

Quantenfeldtheorien auf dem Gitter

A. Wipf

Theoretisch-Physikalisches Institut, FSU Jena

jDPG Theoretikerworkshop January 2012

Simulationen in der Physik

- 1 Warum Raumzeitkontinuum \rightarrow Gitter
- 2 Funktionalintegrale
- 3 Skalarfeld auf dem Gitter und Spinmodelle
- 4 Monte Carlo Simulationen
- 5 Gittereichtheorien

Warum diskretisieren wir Quantenfeldtheorien

- schwach wechselwirkende Systeme:

Teilsystem weitgehend unabhängig von anderen Teilsystemen

- ▶ schwach korrelierte Quantensysteme
- ▶ schwach wechselwirkende eff. Freiheitsgrade (Quasiteilchen)
- ▶ Halbleiterphysik
- ▶ Quantenelektrodynamik
- ▶ Schwache Wechselwirkung
- ▶ Starke Wechselwirkung bei hohen Energien
- ▶ Schwachfeld-Gravitation

- Störungstheorien anwendbar

- **stark wechselwirkende Systeme:**

Eigenschaften durch Zusammenwirken der Teilsysteme erklärbar

- ▶ stark wechselwirkende, stark korrelierte Teilsysteme
- ▶ Hochtemperatur-Supraleiter
- ▶ ultrakalte Atome in optischen Gittern
- ▶ Spinsysteme in der Nähe von Phasenübergängen
- ▶ Starke Wechselwirkung bei niedrigen Energien
- ▶ Starkfeldgravitation, Binärsysteme von schwarzen Löchern

- Je nach **Skala** kann Theorie schwach oder stark wechselwirken

- **braucht nicht-störungstheoretische Methoden**

Was kann ein Theoretiker tun?

- exakt lösbare Modelle (Ising-, Schwinger-, Thirringmodell)
- phänomenologische Modelle für effektive Freiheitsgrade
- Näherungen:
 - Molekularfeldnäherung, starke Kopplungsentwicklung, Entwicklung für hohe/tiefe Temperaturen, . . .
- funktionale Methoden:
 - ∞ -System von gekoppelten Schwinger-Dyson Gleichungen
 - funktionale Renormierungsgruppengleichungen
- ab-initio Gittersimulationen
 - Gitter-QFT bei $T > 0$: spezielles statistisches System
 - mächtige Simulationsmethoden der statischen Physik

Pfadintegraldarstellung der Quantenmechanik

- Wahrscheinlichkeitsamplitude für Propagation von $q \rightarrow q'$ in Zeit t

$$K(t, q', q) = \langle q' | e^{-it\hat{H}/\hbar} | q \rangle \quad \text{Propagator}$$

- Feynman: $K(t, q, q')$ = gewichtete Summe über alle Pfade
- System kann längs jedes Pfades von q nach q' gelangen

$$q(0) = q \quad \text{and} \quad q(t) = q'$$

- Superpositionsprinzip für Wahrscheinlichkeitsamplitude

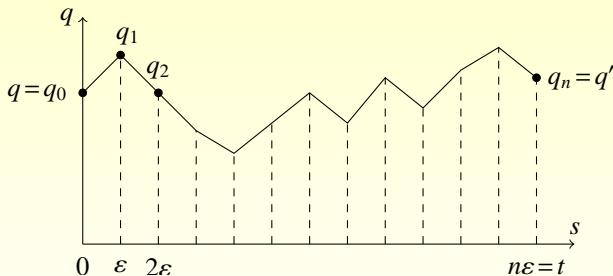
$$K(t, q', q) \sim \sum_{\text{alle Wege}} e^{iS[\text{Weg}]/\hbar}$$

- einzelner Weg trägt mit $\sim \exp(iS[\text{Weg}]/\hbar)$ bei

- formales Pfadintegral

$$K(t, q', q) \propto \int_{q(0)=q}^{q(t)=q'} \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar}$$

- Beispiel: Teilchen in \mathbb{R} :



stückweise linearer Weg

- Diskretisierung für Teilchen in \mathbb{R}

$$S = \int_0^t L(q, \dot{q}) ds, \quad L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$

- **Zeitgitter:** $t \rightarrow t_k = k\varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, n$

Gitterkonstante $\varepsilon = t/n$

Daten eines Wegs: $q(t_k) \equiv q_k$ mit $q_0 = q$, $q(n) = q'$

- **Ableitung** \rightarrow Differenzenquotient

$$\dot{q}(t_k) \approx \frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon}$$

- **Integral** \rightarrow Riemannsche Summe

$$\int_0^t ds V(q(s)) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon V(q_k)$$

- Pfadintegral durch Grenzprozess definiert:

$$K(t, q', q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{n/2} \\ \times \exp \left\{ i \epsilon \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k) \right) \right\}$$

- freies Teilchen ($V = 0$)

$$K_0(t, q', q) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} e^{im(q' - q)^2 / 2\hbar t}$$

- äußere Eich- oder Gravitationsfelder: Diskretisierung subtiler

Euklidisches Pfadintegral

- euklidische Formulierung \iff Hilbertraumtheorie
- setze $t = -i\tau$ in Propagator \Rightarrow

$$K(-i\tau, q', q) \equiv K(\tau, q', q) = \langle q' | e^{-\tau \hat{H}/\hbar} | q \rangle$$

- Pfadintegral für $K(t, q', q) \Rightarrow$ Pfadintegral für $K(\tau, q', q)$
- für $t \rightarrow -i\tau \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) &\longrightarrow -\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) = -L_E(q, \dot{q}) \\ i \int_0^t ds L(q, \dot{q}) &\longrightarrow - \int_0^\tau ds L_E(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

- **euklidisches Pfadintegral**

$$K(\tau, q', q) \propto \int_{q(0)=q}^{q(\tau)=q'} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]/\hbar}$$

- **regularisierte Gitterversion** $q_0 = q, q_n = q'$.

$$K(\tau, q', q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon} \right)^{n/2} e^{-S_E(q_0, q_1, \dots, q_n)/\hbar}$$

$$\text{mit } S_E(\dots) = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\varepsilon} \right)^2 + V(q_k) \right\}$$

- **wohldefiniertes Wiener-Maß** auf Wegen $q \rightarrow q'$
- **Maß(diff.bare Wege) = 0**
- **Maß(stetige Wege) = 1**

Quantenstatistik

- Setze $\tau = \hbar\beta$ und $q' = q$, integriere über q

$$\int dq K(\hbar\beta, q, q) = \text{tr} e^{-\beta\hat{H}} = Z(\beta) = \sum e^{-\beta E_n}$$

- kanonische Zustandssumme zu Hamilton-Operator \hat{H}
- inverse Temperatur $\beta = 1/k_B T$
- Pfadintegraldarstellung für Zustandssumme

$$Z(\beta) \propto \oint_{q(0)=q(\hbar\beta)} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]/\hbar}$$

- euklidisches Pfadintegral über β -periodische Wege

- Gittertheorie = klassisches Spinmodell

$$Z(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dq_1 \cdots dq_n \left(\frac{m}{2\pi \hbar \varepsilon} \right)^{n/2} e^{-S_E(q_1, \dots, q_n)/\hbar}$$

