Das Standardmodell der Kosmologie

A. Wipf
Theoretisch-Physikalisches-Institut
FS-Universität Jena
Max-Wien-Platz 1, 07743 Jena

aufgeschrieben und ergänzt von:
Helia Hollmann, München
und Joachim Lindig, Leipzig

18. Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dies sind die Aufzeichnungen meiner Vorträge (5 Doppelstunden), welche ich in Saalburg gehalten habe. Helia Hollmann und Joachim Lindig übernahmen die undankbare Aufgabe, aus meinen nicht immer kohäherenten Notizen und der Literatur ein verständliches Manuskript zu erstellen. Sie haben weiter die in Saalburg gestellten Übungen eingebunden und mögliche Lösungen angegeben. Herzlichen Dank für Ihre Mitarbeit. Nun aber zu unserem eigentlichen Thema, der Kosmologie.

Die Kosmologie und insbesondere die Entstehung von Strukturen ist in den letzten Jahren ein sehr aktives Forschungsgebiet. Ein Teil der Faszination an diesem Gebiet rührt von seinem beinahe interdisziplinären Charakter her. Die gegenwärtige Forschung reicht von Quantengravitation und -kosmologie, allgemeiner Relativitätstheorie, Teilchenphysik, statistischer Mechanik, nicht-linearer Hydrodynamik bis zu Beobachtungen in allen Wellenlängenbereichen, von den Radio- bis zu den Gammastrahlen.

Ab 1915, dem Geburtsjahr der Allgemeinen Relativitätstheorie, wurde die Kosmologie vermehrt zur exakten Wissenschaft. Einige Höhepunkte der seitherigen Entwicklung:

- 1922 fand Friedmann Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, die einen expandierenden Kosmos beschreiben.
- Hubble überzeugte 1929 die astronomische Gesellschaft, daß das Universum expandiert.
- Alpher und Herman berechneten 1949 die Häufigkeit der Elemente, welche bei Kernreaktionen im frühen Universum erzeugt wurden.
- Penzias und Wilson entdeckten 1965 die kosmologische Hintergrundstrahlung. Diese Entdeckung wird oft auch als Beginn der physikalischen Kosmologie betrachtet.
- In den 70'er Jahren wird die Enstehung und das Wachstum von Strukturen im Universum aufgrund von gravitativen Instabilitäten untersucht.
- 1982: Geburtsjahr der inflationären Modelle.

- Cobe findet 1992 $\Delta T/T$-Fluktuationen im Spektrum der Hintergrundstrahlung.

Die moderne Kosmologie stellt viele neue Herausforderungen an die Physik, sei es von der theoretischen oder der experimentellen/beobachtenden Seite.

Literatur

G. Börner, The Early Universe: Facts and Fictions, Springer 1988.

E.W. Kolb and M.S. Turner, The Early Universe, Addison-Wesley 1990.

J.V. Narlikar, Introduction to Cosmology, CUP 1993.

S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley 1972.

Y.B. Zeldovich and I.D. Novikov, The Structure and Evolution of the Unviverse, UCP 1983.

D.W. Sciama, Modern Cosmology and the Dark Matter Problem, CUP 1993.

P. Coles and F. Lucchin, Cosmology, Wiley 1995.

Notes by S. Straumann, Universität Zürich.

1 Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Einer der Grundpfeiler der Kosmologie ist die Allgemeine Relativitätstheorie. Deshalb sollen vorweg einige Fakten wiederholt und die zur Berechnung kosmologischer Modelle wichtigen Größen auf knappen Raum eingeführt werden. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf die Literatur verwiesen (siehe z.B. [Wei72], [Pee93]).

Das Koordinatensystem für Berechnungen wird festgelegt durch Angabe des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ im Linienelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu, \qquad \mu, \nu = 0, .., 3. \tag{1}$$

Tensoren sind durch ihr Verhalten unter Koordinatentransformationen $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ charakterisiert. Allgemein gilt für einen Tensor mit oberen und unteren Indizes

$$T'^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} \dots T^{\rho\sigma\dots}_{\gamma\delta\dots}.$$

Indizes werden mit dem metrischen Tensor herauf- oder heruntergezogen

$$A^\mu(x) = g^{\mu\alpha} A_\alpha(x), \qquad A_\mu(x) = g_{\mu\alpha} A^\alpha(x).$$

Außerdem gilt

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\nu.$$

Der metrische Tensor ist symmetrisch, d.h. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Aus im werden die anderen geometrischen Größen – Christoffelsymbole, der Krümmungstensor, der Ricci–Tensor und der Ricci–Skalar – abgeleitet. Zur Vereinfachung der Notation wird vereinbart, daß über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Die Christoffelsymbole $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ sind definiert als

