Friedrich-Schiller-Universität Jena Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Andreas Wipf
MSc Daniel August
MSc Marc Steinhauser

Übungen zur Thermodynamik/Statistischen Physik

Blatt 7

Aufgaben für Bachelorstudenten

Aufgabe 20: Trajektorie und Hamiltonscher Fluss 1+1+2+1+2 = 7 Punkte

Wir betrachten den ein-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Der Phasenraum ist $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Im Folgenden wählen wir ein Einheitensystem, in dem $m = \omega = 1$ gilt.

1. Bestimmen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld $X_H = J\nabla H$. Skizzieren Sie das Vektorfeld.
2. Bestimmen Sie die Trajektorie mit Anfangspunkt (q_0, p_0) im Phasenraum.
3. Der Fluss $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung

$$\Phi_t(x) = M_t\, x, \quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Was für eine Matrix ist M_t? Zeigen Sie, dass M_t eine symplektische Matrix ist.
Bemerkung: für nichtlineare Systeme ist Φ_t natürlich keine lineare Abbildung. Betrachte nun ein im Schwerefeld fallendes Teilchen mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

4. Skizziere das Hamiltonsche Vektorfeld.
5. Der Fluss hat die Form

$$\phi_t(x) = M_t\, x + b(t)\,, \qquad x = \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}$$

Bestimme M_t und $b(t)$ und beweise, dass ϕ_t symplektisch ist.

Aufgabe 21: Volumen im Phasenraum 1+1 = 2 Punkte

Ein Teilchen mit Energie E bewegt sich frei in einem Kasten mit Volumen V. Berechne das Volumen $\Phi(E)$ im Phasenraum, welches das Teilchen „ausfüllt“. Und zwar im allgemeinen Fall und im nicht-relativistischen Grenzfall.

Aufgabe 22: Energieschale 4 Punkte

In einem Behälter befinden sich N Teilchen eines idealen Gases. Ein Makrozustand umfasse alle Phasenraumpunkte $x \in \Gamma$ mit Energien $E_1 \leq H(x) \leq E_2$. Wir untersuchen das Phasenraumvolumen, welche diese Zustände im Phasenraum einnehmen. Berechnen und diskutieren Sie für große N das Phasenraumvolumen einer Energieschale mit $E_1 = E - \epsilon$ und $E_2 = E$ mit einer relativen Dicke $0 < \epsilon < 1$ im Verhältnis zum Phasenraumvolumen aller Zustände innerhalb der Energiekugel mit $E_1 = 0$ und $E_2 = E$.

Hinweis: Die nicht-wechselwirkenden Teilchen haben alle die gleiche Masse, so dass die Bedingung $H(x) \leq E$ eine einfache geometrische Bedeutung im Impulsraum hat. Berechnen Sie nur das Verhältnis der Volumen im Phasenraum, dann heben sich geometrische Faktoren weg.

Aufgabe 23: Poisson-Verteilung und ideales Gas 3+3 = 6 Punkte

Betrachte eine (mono-atomares) ideales Gas mit N Molekülen in einem Volumen V. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, n Moleküle in einem kleinen Teilvolumen $\Delta \subset V$ zu finden im Grenzfall $N \to \infty$ durch eine Poisson-Verteilung gegeben ist,

$$P_n = \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n}{n!} \,,$$

wobei $\langle n \rangle = N\Delta/V$ die mittlere Anzahl Moleküle im Teilvolumen ist.
Hinweis: Als Zwischenresultat (gibt 3 Punkte) sollten sie

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\Delta}{V}\right)^n \left(1 - \frac{\Delta}{V}\right)^{N-n}$$

erhalten. Hierin lassen Sie N bei endlichem $\langle n \rangle$ gegen Unendlich streben und benutzen die Stirling'sche Näherungsformel für $N!$ sowie die Näherung $(1 - x/N)^N \approx e^{-x}$.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 08. Dezember 2016