- Periodizität: $q_0 = q_n$
- Temperaturabhängigkeit $\varepsilon = \hbar \beta / n$
- harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω ($\hbar = 1$)

$$K_\omega(\beta, q, q) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \sinh(\omega\beta)}} \exp \left\{ -m\omega \tanh(\omega\beta/2) q^2 \right\}$$

- Integral über $q \Rightarrow$

$$Z(\beta) = \frac{1}{2 \sinh(\beta\omega/2)} = e^{-\beta\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} = \sum e^{-\beta E_n}$$

- **Energien des harmonischen Oszillators**

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- **allgemein: freie Energie**

$$F(\beta) \equiv -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} E_0$$

- **Euklidischer Ortsoperator**

$$\hat{q}_E(\tau) = e^{\tau \hat{H}/\hbar} \hat{q} e^{-\tau \hat{H}/\hbar}, \quad \hat{q}_E(0) = \hat{q}(0)$$

- **thermische Korrelationsfunktionen von $\hat{q}_E(\tau_i)$**

$$\langle \hat{q}_E(\tau_1) \cdots \hat{q}_E(\tau_n) \rangle_\beta \equiv \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{q}_E(\tau_1) \cdots \hat{q}_E(\tau_n) \right)$$

- Pfadintegraldarstellung der zeitgeordneten Produkte

$$\langle T \hat{q}_E(\tau_1) \cdots \hat{q}_E(\tau_n) \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \oint \mathcal{D}q e^{-S_E[q]} q(\tau_1) \cdots q(\tau_n)$$

- Zustandssumme mit äußerer Quelle j

$$Z(\beta, j) = \int dq Z(\beta, j, q, q) \propto \oint \mathcal{D}q e^{-S_E[q] + \int d\tau j(\tau) q(\tau)}$$

- ist erzeugendes Funktional

$$\langle T \hat{q}_E(\tau_1) \cdots \hat{q}_E(\tau_n) \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta, 0)} \frac{\delta^n}{\delta j(\tau_1) \cdots \delta j(\tau_n)} Z(\beta, j) \Big|_{j=0}$$

- Schwingerfunktional

$$W(\beta, j) \equiv \log Z(\beta, j)$$

- erzeugt verbundene Korrelationsfunktionen

$$\langle T \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \cdots \hat{q}_E(\tau_n) \rangle_{c, \beta} = \frac{\delta^n}{\delta j(\tau_1) \cdots \delta j(\tau_n)} W(\beta, j) |_{j=0}$$

- Berechnung von Energielücke und Wellenfunktionen

$$\langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} \left(e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} \hat{q} e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat{H}} \hat{q} e^{-\tau_2\hat{H}} \right)$$

- Zerlegung der Eins mit Energie-Eigenzuständen $|n\rangle \Rightarrow$

$$\langle \cdots \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z} \sum_{n, m} e^{-(\beta-\tau_1+\tau_2)E_n} e^{-(\tau_1-\tau_2)E_m} \langle n | \hat{q} | m \rangle \langle m | \hat{q} | n \rangle$$

- Beiträge der angeregten Zustände **exponentiell unterdrückt**

$$\langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \sum_{m \geq 0} e^{-(\tau_1 - \tau_2)(E_m - E_0)} |\langle 0 | \hat{q} | m \rangle|^2$$

- Ähnlich für Einpunktfunktion: $\beta \rightarrow \infty \Rightarrow \text{VEV}$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle \hat{q}_E(\tau) \rangle_\beta = \langle 0 | \hat{q} | 0 \rangle$$

- **verbundene Zweipunktfunktion**

$$\langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_{c,\beta} \equiv \langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_\beta - \langle \hat{q}_E(\tau_1) \rangle_\beta \langle \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_\beta$$

- bei tiefen Temperaturen

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_{c,\beta} = \sum_{m > 0} e^{-(\tau_1 - \tau_2)(E_m - E_0)} |\langle 0 | \hat{q} | m \rangle|^2$$

- thermische Erwartungswerte $\xrightarrow{T \rightarrow 0}$ Vakuum Erwartungswerte
- Zusätzlich große Zeitdifferenzen $\tau_1 - \tau_2 \Rightarrow$

$$\langle \hat{q}_E(\tau_1) \hat{q}_E(\tau_2) \rangle_{c, \beta \rightarrow \infty} \longrightarrow e^{-(E_1 - E_0)(\tau_1 - \tau_2)} |\langle 0 | \hat{q} | 1 \rangle|^2$$

- **Energielücke** $E_1 - E_0$ aus exponentiellem Abfall
- **Übergangswahrscheinlichkeit** $|\langle 0 | \hat{q} | 1 \rangle|^2$ als Koeffizient
- höhere angeregte Energien/Zustände ebenfalls extrahierbar
- Sämtliche Eigenschaften in Korrelationsfunktionen codiert

Skalarfeld auf dem Gitter

- beschreiben **spinlose Teilchen** (keine Polarisationsfreiheitsgrade)
- Subsektor des Standardmodells (**Higgssektor**)
- wichtige Rolle in kosmologischen **Inflation**
- Fluktuationen = Keime für **Strukturentstehung**
- **Wirkung für reelles** (ungeladenes) Skalarfeld

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) .$$

- Übergang Punktmechanik \rightarrow Feldtheorie

$$q_i(t) \equiv q(t, i) \longrightarrow \phi(t, \mathbf{x}) \quad , \quad \sum_i \longrightarrow \int d^{d-1}x$$

- Quantisierung:

klassisches Feld $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow$ ortsabhängiger Operator $\hat{\phi}(\mathbf{x})$

- Zeitabhängigkeit gemäß Heisenberg-Gleichungen
- Substitutionsregeln \rightarrow

Funktionalintegral für zeitgeordnete VEV

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]/\hbar}$$

- Integration über alle Skalarfelder

Endliche Temperatur

- imaginäre Zeit $\tau = -it \Rightarrow$ euklidischer Feldoperator

$$\hat{\phi}_{\text{E}}(x) \equiv \hat{\phi}_{\text{E}}(\tau, \mathbf{x}) = e^{\tau \hat{H}} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}) e^{-\tau \hat{H}}, \quad x = (\tau, \mathbf{x})$$

- **VEV** haben (formale) Funktionalintegral-Darstellung

$$\langle 0 | T \hat{\phi}_{\text{E}}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{\text{E}}(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S_{\text{E}}[\phi]/\hbar}$$

- **endliche Temperatur** ($\hbar = 1$): β -periodische Felder

$$\begin{aligned} \left\langle T \hat{\phi}_{\text{E}}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{\text{E}}(x_n) \right\rangle_{\beta} &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\phi}_{\text{E}}(x_1) \cdots \hat{\phi}_{\text{E}}(x_n) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S_{\text{E}}[\phi]} \end{aligned}$$