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right). \tag{2}$$

Sie sind symmetrisch in den unteren beiden Indizes $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$. “$,\beta$” bezeichnet die partielle Ableitung nach x^β. Um die Christoffelsymbole zu berechnen, bieten sich verschiedene Methoden an: Man kann die definierende Gleichung verwenden oder das Variationsprinzip anwenden. Testteilchen, die nur gravitativ wechselwirken, bewegen sich auf Geodäten, das sind die kürzesten

Kurven, die in einem gekrümmten Raum zwei Punkte miteinander verbinden

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3}$$

Oder anders ausgedrückt: Sie bewegen sich entlang stationärer Bahnen, die L minimieren

$$L = \delta\left(\int_{P_1}^{P_2} ds\right).$$

Um die Einsteinschen Feldgleichungen formulieren zu können, fehlen noch weitere Ingredienzen, nämlich die kovariante Ableitung und der Riemannsche Krümmungstensor $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$, aus dem der Ricci–Tensor $R_{\mu\nu}$ und der Krümmungskalar R berechnet werden können. Mit Hilfe der Christoffelsymbole wird die kovariante Ableitung von Tensoren beliebiger Stufe definiert.

$$T^{\alpha\beta\ldots}_{\gamma\delta\ldots;\xi} = T^{\alpha\beta\ldots}_{\gamma\delta\ldots,\xi} + \Gamma^\alpha_{\xi\sigma}T^{\sigma\beta\ldots}_{\gamma\delta\ldots} + \Gamma^\beta_{\xi\sigma}T^{\alpha\sigma\ldots}_{\gamma\delta\ldots} + \ldots - \Gamma^\sigma_{\gamma\xi}T^{\alpha\beta\ldots}_{\sigma\delta\ldots} - \Gamma^\sigma_{\delta\xi}T^{\alpha\beta\ldots}_{\gamma\sigma\ldots}.$$

"$;\xi$" bezeichnet die kovariante und "$,\xi$" nach wie vor die partielle Ableitung nach x^ξ. Der metrische Tensor ist kovariant konstant: $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$.

Der Riemannsche Krümmungstensor berechnet sich aus den Christoffelsymbolen wie folgt:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\beta}.$$

Der Krümmungstensor mit allen Indizes unten, ist antisymmetrisch unter Vertauschung des ersten und zweiten, bzw. des dritten und vierten Index:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\nu\beta}.$$

er ändert sich nicht bei Vertauschung des vorderen und hinterem Indexpaares:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\beta\nu\alpha\mu}.$$

Daneben erfüllt er noch die Bianchi-Identitäten

$$\sum_{zykl\ \beta,\nu\gamma} R_{\alpha\mu\beta\nu;\gamma} = 0.$$

Den Ricci–Tensor $R_{\mu\nu}$ erhält man durch Spurbildung aus dem Krümmungstensor $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}.$$

Er ist symmetrisch. Eine weitere Spurbildung liefert den Ricci–Skalar R:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie sind die Geometrie des Raumes und die Materie gekoppelt. Der metrische Tensor bestimmt die Bahnen der Teilchen, andererseits ist jedoch $g_{\mu\nu}$ durch die Materie (und die Koordinatewahl) bestimmt. Dabei ist der Energie–Impuls–Tensor $T_{\mu\nu}$, der Materie die Quelle für das Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$. Das ist ähnlich wie im Newtonschen Limes, in dem ρ in $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ Quelle des Gravitationspotentials ϕ ist. Dieser Zusammenhang ist ausgedrückt in den Einsteinschen Feldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Dabei ist $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ der Einstein–Tensor und Λ die kosmologische Konstante. Der Energie–Impuls–Tensor legt ein Materiemodell fest. Hier wird im folgenden nur der Energie–Impuls–Tensor einer idealen Flüssigkeit eine Rolle spielen:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \qquad u^\mu u_\mu = 1. \tag{5}$$

Zerlegt man den Energie–Impuls–Tensor in seine Bestandteile parallel und senkrecht zur Vierergeschwindigkeit

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 u^\mu u^\nu + p h^{\mu\nu}, \qquad h^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}$$

so sieht man (man gehe ins lokale Ruhesystem der Flüssigkeit, für welches $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ist), daß p der isotrope Druck und ρ die Energiedichte im Ruhesystem der idelalen Flüssigkeit sind. Wirken keine äußeren Kräfte auf das System ein, so verschwindet die kovariante Divergenz des Energie–Impuls–Tensors: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, und der Energie–Impuls–Tensor ist kovariant erhalten. Er ist außerdem symmetrisch.

