**Friedrich-Schiller-Universität Jena** Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Andreas Wipf
MSc Daniel August
MSc Marc Steinhauser

# Übung zur Thermodynamik/Statistischen Physik

## Blatt 10 (Aufgaben 27-29 waren nur für Bachelorstudenten)

**Aufgabe 30: Bachelor: Ein Gas aus harmonischen Oszillatoren** 2+2 = 4 Punkte

Ein ideales Gas aus $N$ (dreidimensionalen) harmonischen Oszillatoren mit Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \boldsymbol{x}_i^2 \right)$$

sei im thermischen Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur $T$.

- Berechnen Sie die kanonische Zustandsumme und bestimmen sie die $c_i$ in

$$\langle h \rangle = c_1 T, \qquad \left\langle (h - \langle h \rangle)^2 \right\rangle = c_2 T^2, \quad h = \frac{H}{N}\,.$$

- Berechnen Sie die thermische und kalorische Zustandsgleichung.

**Aufgabe 31: Bachelor: homogene Potentiale** 3 Punkte

2. Betrachte nun eine System von Teilchen für das die Kraft zwischen den Teilchen aus einem Potential abgeleitet werden kann. Das Potential sei eine homogene Funktion vom Grad $\gamma$:

$$U\left(\lambda \boldsymbol{x}_1, \lambda \boldsymbol{x}_2, \dots, \lambda \boldsymbol{x}_N\right) = \lambda^\gamma U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_N)\,.$$

Zeige, das die Zustandsgleichung des Systems folgende Form haben muss

$$p(T,V,N) = knT - \tilde{T}^{-3/\gamma} \cdot f\left(\tilde{T}^{3/\gamma} n\right) \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{V}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_0}\,.$$

Hierin ist $T_0$ irgend eine Referenztemperatur und $f$ proportional zu Entropie pro Teilchen,

$$f(x) = \frac{\gamma}{3T_0}\, x\, s(T_0, x), \qquad s = \frac{S}{N}\,.$$

Hinweis: benutze die kanonische Zustandssumme um die freie Energie und daraus den Druck zu bestimmen.

**Aufgabe 32: Reine und gemischte Zustände** 5 Punkte

Gegeben sei ein System von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, welches in der Eigenbasis des Spinoperators $\hat{S}_z$

(a) durch einen gemischten Zustand mit dem Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{3}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

(b) durch den reinen Zustand

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\rangle$$

beschrieben wird. Berechnen Sie in beiden Fällen die Erwartungswerte der Spinoperatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ sowie den Erwartungswert der Entropie.
Hinweis: Die normierten Eigenzustände von $\hat{S}_z$ erfüllen

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \qquad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle.$$

**Aufgabe 33: Quantenmechanischer harmonischer Oszillator** 3 Punkte

Betrachten Sie ein System aus N harmonischen Oszillatoren gleicher Masse und Frequenz mit fester Energie

$$E = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}N + M\right)$$

wobei $M$ eine ganze Zahl ist mit $M \geq 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abzählmethode die Entropie und berechnen Sie dann die Temperatur. Geben Sie die Quantenzahl $M$ als Funktion der Temperatur an.

**Abgabetermin: vor der Vorlesung am Donnerstag, 12. Januar 2017**