Effektive Potentiale

- Phasenübergänge mit Ordnungsparameter \Rightarrow effektives Potential
= Legendre-Transformierte der Schwingerfunktion
= freie Energiedichte im Magnetfeld
- Funktionalintegraldarstellung: homogenes $j \Rightarrow W \propto \beta V$

$$Z(j) \equiv e^{\beta V w(j)} = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-S_E[\phi] + j \int_0^\beta d^d x \phi(x) \right)$$

- Schwingerfunktion $w(j) \Rightarrow$ mittleres Feld $\varphi = \langle \hat{\phi}_E(\mathbf{x}) \rangle_j$

$$w'(j) = \frac{1}{Z(j)} \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{-S_E[\phi] + j \int \phi} = \varphi$$

- konjugierte Variable $j \longleftrightarrow \varphi$

- Krümmung \propto verbundene Zweipunktfunktion

$$\frac{d^2 w}{dj^2} = \beta V \left(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right), \quad M = \frac{1}{\beta V} \int \hat{\phi}_E(x)$$

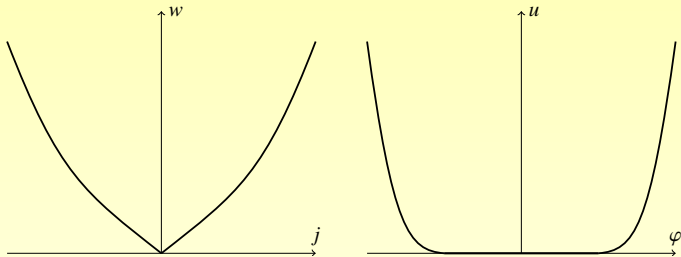
- effektives Potential $u =$ Legendre Transformierte von w :

$$u(\varphi) = (\mathcal{L}w)(\varphi) = \sup_j (j\varphi - w(j))$$

- Minimum von $u(\varphi) =$ Erwartungswert von $\hat{\phi}_E$

$$u'(\varphi) = j$$

- $u(\varphi_0) \leq u(\varphi)$ für alle $\varphi \implies \varphi_0 = \langle M \rangle_{j=0}$



Die L-Transformation bildet Plateaus in Knicke ab und umgekehrt

- Beispiel: $V(-\phi) = V(\phi) \Rightarrow H$ hat \mathbb{Z}_2 -Symmetrie, aber

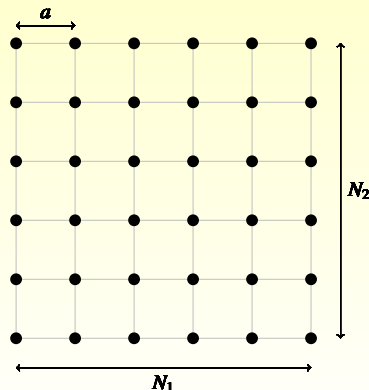
$$\lim_{j \downarrow 0} w'(j) = \lim_{j \downarrow 0} \langle \hat{\phi}_E \rangle \neq 0$$

- **spontane Brechung** der \mathbb{Z}_2 -Symmetrie (**spontane Magnetisierung**)

Gitterregularisierung

- d -dim. euklidische Raumzeit \rightarrow hyperkubisches Gitter Λ
- Gitterpunkte

$$x^\mu = a n^\mu \quad \text{mit} \quad n^\mu \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ Gitterkonstante}$$



- endliches Gitter: Länge in μ -Richtung: $L_\mu = aN_\mu$
- periodisches Gitter (Torus): Identifikation $x^\mu \sim x^\mu + L_\mu$
- Gitterkonstante a
Volumen: $V = a^d N_1 N_2 \cdots N_d$

- Diskretisierung der Wirkung: Integral \rightarrow Riemannsche Summe

$$\int d^d x \dots \longrightarrow a^d \sum \dots$$

- partielle Ableitung

$$(\partial_\mu \phi)(x) = \frac{1}{a} (\phi_{x+ae_\mu} - \phi_x)$$

- euklidische Wirkung des freien Gitterfeldes

$$S_E = \frac{a^d}{2} \sum_{\langle x,y \rangle} \left(\frac{\phi_x - \phi_y}{a} \right)^2 + \frac{m^2 a^d}{2} \sum_x \phi_x^2$$

- $\langle x, y \rangle$: nächste Nachbarn
- alle dimensionsbehaftete Größen in Einheiten von a :

$$am = m_L, \quad a^{(d-2)/2}\phi = \phi_L$$

- m_L und ϕ_L dimensionslose Gittergrößen
- Volumen als Vielfache von a^d
- Gitterwirkung des freien Feldes

$$S_L = \frac{1}{2} \sum_{\langle x, y \rangle} (\phi_{L,x} - \phi_{L,y})^2 + \frac{m_L^2}{2} \sum_x \phi_{L,x}^2$$

- wechselwirkendes Skalarfeld (lasse Index L weg)

$$S_L = \frac{1}{2} \sum_{\langle x, y \rangle} (\phi_x - \phi_y)^2 + \sum_x V(\phi_x)$$

Spinsysteme

- Skalarfeld \rightarrow spezielles klassisches Spinsystem
- allgemeiner: Spins s_x in allgemeinem Targetraum \mathcal{T}
 \mathcal{T} diskret: Isingartige Modelle
 \mathcal{T} kontinuierlich: kontinuierliche Spinmodelle
- klassische Hamiltonfunktion

$$H = - \sum_{x,y} J_{xy} s_x s_y + \sum_x V(s_x)$$

- homogene nächste-Nachbarn Wechselwirkung \Rightarrow

$$H = -J \sum_{\langle x,y \rangle} s_x s_y + \sum_x V(s_x)$$

- Zustandssumme (allgemeiner Fall)

$$Z(\beta) = \int d\mu(\omega) e^{-\beta H(\omega)}, \quad \omega = \{\mathbf{s}_x \in \mathcal{T} \mid x \in \Lambda\}$$

- Verteilungen der einzelnen Spins (für nichtlineare \mathcal{T})

$$d\mu(\omega) = \prod_{x \in \Lambda} d\mu(\mathbf{s}_x)$$

- Ising-Modell (harmonischer Oszillator der SM)

$$d\mu(\mathbf{s}) = \delta(\mathbf{s}^2 - 1) d\mathbf{s} \implies \mathbf{s} \in \{-1, 1\}$$

- \mathbb{Z}_2 -symmetrische $H \Rightarrow$ Zustandssumme für Ising-Modell

$$Z(\beta) = \sum_{\mathbf{s}_x = \pm 1} \exp\left(\beta J \sum_{\langle x, y \rangle} \mathbf{s}_x \mathbf{s}_y\right)$$

- Erwartungswert von $O(\omega)$ im kanonischen Ensemble

$$\langle O \rangle(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \int d\mu(\omega) O(\omega) e^{-\beta H(\omega)}$$