Übungen:

1. Berechne den Krümmungsskalar für die Robertson–Walker–Metrik
$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right).$$
2. Berechne die Christoffelsymbole des Linienelementes
$$ds^2 = (1 + \Phi) dt^2 - (2\Phi - 1) \delta_{ij} dx^i dx^j.$$
3. Leite die relativistische Kontinuitätsgleichung her.
4. Finde die relativistische Eulergleichung.

2 Das kosmologische Prinzip

Das kosmologische Prinzip postuliert, daß es auf Skalen von $\geq 10^8 - 10^9$ Lichtjahren im Universum keinen ausgezeichneten Ort und keine ausgezeichnete Richtung gibt (Homogenität und Isotropie des Universums). Da das kosmologische Prinzip die möglichen Geometrien stark einschränkt, sollen Argumente angeführt werden, die das Postulat plausibel erscheinen lassen:

- Homogene und anisotrope Universen (z.B. das Mixmaster–Universum von Misner) werden durch viskose Dissipation von Neutrinos isotropisiert ([Pee93], [Wei72]).
- Inflationäre Phasen führen zu homogenen Universen (siehe [Boe88], [Pee80]).
- Das kosmologische Prinzip stimmt mit den Beobachtungen überein (Radiogalaxien, Galaxiencluster, Quasare, Mikrowellenhintergrund) (siehe z.B. [Boe88]).

Übersetzt man das Prinzip in die Sprache der Riemannschen Geometrie, so heißt das, daß die Hyperflächen konstanter kosmologischer Zeit einen maximal symmetrischen Raum, d.h. einen Raum konstanter Krümmung, bilden. Dabei kann sich die Krümmung der gesamten Raum-Zeit aber mit der Zeit ändern.

Die Metrik eines Universums, das dem kosmologischen Prinzip genügt, sieht folgendermaßen aus:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) \equiv c^2dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (6)$$

Sie wird Robertson–Walker–Metrik genannt. Stellt man sich vor, daß das Universum mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, so sind Koordinaten r, θ, ϕ die Koordinaten eines mitbewegten Flüssigkeitelements. t ist die Eigenzeit einer mitbewegten Uhr in dem Element mit konstanten r, θ, ϕ. $a(t)$ ist ein Skalenfaktor mit der Dimension einer Länge. Er ist eine intrinsisch geometrische Größe und definiert eine geometrische und damit auch physikalische Zeit. k heißt Krümmungsparameter. Die Geometrie des Raumes ändert sich je nach Vorzeichen von k. Man unterscheidet daher die Fälle $k = 0, 1, -1$.

In zwei Dimensionen lassen sich die homogenen und isotropen Räume leicht klassifizieren, nämlich

1. Die Ebene mit dem Linienelement:
$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$
Das entspricht dem Wert $k = 0$.

2. Die sphärische Fläche mit Radius 1:
$$dl^2 = \sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\phi^2, \qquad 0 \leq r < 1$$
Dabei wurde $r = \sin\theta$ gesetzt. Diese Geometrie entspricht der Wahl $k = 1$. r verschwindet an den Polen und ist gleich 1 am Äquator.

3. Die Fläche eines Hyperboloides:
$$dl^2 = \sinh^2\theta d\phi^2 + d\theta^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\phi^2, \qquad 0 \leq r \leq \infty,$$
mit $r = \sinh\theta$ und $k = -1$.

Sei nun $a^2 dl^2$ der räumliche Anteil der Metrik (6), so findet man analog

1. den flachen Raum für $k = 0$ mit $dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$,

2. den positiv gekrümmten Raum für $k = 1$ mit
$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2, \qquad r = \sin\chi.$$
Der Raum ist geschlossen, hat keinen Rand und ein endliches Volumen.

