

Übung zur Thermodynamik/Statistischen Physik**Blatt 12, nur für Bachelor Studenten****Aufgabe 38: Phononen als Quantengas**

2+1+3 Punkte

Wir betrachten Schwingungen der Frequenz ω in einem Gitter mit N Atomen. Diese Schwingungen sind bosonische Zustände, die Phononen genannt werden. Die Energie pro Schwingung ist $\epsilon_i = \hbar\omega (\mathcal{N}_i + \frac{1}{2})$, wobei $\mathcal{N}_i$ der Anzahl der angeregten Phononen der Frequenz ω entspricht. Die Dispersionsrelation darf als $\omega = c |\mathbf{p}|$, angenommen werden. Ein wichtiges Modell für dieses System ist das Debye-Modell. Es beschreibt, dass die Phononen alle Frequenzen bis zu einer maximalen Frequenz ω_D annehmen können. Berechnen Sie für dieses Modell

- a) die Zustandsdichte $D(\omega)$ für Phononen,
- b) die allgemeine Form (Integraldarstellung) der inneren Energie,
- c) die Wärmekapazität für kleine und große Temperaturen aus der inneren Energie.

Hinweise:

- Die Teilchenzahl der Phononen ist fest, somit benötigt man die kanonische Zustandssumme. Die mittlere Teilchenzahl pro Schwingung ist dann $\bar{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$
- Nutzen Sie die geometrische Reihe, sowie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Aufgabe 39: Bonusaufgabe: Dampfdruck von Metallen

4+2 Punkte

Wir betrachten ein Metall, das den Halbraum $z \leq 0$ erfüllt. Die darin enthaltenen Metallelektronen nehmen wir als nicht-wechselwirkend an. Sie befinden sich näherungsweise in einem Potentialtopf, der um ϕ_0 tiefer liegt als der Außenraum bei $z > 0$. Bei $T > 0$ werden die Elektronen thermisch angeregt, aus dem Metall in den Halbraum $z > 0$ austreten und dort eine Dampfphase bilden, die mit den Metallelektronen im Gleichgewicht ist. Im Gleichgewicht zwischen Metall und Dampf ist die Austrittsströmdichte gleich der Zahl der Elektronen, die pro Zeit- und Flächeneinheit aus der Dampfphase auf die Metalloberfläche auftreffen. Reflexion werde hierbei vernachlässigt.

- a) Bestimmen Sie die Dampfdichte und den Dampfdruck der Elektronen (Ladung $-e$) für $kT \ll \mu$ und $kT \ll \phi$, wobei für das chemische Potential $\mu + \phi = \phi_0$ gelte. Stellen Sie dazu ausgehend vom Hamilton-Operator, $\hat{H} = \varepsilon + \phi_0$ für Elektronen in der Gasphase mit der üblichen kinetischen Energie ε , die Zustandssumme Z für diesen Grenzfall auf. Daraus können Sie anschließend das großkanonische Potential J , die Dampfdichte $\langle n \rangle = \frac{\langle N \rangle}{V}$ und den Dampfdruck p bestimmen.
- b) Berechnen Sie in diesem Kontext die Elektronenstromdichte $j = -e \langle v_z \rangle \langle n \rangle$ aus dem Metall. Dafür wird die Anzahl der Elektronen mit positiver Impulskomponente p_z benötigt. Führen Sie dazu sphärische Impulskoordinaten ein, deren Polachse senkrecht von der Metalloberfläche zu positiven z zeigt.

Hinweis: Beachten Sie, dass Elektronen Fermionen sind und somit das Pauli-Prinzip erfüllen müssen.

Aufgabe 40: Zweidimensionales Quantengas

1+1+2 Punkte

Wir betrachten ein zweidimensionales Gas freier Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit periodischen Randbedingungen auf einer $L \times L$ -Fläche. Die Einteilchenenergien seien

$$\varepsilon(\vec{p}, s) = \frac{p^2}{2m} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y \quad \text{und} \quad s = \pm \frac{1}{2}.$$

- a) Geben Sie die mittlere Besetzungszahl $\langle n(\vec{p}, s) \rangle$ in der großkanonischen Gesamtheit an.
- b) Begründen Sie, weshalb in zwei Dimensionen

$$\sum_k \dots \Rightarrow \frac{2\pi V g}{h^2} \int \dots p \, dp$$

gilt.

- c) Berechnen Sie die mittleren Besetzungszahlen $\langle n \rangle$ durch Integration über die Freiheitsgrade. Leiten Sie daraus die Bestimmungsgleichung für das chemische Potential μ bei vorgegebener Teilchenflächendichte $\nu = \langle n \rangle / L^2$ ab und schreiben Sie μ als explizite Funktion von T und ν .

Hinweis: Das auftretende Integral lässt sich mit einer geeigneten Substitution explizit berechnen.

Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 26. Januar 2017