- Kopplung an äußeres Feld: $H = H_{h=0} - h \sum_x s_x$
- grundlegende Größen der Thermodynamik:

freie Energie: $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$

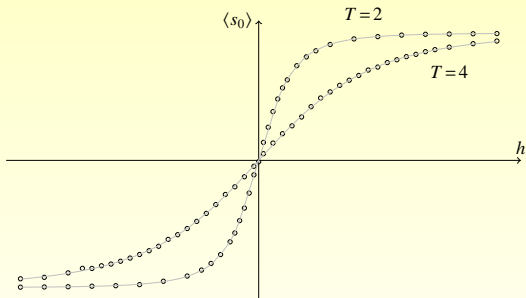
innere Energie: $U = \langle H \rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$

Magnetisierung: $m = \langle s_x \rangle = -\frac{\partial f}{\partial h}$

Suszeptibilität: $\chi = \sum_y (\langle s_x s_y \rangle - \langle s_x \rangle \langle s_y \rangle) = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \Big|_{h=0}$

Ising-Modell

- einfaches Modell für Ferromagnete
- exakt lösbar in 1d (Ising, Lenz)



Magnetisierung als Funktion von h für das 1d Ising-Modell
keine spontane Magnetisierung für $T > 0$

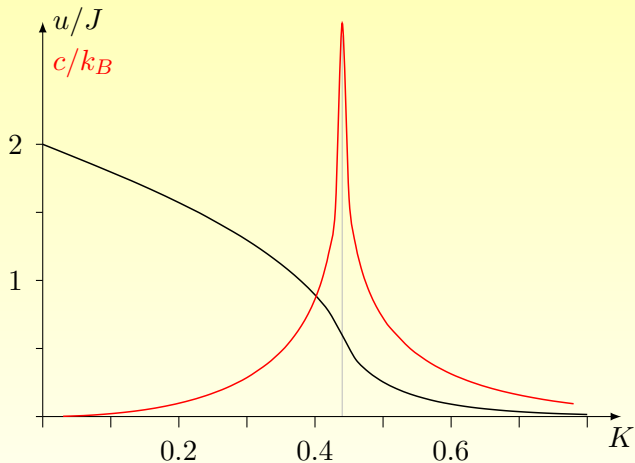
- **exakt lösbar** in $2d$ und für $h = 0$ (Onsager)
- freie Energiedichte: $\kappa = 2 \tanh(2\beta J) / \cosh(2\beta J) \Rightarrow$

$$\beta f(T) = 2\beta J - \log \cosh(2\beta J) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \log \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} \right)$$

- $f(T) \rightarrow$ innere Energiedichte, spezifische Wärme $c = \partial u / \partial T$
- findet **Phasenübergang** bei

$$\kappa_c = 1 \Leftrightarrow 2J\beta_c = \log \left(1 + \sqrt{2} \right) \Leftrightarrow T_c \approx 2.269J$$

- c, m, χ, \dots singularär bei T_c



Innere Energiedichte und spezifische Wärme des $2d$ Ising-Modells als Funktion von $K = \beta J$.

- Singularitäten von c , m , χ , $\dots \Rightarrow$ kritische Exponenten
- Exponenten **universell**: nur abhängig von Dimension, Symmetrie, Anzahl Freiheitsgrade
- **2d-Ising-Modell**: kritische Exponenten berechenbar
- **3d Ising-Modell**, Skalarfelder auf Gitter, Eichtheorien in $d > 2 \dots$
keine analytischen Lösungen bekannt
- Wie extrahiert man Information über
thermodynamische Größen
kritisches Verhalten
Spektrum (Massen), Matrixelemente, \dots
aus einer Gittertheorie

Monte Carlo Simulationen

- Gitterfeldtheorien bzw. Spinmodelle: Berechne

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int d\mu(\omega) e^{-S_L(\omega)}$$

- Zustandssumme

$$Z(\beta) = \int d\mu(\omega) e^{-S_L(\omega)}$$

- a-priori Maß

$$d\mu(\omega) = \prod_x d\mu(\phi_x), \quad \text{z.B.} \quad d\mu(\omega) = \prod_x d\phi_x$$

- Spinmodelle

$$S_L(\omega) \rightarrow \beta H(\omega), \quad d\mu(\omega) = \prod_x d\mu(\mathbf{s}_x)$$

Numerische Integration?

- Skalarfeld auf 64^4 -Gitter: $\approx 10^7$ -dimensionales Integral
- 10 Stützstellen in jeder Richtung $\Rightarrow 10^{10^7}$ Stützstellen
- **undenkbar mit numerischen Algorithmen**
Traub und Pahkov: Finanzproblem auf $[0, 1]^{360}$
- Hauptbeitrag zu Integral von
Konfigurationen mit **minimalem S_L oder H**
 \Rightarrow Algorithmen die wichtige Konfigurationen auswählen
- erzeuge Konfigurationen $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ verteilt nach $e^{-S_L(\omega)}$

$$\langle O \rangle \propto \sum_{\mu} O(\omega_{\mu})$$

Stochastische Methoden

- stochastische 'important sampling'-Algorithmen
- Markovkette:
erzeuge Konfigurationen verteilt nach W 'keitsverteilung

$$P_{\text{eq}}(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-S_L(\omega)}$$

- Übergangswahrscheinlichkeit $W(\omega, \omega')$
= Wahrscheinlichkeit, dass $\omega \rightarrow \omega'$ in einem Zeitschritt
- Forderungen an **stochastische Matrix**

$$W(\omega, \omega') \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{\omega'} W(\omega, \omega') = 1$$

- Übergangswahrscheinlichkeit $\omega \rightarrow \omega'$ nach **zwei Schritten**

$$W^{(2)}(\omega, \omega') = \sum_{\omega_1} W(\omega, \omega_1) W(\omega_1, \omega')$$

- nach n Schritten

$$W^{(n)}(\omega, \omega') = \sum_{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}} W(\omega, \omega_1) W(\omega_1, \omega_2) \cdots W(\omega_{n-1}, \omega')$$

- hohe Potenzen von W bestimmen **Langzeitverhalten**
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\omega)$

$$P(\omega) \geq 0, \quad \sum_{\omega} P(\omega) = 1$$

- W wirkt auf Raum der W 'keitsverteilungen

$$(PW)(\omega') = \sum_{\omega} P(\omega) W(\omega, \omega') \geq 0$$

$$\sum_{\omega'} (PW)(\omega') = \sum_{\omega} P(\omega) \sum_{\omega'} W(\omega, \omega') = \sum_{\omega} P(\omega) = 1$$

- Gehen alle ω mit W 'keit > 0 in jedes gegebene $\omega' \Rightarrow$
 W hat eindeutigen attraktiven Fixpunkt

$$P_{\text{eq}} W = P_{\text{eq}} \quad \text{und} \quad PW^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{\text{eq}}$$

- jede anfängliche P strebt gegen die P_{eq}
- finde W , so dass $P_{\text{eq}} \propto e^{-S_L}$ Gleichgewichtsverteilung

Detailliertes Gleichgewicht

- Gleichgewicht zwischen je zwei Konfigurationen:
im Gleichgewicht Prozesse $\omega \rightarrow \omega'$ und $\omega' \rightarrow \omega$ gleich häufig

$$P_{\text{eq}}(\omega)W(\omega, \omega') = P_{\text{eq}}(\omega')W(\omega', \omega)$$

