

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 7

Aufgaben für Lehramts-Studenten

Aufgabe 20: Permutationen

2 Punkte

Finden Sie die Anzahl Permutationen der Buchstaben im Wort *monotonous*. Wie oft sind vier *o* hintereinander?

Aufgabe 21: Maxwell-Verteilung

1+2+1 = 4 Punkte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen mit Masse m in einem Gas der Temperatur T sei

$$p(\mathbf{v}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

1. Bestimmen Sie die Konstante $\mathcal{N}$.
2. Berechnen Sie den Mittelwert der Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$, und die mittlere kinetische Energie $\langle E \rangle = m\langle v^2 \rangle/2$.
3. Vergleichen Sie die kinetische Energie eines Teilchens mit mittlerer Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ zur mittleren kinetischen Energie.

Hinweis: Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2/2+bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{b^2/2a} \implies \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2/2} x^2 = \sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}$$

Es gilt auch

$$\int_0^{\infty} dx e^{-ax^2/2} x^3 = \frac{2}{a^2}$$

Aufgabe 22: Charakteristische Funktionen

2+4 = 6 Punkte

Eine reelle Zufallsvariable x habe die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$. Also ist $p(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, x im Intervall $[x, x+dx)$ zu finden. Die charakteristische Funktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$C(\xi) = \langle e^{i\xi x} \rangle = \int e^{i\xi x} p(x) dx, \quad \int p(x) dx = 1. \quad (1)$$

Für eine diskrete Zufallsvariable, die mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p_n \leq 1$ den Wert n annimmt, definiert man entsprechend

$$C(\xi) = \langle e^{i\xi x} \rangle = \sum_n e^{i\xi n} p_n, \quad \sum_n p_n = 1. \quad (2)$$

1. Entwickle $C(\xi)$ in Potenzen von ξ . Was ist der Wert von C_0 in der Entwicklung (hier bitte keine Rechnung)

$$C(\xi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(i\xi)^k}{k!}.$$

2. Was ist die Bedeutung der Momente C_k . Hinweis: Vergleiche die Potenzen von ξ auf beiden Seiten von (1) oder (2).
3. Berechne $C(\xi)$ und die Momente C_1 und C_2 für
- (a) Die Bernoulli Verteilung

$$p_n = \binom{N}{n} \beta^n (1 - \beta)^{N-n}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

- (b) Die Poisson Verteilung

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (c) Die Bose-Einstein Verteilung

$$p_n = (1 - \eta) \eta^n, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (d) Die Gauss Verteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad \sigma > 0$$

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 08. Dezember 2016