erfüllt. Die Gesamtzahl möglicher Anordnungen ist

$$N(N-1)(N-2) \cdots (N_1+1) = \frac{N!}{N_1!}. \quad (4)$$

Sind von den zunächst als unterscheidbar angegebenen $N - N_1$ Elementen wiederum N_2 nicht unterscheidbar, so sind jeweils $N_2!$ Anordnungen gleich, also gibt es

$$\frac{N!}{N_1! N_2!} \quad (5)$$

verschiedene Anordnungen. Setzen sich schließlich die N Elemente aus s Gruppen mit jeweils nicht unterscheidbaren Elementen $N_1, N_2, \dots, N_s$ zusammen, so ist die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen des Systems

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_s!}, \quad \sum_{i=1}^s N_i = N. \quad (6)$$

Nun beantworten wir folgende Frage: wie viel Möglichkeiten gibt es, N nicht unterscheidbare Elemente auf m Fächer zu verteilen, wobei pro Fach von Null bis maximal N Elemente Platz finden können (siehe Abbildung).



Die Lösung ist schnell gefunden, wenn wir uns die nicht unterscheidbaren Elemente (z.B. Kugeln) und die $m - 1$ beweglichen Trennwände zwischen den m Fächern als zwei Sorten verschiedener, nicht unterscheidbarer Elemente auffassen. Diese Menge aus zwei Sorten hat $N + m - 1$ Elemente und nach den obigen Resultaten existieren

$$\frac{(N + m - 1)!}{N!(m - 1)!}$$

Anordnungsmöglichkeiten.

1.1 Binomialverteilung

Wir betrachten ein großes Reservoir aus S schwarzen und W weißen Kugeln. Wir ziehen aus der Urne n Kugeln heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W_{n,m}$, dass wir dabei m schwarze und $n - m$ weiße Kugeln ziehen, wobei es auf die Reihenfolge der Kugeln nicht ankommt? Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit s , eine schwarze Kugel zu ziehen

$$s = \frac{S}{S + W}$$

und die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen

$$w = \frac{W}{S + W}.$$

Es seien S und W derart groß, dass sich diese Wahrscheinlichkeiten während der Ziehung praktisch nicht ändern. Wenn wir eine bestimmte Reihenfolge der Ziehung festlegen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, m schwarze und $n - m$ weiße Kugeln in dieser festgelegten Reihenfolge zu ziehen

$$s^m w^{n-m}.$$

Nun soll es aber auf die Reihenfolge nicht ankommen. Die Zahl der Reihenfolgen ist aber gleich der Zahl der Vertauschungsmöglichkeiten von m schwarzen und $n - m$ weißen Kugeln. Diese Zahl beträgt nach (3)

$$\frac{n!}{m!(n - m)!}.$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch die Binomialverteilung gegeben:

$$W_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot s^m w^{n-m}. \quad (7)$$

Bei gegebener Anzahl Ziehungen n hängt die Zahl nur von m ab, und es muss gelten

$$\sum_{m=0}^n W_{n,m} = 1.$$

Dies kann man auch direkt nachprüfen,

$$\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot s^m w^{n-m} = (s+w)^n = 1.$$

Symmetrische Verteilungen $W_{n,m}$ erhält man für $s = w = 0,5$. Dieser Fall lässt sich mit einem n -maligem Münzwurf realisieren.

1.2 Erzeugende Funktionen

Wir nummerieren die Elemente durch, wobei Elemente i mit Wahrscheinlichkeit p_i auftritt. Zum Beispiel ist $W_{n,m}$ im letzten Beispiel die Wahrscheinlichkeit dafür, m schwarze Kugeln zu ziehen. Von Interesse sind Mittelwert

$$\langle k \rangle = \sum_k k p_k \quad (8)$$

und mittlere Abweichung vom Mittelwert σ ,

$$\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2. \quad (9)$$

Zu deren Berechnung, und der Berechnung der höheren Momente

$$\langle k^a \rangle = \sum_k k^a p_k \quad (10)$$

bedient man sich gerne der Methode der erzeugenden Funktion. Diese hängt von einem Parameter ab und man kann die Momente. Für die Binomialverteilung ist

$$F(t) = \sum_{m=0}^n W_{n,m} e^{imt} = (w + e^{it} s)^n. \quad (11)$$

Leitet man den zweiten Ausdruck mehrmals nach t ab und setzt danach $t = 0$, dann erhält man

$$\frac{1}{i^a} \frac{d^a F(t)}{dt^a} \Big|_{t=0} = \sum_{m=0}^n W_{n,m} m^a = \langle m^a \rangle. \quad (12)$$

Auf diese Weise erhält man

$$\langle m \rangle = ns, \quad \langle s^2 \rangle =$$

für den Mittelwert der Binomialverteilung und

$$\langle m^2 \rangle = n(n-1)s^2 + ns \implies \sigma^2 = n(s - s^2). \quad (13)$$

Die relative Abweichung vom Mittelwert

$$\frac{\sigma}{\langle m \rangle} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{w}{s}}. \quad (14)$$

wird umso kleiner, je größer die Länge n der Versuchsreihen ist. Für $n \rightarrow \infty$ strebt die relative Abweichung gegen Null.