- W erfüllt diese Bedingung $\Rightarrow P_{\text{eq}}$ Fixpunkt von W
- Testwahrscheinlichkeit und Akzeptanzrate

$$W(\omega, \omega') = T(\omega, \omega') A(\omega, \omega')$$

- ist ω realisiert, dann ist
 $T(\omega, \omega')$ Wahrscheinlichkeit dafür ω' zu testen
 $A(\omega, \omega')$ Annahmewahrscheinlichkeit des getesteten ω'

- Bedingung

$$\frac{T(\omega, \omega')A(\omega, \omega')}{T(\omega', \omega)A(\omega', \omega)} = \frac{P_{\text{eq}}(\omega')}{P_{\text{eq}}(\omega)}$$

- gute Wahl: hohe Akzeptanz $\max \{A(\omega, \omega'), A(\omega', \omega)\} = 1$

- Metropolis Algorithmus (diskrete Modelle)

Testwahrscheinlichkeiten gleich für alle N erreichbaren ω'

$$T(\omega, \omega') = \begin{cases} 1/N & \text{wenn } \omega \rightarrow \omega' \text{ möglich} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Akzeptanzrate, die detaillierte Gleichgewicht erfüllt

$$A(\omega, \omega') = \min \left(\frac{P_{\text{eq}}(\omega') T(\omega', \omega)}{P_{\text{eq}}(\omega) T(\omega, \omega')}, 1 \right)$$

Startkonfiguration $\omega = \{s_1, s_2, \dots\}$

- 1 **Vorschlag** für Änderung $s_1 \rightarrow s'_1$ mit zufälligem s'_1
- 2 Nimmt Wirkung ab, $\Delta S_L < 0$, dann ersetze s_1 durch s'_1
- 3 $\Delta S_L > 0 \Rightarrow$ wähle Zufallszahl $r \in [0, 1]$. Vorschlag s'_1 akzeptiert für $\exp(-\Delta S_L) > r$. Andernfalls s_1 nicht verändert.
- 4 Verfahre ebenso mit allen anderen Spinvariablen s_2, s_3, \dots
- 5 letzter Gitterpunkt erreicht \Rightarrow **Monte Carlo Iteration** beendet
- 6 beginne wieder bei Schritt 1

- gute Wahl der Startkonfiguration spart Rechenzeit
- realistische Simulationen:
 - tausende von MC-Iterationen (sweeps) \Rightarrow kleine stat. Fehler
 - braucht etwas Zeit, um Gleichgewicht zu erreichen
 - messe Observable um zu testen, ob Gleichgewicht erreicht
 - Gleichgewicht nach ME Iterationen erreicht \Rightarrow jetzt messen
 - sukzessive Konfigurationen korreliert (Autokorrelationszeit)
 - \Rightarrow werte nur jede MA'te Konfiguration
- andere lokale Algorithmen: Hasting, Wärmebad, . . .
- lokale Algorithmen: u.U. große Autokorrelationszeiten

3-Niveausystem (Boltzmannverteilung)

- Konfiguration \sim Energie-Niveaus, $\Delta S_L \sim \Delta E$
- Eigenzustände $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, Energien $E_1 < E_2 < E_3$
- ergodische **stochastische Matrix**

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - B_{21} - B_{31} & B_{21} & B_{31} \\ 1 & 1 - B_{32} & B_{32} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = e^{-\beta(E_2 - E_1)}$$

- z.B. $3 \rightarrow 1$ erniedrigt Energie $\Rightarrow A(3, 1) = 1$
- z.B. $1 \rightarrow 2$ erhöht Energie $\Rightarrow A(1, 2) = e^{-\beta E_2} / e^{-\beta E_1} = B_{21}$
- Potenzen W^n konvergieren gegen

$$W_{\text{eq}} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta E_1} & e^{-\beta E_2} & e^{-\beta E_3} \\ e^{-\beta E_1} & e^{-\beta E_2} & e^{-\beta E_3} \\ e^{-\beta E_1} & e^{-\beta E_2} & e^{-\beta E_3} \end{pmatrix}$$

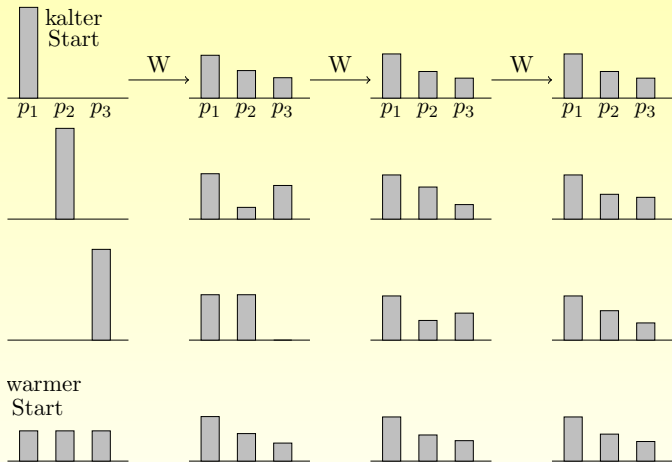
- jede Anfangsverteilung konvergiert gegen **Boltzmannverteilung**

$$(PW^n) \rightarrow P_{\text{eq}} = \frac{1}{Z} \left(e^{-\beta E_1}, e^{-\beta E_2}, e^{-\beta E_3} \right)$$

- **Konvergenzgeschwindigkeit** hängt von Anfangsverteilung P ab
- $T \rightarrow 0$: anfänglich Niveau mit kleinster Energie besetzt
- $T \rightarrow \infty$: alle Niveaus gleich besetzt
- Beispiel:

$$\beta E_2 - \beta E_1 = 0.5 \quad , \quad \beta E_3 - \beta E_2 = 0.3$$

- schlechte Konvergenz für invertierte Besetzung ($p_3 = 1$)



Konvergenz von Anfangsverteilungen ins Gleichgewicht

Anharmonischer Oszillator

- euklidische Wirkung (in Gittergrößen)

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{m}{2} (q_{k+1} - q_k)^2 + \mu q^2 + \lambda q^4 \right\}$$

- Änderung der Wirkung bei $q_k \rightarrow q'_k$

$$S(\omega') - S(\omega) \approx (q'_k - q_k) \left[-m(q_{k+1} + q_{k-1}) + (q'_k + q_k) \left\{ m + \mu + \lambda (q_k'^2 + q_k^2) \right\} \right]$$

- Virialsatz \Rightarrow

$$\frac{1}{2m} \langle 0 | \hat{p}^2 | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{q} V'(\hat{q}) | 0 \rangle$$

- Grundzustandsenergie

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} \left(\frac{1}{2} q V'(q) + V(q) \right)$$

- C-Programm berechnet

$$\langle q_k^2 \rangle \quad \text{und} \quad \langle q_k^4 \rangle \Rightarrow E_0$$

