FS-Universität Jena, A. Wipf

Klausur Thermodynamik/Statistische Physik

Name: **Matrikelnummer:** **Geburtsdatum:**

Punktezahl für die Aufgaben:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
maximal	10	3	4	5	6	6	4	38
erreicht								

Aufgabe 1: Verständnisfragen 1+2+2+2+1+1+1 = 10 Punkte

1. Was sind intensive und extensive Zustandsgrößen? Geben sie drei intensive und drei extensive Zustandsgrößen an. 1
2. Was sind die Aussagen des 1. und 2. Hauptsatzes der Thermodynamik? Die Veränderung welcher Größe steht jeweils im Vordergrund? 2
3. Wie lauten die thermische und kalorische Zustandsgleichung für das ideale Gas? 2
4. Erklären Sie den Begriff Maxwell-Relation und geben Sie die zu $U(S,V)$ gehörende Relation an. 2
5. Wie lauten die Bedingungen für Phasengleichgewichte? 1
6. Worin ist das unterschiedliche Verhalten von fermionischen und bosonischen *idealen Quantengasen* bei sehr tiefen Temperaturen begründet. 1
7. Wie lautet das Variationsprinzip für die mikrokanonische, kanonische und großkanonische Gesamtheit. 1

Hinweis: Bei der dritten Frage ist nach der Temperaturabhängigkeit der inneren Energie gefragt, $U = U(T, \dots)$.

Aufgabe 2: Kreisprozesse 4 Punkte

Berechnen Sie die auftreten Arbeiten und den Wirkungsgrad eines Diesel-Prozesses, wobei der Kreisprozess mit einem idealen Gas geführt wird. Ein Diesel-Prozess hat die folgende Form:

1. $1 \to 2$ isentrope Kompression
2. $2 \to 3$ isobare Expansion
3. $3 \to 4$ isentrope Expansion
4. $4 \to 1$ isochore Druckminderung

Geben Sie ihr Ergebnis für den Wirkungsgrad in Abhängigkeit der Freiheitsgrade des idealen Gases und der Temperaturen T_1, T_2 an.

Aufgabe 3: Maxwell-Relationen 3 Punkte

Zeigen Sie für ein allgemeines Potenzial $J(T,V,\mu)$ mit $\mathrm{d}J = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V - N\mathrm{d}\mu$, dass folgende Relation gilt:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial V}\right)_{(p,n)} = -p$$

Nutzen Sie nicht $J = -pV$. Die Relation $G(T, p, N) = \mu N$ ist, falls verwendet, zu zeigen. Sie können verwenden, dass S extensiv ist, d.h. $S(p, T, N) = Ns(p, T)$

Aufgabe 4: Freie Enthalpie 1+2+1 = 4 Punkte

Die freie Enthalpie eines Gases seien

$$G(T, p) = nRT \log \frac{p}{p_0} + np\left(b - \frac{a}{RT}\right) + f(T)$$

mit beliebigen Konstanten a und b. Weiter sei f eine differenzierbare Funktion, die nur von der Temperatur, nicht aber vom Druck abhängt.

1. Berechnen Sie die Entropie $S(T, p)$.
2. Wie lautet die Zustandsgleichung $p = p(V, T)$?
3. Berechnen Sie die Enthalpie $H = H(T, p)$

Hinweis: Das vollständige Differential lautet $\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p$. Achten Sie auf die Argumente der gesuchten Potentiale. Gefragt ist nicht H als Funktion seiner natürlichen Variablen S und p.

Aufgabe 5: Relativistisches klassisches ideales Gas 2+1+2+1 = 6 Punkte

Betrachten Sie die großkanonische Zustandssumme eines klassisches ultra-relativistischen idealen Gases:

$$Z_G(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{3N} N!} \int \prod_{n=1}^{N} \mathrm{d}^3 x_n \mathrm{d}^3 p_n \, \mathrm{e}^{-\beta\left(H_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) - \mu N\right)}$$

Die N-Teilchen-Hamilton-Funktion sei

$$H_N(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} c|\boldsymbol{p}_n|, & \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N \in V \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die großkanonische Zustandsssumme.
2. Berechnen Sie den Druck, die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ und die Entropie.
3. Was ergibt sich als thermische Zustandsgleichung $p(\bar{N}, V, T)$?
4. Wie lautet die kalorische Zustandsgleichung $U(\bar{N}, V, T)$?

Hinweis: Verwenden Sie für das dreidimensionale Integral Kugelkoordinaten. Nutzen Sie dabei, dass für positive a gilt: $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ap} p^2 \mathrm{d}p = 2a^{-3}$.

Aufgabe 6: Statistiken mit wenigen Teilchen 1+1+1 = 3 Punkte

Betrachten Sie ein System aus drei Teilchen, die jeweils in einem der beiden Quantenzustände mit den Energien 0 und $\epsilon > 0$ sein können. Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für

1. unterscheidbare Teilchen
2. identische Bose-Teilchen
3. identische Fermi-Teilchen.

Aufgabe 7: Ideales Fermi Gas 2+2 = 4 Punkte

Betrachte ein ideales Quantengas von Fermionen bei Temperatur T.

1. Was ist die Wahrscheinlichkeit als Funktion der mittleren Besetzungszahl $\langle \hat{N} \rangle$, dass N Teilchen in einem gegebenen Einteilchenzustand mit Energie ϵ sind.
2. Bestimme die mittlere Fluktuation $\langle (\hat{N} - \langle \hat{N} \rangle)^2 \rangle$ der Besetzungszahl eines Einteilchenzustands mit ϵ, wiederum als Funktion der mittleren Besetzungszahl $\langle \hat{N} \rangle$. Skizziere die Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich.

Bearbeitungszeit: 09^{30} **bis** 12^{00} **Uhr**