- ähnlich: E_1 und $|\psi_0(q)|^2$


```
/* program constants.h */
/* sets constants: N, ME, MA */
/* mass, mu, lambda, DELTA */
#define N 100 /*number of lattice points*/
#define M 1000000 /*number of iterations*/
#define ME 500 /*until equilibrium is reached*/
#define MA 5 /*every MA'th configuration is measured*/
#define mass 1.0
#define mu 1.0 /*coupling of q**2*/
#define lambda 0.0 /*coupling of q**4*/
#define DELTA 0.5 /*change of variable = DELTA(1-2 random)*/
double muleff=mass+mu;
double qnew,q[N];
unsigned int reject=0;
```

```

/* program stadhanho.h */
/* change of action */
double delta_action(double y, double x, double xs)
{ return (y-x)*((y+x)*(muleff+lambda*(y*y+x*x))-mass*xs); };
/* program mcsweep, arguments: array q[N], pointer to reject */
void mcsweep(int *zgr, double *q)
{ int i, j; double qnew, dS;
  for (i=0; i<MA; i++)
    for (j=0; j<N; j++)
      { qnew=q[j]+DELTA*(1-2*drand48());
        dS=delta_action(qnew, q[j], q[(j+1)%N]+q[(j+N-1)%N]);
        if (dS<0) q[j]=qnew;
        else
          if (exp(-dS)>drand48()) q[j]=qnew;
          else *zgr=*zgr+1;
        };
}
/* calculation of moments*/
double moments(int n, double *q)
{ int i; double sum=0;
  for (i=0; i<N; i++)
    sum=sum+pow(q[i], n);
  return sum/N;
}

```

```

/* program anharmonic2.c */
/* Metropolis algorithm for anharmonic oscillator */
/* calculates ground state energy*/
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include "constants.h"
#include "stdanho.h"
int main(void)
{
    unsigned int i, j;
    int *zgr, p; double moment2=0, moment4=0;
    zgr=&reject;
    srand48(time(NULL));
    /* initialize */
    for (i=0; i<N; i++)
        q[i]=DELTA*(1-2*drand48());
    /* thermalize */
    for (i=0; i<ME; i++)
        mcsweep(zgr, q);
}

```

```

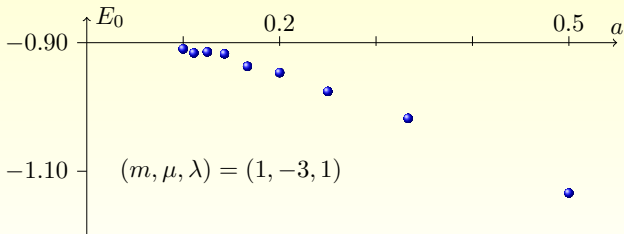
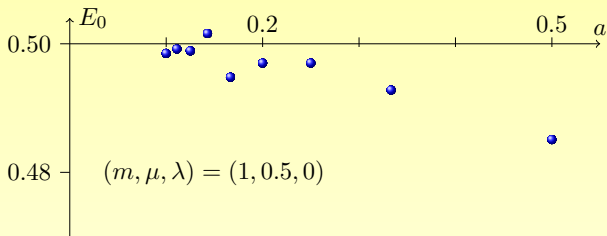
/* simulation and calculation of moments*/
reject=0;
for (i=0;i<M;i++)
{
    mcsweep(zgr,q);
    moment2=moment2+moments(2,q);
    moment4=moment4+moments(4,q);
};
/* ground state energy, output*/
moment2=moment2/M;
moment4=moment4/M;
printf("2nd_moment_=\t\t_%.7f\n4th_moment_=\t\t_%.7f\n"
"ground_state_energy_=\t_%.7f\n",
moment2,moment4,2*mu*moment2+3*lambda*moment4);
printf("\nrejected_configurations_%.2f\n",
(float)reject/(N*M*MA));
return 0;
}

```

Resultate der MC-Simulation

- harmonischer Oszillator: $(m, \mu) = (1, 0.5)$
- anharmonischer Oszillator: $(m, \mu, \lambda) = (1, -3, 1)$
- 'exakte Werte' numerisch berechnet

a	$E_0(1, 0.5)$	$E_0(\text{exakt})$	$E_0(1, -3, 1)$
1	0.4477	0.4473	-1.4624
1/2	0.4851	0.4851	-1.1339
1/3	0.4928	0.4932	-1.0177
1/4	0.4926	0.4962	-0.9758
1/5	0.4970	0.4976	-0.9466
1/6	0.4948	0.4983	-0.9369
1/7	0.5016	0.4988	-0.9173
1/8	0.4989	0.4991	-0.9144
1/9	0.4992	0.4993	-0.9160
1/10	0.4985	0.4994	-0.9097



Extrapolation der MC-Resultate zum Kontinuum (Skala $m = 1$)

Hybrid-MC Algorithmus

- Kombination von **Molekulardynamik** und **Metropolis-Algorithmus**
- Update ganze Konfigurationen mit guter Akzeptanz \Rightarrow erhält schnell unabhängige Konfigurationen
- MD: löse Bewegungsgleichungen numerisch und benutze **Ergodenhypothese: Scharmittel = Zeitmittel**
- Anfangskonfiguration $(q_0, p_0) \Rightarrow$ eindeutige Lösung von

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1)$$

- ohne numerische Fehler: Energie erhalten

Implementierung für skalares Feld

- erweiterter Phasenraum, Dimension $2|\Lambda|$
- Punkt im Phasenraum $\leftrightarrow \{\phi, \pi\}$

$$\phi = (\phi_x | x \in \Lambda) \quad , \quad \pi = (\pi_x | x \in \Lambda)$$

- Hilfs-Hamiltonfunktion

$$H(\phi, \pi) = \frac{\pi^2}{2} + S(\phi), \quad \pi^2 = \sum_{x \in \Lambda} \pi_x^2$$

- erzeugt Evolution in fiktiver Zeit, $(\phi, \pi) \rightarrow (\phi', \pi')$.
- Bildpunkt als Vorschlag, akzeptiert mit Wahrscheinlichkeit

$$A(\phi, \pi \rightarrow \phi', \pi') = \min \{1, \exp(H(\phi, \pi) - H(\phi', \pi'))\}$$

- exakte Lösung: $\Delta H = 0 \Rightarrow$ mit Sicherheit akzeptiert
- numerische **Rundungsfehler**: kleinere Akzeptanz möglich
- Wahl der Integrationszeit, so dass $A \approx 1$
- meiste Implementierungen: fiktive Impulse verteilt nach

$$P_G(\pi) = \mathcal{N}e^{-\pi^2/2}$$

- **Übergangswahrscheinlichkeit**

$$W(\phi, \phi') = \int \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\pi' P_G(\pi) T(\phi, \pi \rightarrow \phi', \pi') A(\phi, \pi \rightarrow \phi', \pi')$$

- detailliertes Gleichgewicht falls **Integrator zeitreversibel**, e.g. leap-frog

- Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_x &= \frac{\partial H}{\partial \pi_x} = \pi_x, & \dot{\phi} &= \pi \\ \dot{\pi}_x &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_x} = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi_x} = F_x(\phi), & \dot{\pi} &= F(\phi)\end{aligned}$$

- Zeitschritt für numerische Integration h
- ein Sweep: Integration über N Zeitschritte
- Punkt im Phasenraum nach k Schritten: $(\phi_{(k)}, \pi_{(k)})$
- Endpunkt $(\phi_{(N)}, \pi_{(N)})$
- **Algorithmus:** Anfangskonfiguration $\phi_{(0)}$ (kalt oder warm)

- 1 erzeuge Gauss-verteilte Impulse $\pi_{(0)}$, Varianz 1, Mittel 0
- 2 integriere einen halben Schritt

$$\pi_{(1/2)} = \pi_{(0)} + \frac{1}{2}hF(\phi_{(0)})$$

- 3 Iteriere folgende zwei Schritte

$$a) \quad \phi_{(k)} = \phi_{(k-1)} + h\phi_{(k-1/2)}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$b) \quad \pi_{(k+1/2)} = \pi_{(k-1/2)} + hF(\phi_{(k)}), \quad k = 1, \dots, N-1$$

- 4 Integriere Impulse einen halben Schritt

$$\pi_{(N)} = \pi_{(N-1/2)} + \frac{1}{2}hF(\phi_{(N)})$$

- 5 akzeptiere $(\phi', \pi') = (\phi_{(n)}, \pi_{(N)})$ mit obigem $A(\dots \rightarrow \dots)$
- 6 beginne von vorne bei Punkt 1

Eichtheorien

- Alle fundamentalen Theorien = Eichtheorien
- Elektrodynamik: Abelsche $U(1)$ Eichtheorie
- elektroschwache Wechselwirkung: $SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie
- starke Wechselwirkung: $SU(3)$ Eichtheorie
- Gravitation: Eichtheorie
- Materiefeld $\phi(x) \in W$, globale Transformation $\phi(x) \rightarrow U\phi(x)$
- invariante Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$, z.B.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi) - V(\phi)$$

- in invariantes Skalarprodukt auf W : $(U\phi, U\phi) = (\phi, \phi)$
- invariantes Potential $V(U\phi) = V(\phi)$

- Konstruktion einer lokale eichinvarianten Feldtheorie

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = U(x)\phi(x), \quad U(x) \in \text{Eichgruppe}$$

- benötigen kovariante Ableitung

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - igA_\mu \phi$$

- $D_\mu \phi$ transformiert wie ϕ falls

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} \partial_\mu UU^{-1} \in \text{Liealgebra}$$

- Feldstärke

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \in \text{Liealgebra}$$

- homogene Transformation

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$$

- Lagrangedichte $\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu, \phi, \partial_\mu \phi)$
- lorentzinvariant, spiegelinvariant, eichinvariant \Rightarrow

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi, D^\mu \phi) - V(\phi)$$

- Prinzip der minimalen Kopplung:
starte mit global invarianter Theorie, ersetze $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$
- addiere Yang-Mills Term $-\frac{1}{4}\text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ (cp. Elektrodynamik)
- Symmetrien und Teilcheninhalt \rightarrow Lagrangedichte (beinahe)

Paralleltransport

- \mathcal{C}_{yx} Weg von x nach y , Parametrisierung $x(s)$
- Paralleltransport von $\phi(x(s)) \equiv \phi(s)$:

$$0 = \dot{x}^\mu D_\mu \phi \iff \frac{d\phi(s)}{ds} = ig A_\mu(s) \dot{x}^\mu(s) \phi(s)$$

- zeitabhängige Schrödingergleichung mit $H = A_\mu(x(s)) \dot{x}^\mu(s)$
- sei $x(0) = x$ und $x(1) = y \Rightarrow$

$$\phi(y) = \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^1 du A_\mu(x(u)) \dot{x}^\mu(u) \right) \phi(x)$$

- Paralleltransporter längs Weg \mathcal{C}

$$U(\mathcal{C}, A) = \mathcal{P} \exp \left(ig \int_{\mathcal{C}} A \right) \in \text{Eichgruppe}$$

Kovariante Gitterableitung

- Eichtransformation

$$U(C_{yx}; A') = U(y) U(C_{yx}; A) U^{-1}(x)$$

- können Felder an verschiedenen Punkten vergleichen, z.B.

$$U(C_{yx})\phi(x) \quad \text{transformiert wie} \quad \phi(y)$$

- Übergang zum Gitter: Materiefeld $\phi(x)$ nur auf $x \in \Lambda$ definiert
- kovariante Gitterableitung

$$\frac{1}{a} \{ \phi(x + a\mathbf{e}_\mu) - U_\mu(x)\phi(x) \}$$

- $U_\mu(x)$ Paralleltransporter von x nach $x + a\mathbf{e}_\mu$

Gittereichtheorien

- Gitterwirkung für Materiefeld ($a = 1$)

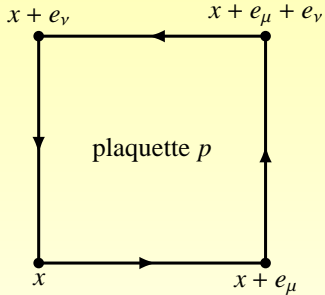
$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= -2\Re \sum_{x,\mu} (\phi(x + \mathbf{e}_\mu), U_\mu(x)\phi(x)) \\ &+ \sum_x \left(2d \sum_x (\phi(x), \phi(x)) + V(\phi(x)) \right) \end{aligned}$$

- klassisches Spinsystem
- lokal eichinvariante NN-Wechselwirkung
- Yang-Mills Wirkung

nichtkompaktes Feld $A_\mu(x) \longrightarrow$ kompaktes Feld $U_\mu(x)$

$$U_\mu(x) \approx e^{igA_\mu(x)}$$

- kompakte Eichfelder auf Links definiert $(x, \mu) \rightarrow U_\mu(x)$



- Transport um Plakette $p \sim (x, \mu, \nu)$

$$U_p(x) = U_{-\nu}(x + e_\nu) \times \\ U_{-\mu}(x + e_\mu + e_\nu) U_\nu(x + e_\mu) U_\mu(x)$$

- Baker-Hausdorff Formel

$$U_\mu(x) \approx e^{iagA_\mu(x)}, \quad a \ll 1 \\ \Rightarrow U_p = e^{ia^2gF_{\mu\nu}(x) + O(a^3)}$$

Transporter $U_{\mu\nu}(x)$ um
eine Plakette

- transformiert homogen

$$U_p(x) \rightarrow U(x) U_p(x) U^{-1}(x)$$

$$U_p + U_p^\dagger \approx 2 \cdot \mathbb{1} - a^4 g^2 F_{\mu\nu}^2(x) + O(a^6)$$

Yang-Mills Theorie auf Gitter

- eichinvariante Gitterwirkung für Eichfeld $U = \{U_\mu(x)\}$

$$S_W(U) = \frac{1}{g^2 N} \sum_p \text{tr} \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{2} (U_p + U_p^\dagger) \right\} \quad \text{Wilson}$$

- speziell $SU(2)$ Yang-Mills Theorie

$$S_W = \frac{1}{2g^2} \sum_p \text{tr} (\mathbb{1} - U_p)$$

- verbesserte Gitterwirkungen: verkleinere Fehler (Symanzik)

$$S_{YM} - S_W = O(a^2)$$

Funktionalintegral

- Mittelung über Gitterfelder $\{U_\mu(x)\}$

$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) \xrightarrow{?} \int \prod_{(x,\mu)} dU_\mu(x)$$

- Forderung: Maß eichinvariant
 $\Rightarrow dU_\mu(x)$ eindeutiges Haarmaß
- Erwartungswerte in reiner Eichtheorie

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{(x,\mu)} dU_\mu(x) O(U) e^{-S_W(U)}$$

- Zustandssumme

$$Z = \int \prod_{(x,\mu)} dU_\mu(x) e^{-S_W(U)}$$

Observablen

- Confinement

nur farbneutrale (eichinvariante) Zustände im Spektrum
charakteristisch für stark wechselwirkende Eichtheorien

QED: keine Confinement → Photonen

QCD: Confinement bei tiefen Temperaturen

- Gluebälle = farbneutrale gebundene Zustände von Gluonen
- Wie in Quantenmechanik

$$G_E(\tau) = \langle 0 | T \hat{O}(\tau) \hat{O}(0) | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | \hat{O} | n \rangle|^2 e^{-E_n \tau}$$

- asymptotisch für große euklidische Zeiten

$$G_E(\tau) \longrightarrow |\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle|^2 + |\langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle|^2 e^{-E_1 \tau} \left(1 + \mathcal{O}(e^{-\tau(E_2 - E_1)}) \right)$$

- angeregter Zustand mit $\langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle \neq 0$ diktiert Asymptotik
- $ME \neq 0$ falls $\hat{O} | 0 \rangle$ und $| 1 \rangle$ gleiche Quantenzahlen
Parität, Ladungskonjugation, kubische Gruppe
- eichinvariante Funktion $O(U)$ der Linkvariablen
- Gluebälle: O Kombination von Paralleltransportern, korrekte QZ
- berechne Erwartungswerte mit MC-Simulationen
- Spektrum der Gluebälle in MeV (Chen et al.)

J^{PC}	0^{++}	2^{++}	0^{-+}	1^{+-}	2^{-+}	3^{+-}
$m_G[\text{MeV}]$	1710	2390	2560	2980	3940	3600
J^{PC}	3^{++}	1^{--}	2^{--}	3^{--}	2^{+-}	0^{+-}
$m_G[\text{MeV}]$	3670	3830	4010	4200	4230	4780

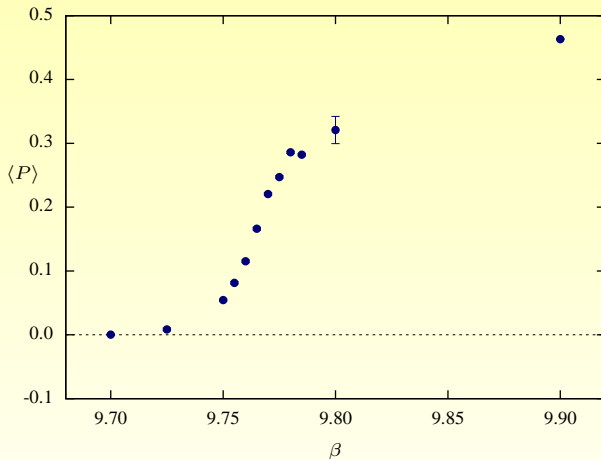
Eichtheorien bei endlicher Temperatur

- Zustandssumme: β -periodische Eichfelder

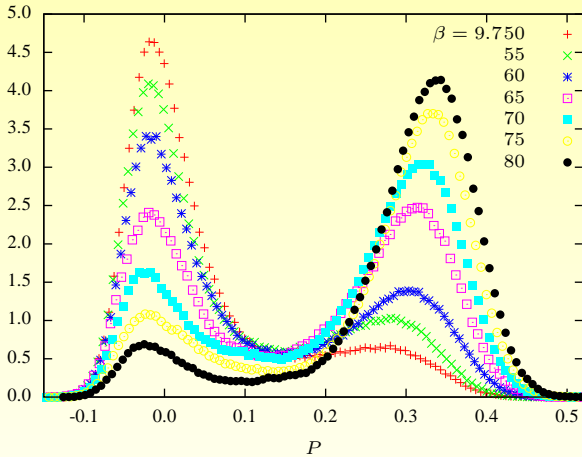
$$Z(\beta) = \oint \prod_{(x,\mu)} dU_\mu(x) e^{-S_W(U)}$$

⇒ thermodynamische Potentiale

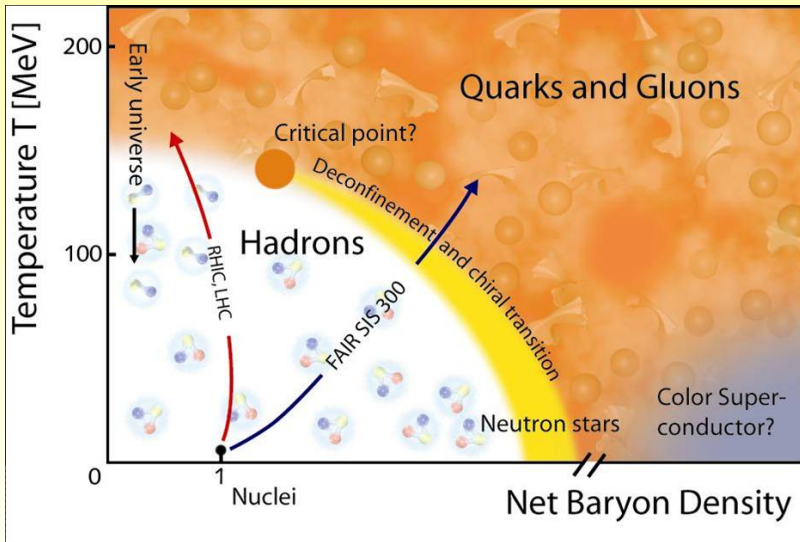
- tiefe Temperaturen: confinement → Gluebälle
- hohe Temperaturen: deconfinement → Plasma von Gluonen
- **Phasendiagramm**, Ordnung der Phasenübergänge
- **QCD: Eichfelder plus minimal gekoppelte Quarkfelder**



Verhalten der Polyakovschleifen beim Phasenübergang, $\beta \sim 1/g^2$



Histogramm für Polyakovschleife am Phasenübergang



mögliches Phasendiagramm der QCD

- Simulationen: (lokaler) Hybrid-MC Algorithmus
- unproblematisch für Theorien ohne Fermionen und $T > 0$
- Simulationen mit Fermionen schwierig und kostspielig
Extrapolation zum **Kontinuum** $a \rightarrow 0$
realistische **kleine Quarkmassen**
- Theorien bei **endlicher Dichte** ($\mu \neq 0$):
mit Fermionen Wirkung nicht reell, keine W'keitsmass
 \Rightarrow übliche Simulationstechniken nicht anwendbar
- bisher
Simulation von **$SU(2)$ Baby-QCD** (Swansea, ...)
Simulation von **G_2 -QCD** (Jena, B. Wellegehausen, A. Maas, A.W.)