3. Ferner gibt es den negativ gekrümmten Raum ($k = -1$) mit
$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega^2, \qquad r = \sinh\chi.$$

Dabei ist $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ und $0 \leq \chi < \pi$ für $k = 1$, bzw. $0 \leq \chi < \infty$ für $k = -1$. Bezeichnen wir den räumlichen Anteil der vierdimensionalen Metrik mit
$$a^2 dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$
so berechnet man das Volumen $V(\chi)$ innerhalb des Radius χ und die Oberfläche $S\chi)$ zu
$$V(\chi) = \int_0^\chi d\chi d\theta d\phi \sqrt{\det \gamma_{ij}} \qquad \text{und} \qquad S(\chi) = \int d\theta d\phi \sqrt{\det \gamma_{ij}}$$

Für $k = 1$ ergibt sich

$$V(\chi) = 2\pi a^3(\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi) \qquad \text{und} \qquad S(\chi) = 2\pi a^2 \sin^2 \chi,$$

für $k = -1$ erhält man

$$V(\chi) = 2\pi a^3(\frac{1}{2}\sinh 2\chi - \chi) \qquad \text{und} \qquad S(\chi) = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi.$$

In **Tabelle 1** sind die Volumina und Oberflächen für die drei Typen von Geometrien zusammengefaßt:

	$k=1$		$k=0$		$k=-1$
$V(\chi)$	$\frac{4\pi}{3}\chi^3(1-\frac{\chi^2}{5}...)$	$\leq$	$\frac{4\pi}{3}\chi^3$	$\leq$	$\frac{4\pi}{3}\chi^3(1+\frac{\chi^2}{5}...)$
$S(\chi)$	$4\pi\chi^2(1-\frac{\chi^2}{3}...)$	$\leq$	$4\pi\chi^2$	$\leq$	$4\pi\chi^2(1+\frac{\chi^2}{3}+...)$

Tabelle 1: Entwicklung der Volumina und der Oberflächen für kleine χ

Vergleicht man den Inhalt der **Tabelle 1** mit dem Volumen $V_0(\chi)$ und der Oberfläche $S_0(\chi)$ einer geodätischen Kugel um einen isotropen Punkt

$$V_0(\chi) = \frac{4\pi}{3}(\chi^3 - \frac{1}{5}C_G\chi^5 + ...) \qquad \text{und} \qquad S_0(\chi) = 4\pi(\chi^2 - \frac{1}{3}C_G\chi^4 + ...)$$

so liest man die Gaußsche Krümmung C_G der Räume zu $C_G = \frac{k}{a^2}$ ab.

Übungen:

1. Wie lange braucht ein Lichtstrahl, um das Einstein–Universum

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(d\chi^2 - \sin^2\chi d\Omega^2),$$

mit $a =$ konstant $\approx 10^{29}$ cm und $0 \leq \chi < \pi$ zu umrunden?

3 Die Friedmann Modelle

Die sogenannten Friedmann–Lemaître–Modelle sind eine sehr einfache Familie von Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie die dem kosmologischen Prinzip genügen. Ingredienzen der Einsteinschen Feldgleichungen sind einerseits die Robertson–Walker–Metrik (6), von der Seite der Geometrie und andererseits der Energie–Impuls–Tensor einer idealen Flüssigkeit (5). Setzt man sowohl $g_{\mu\nu}$ als auch $T^{\mu\nu}$ in die Einsteinschen Feldgleichungen ein, so folgen die Friedmanngleichungen:

$$\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a = -\frac{4\pi G}{3}a(\rho + 3p) \tag{7a}$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k - \Lambda a^2 = -8\pi G p a^2. \tag{7b}$$

Unter Benutzung der ersten Gleichung kann die zweite Friedmanngleichung auch folgendermassen geschrieben werden

$$\dot{a}^2 + k - \frac{\Lambda}{3}a^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2. \tag{8a}$$

Die Zeitentwicklung des Skalenparameters a kann aus diesen Gleichungen gewonnen werden, falls man eine Zustandsgleichung vorgibt. Gleichung (8) kann man auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{k}{a^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) + \frac{\Lambda}{3}, \qquad \rho_c = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{8\pi G}H^2$$

$H = \frac{\dot{a}}{a}$ mißt die relative Geschwindigkeit zwischen zwei mitbewegten 'Galaxien' und heißt Hubble–Parameter. $H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$ ist der Hubble–Parameter zur Zeit t_0, das ist heute. H_0 wird auch Hubble–Konstante genannt. Von H_0 wird später noch die Rede sein.

Verschwindet die kosmologische Konstante, so bestimmt die Dichte – wie auch nicht anders zu erwarten – maßgeblich die Geometrie des Universums. Man unterscheidet die Fälle

(a) $\rho = \rho_c$: Dann ist $k = 0$ und das Universum ist flach.

(b) $\rho > \rho_c$: So ist $k > 0$ und das Universum geschlossen.

(c) $\rho < \rho_c$: Mit $k < 0$ und einem offenen Universum.

$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ wird auch Dichteparameter genannt. Multipliziert man die Friedmann Gleichungen (8) mit dem Skalenfaktor a, leitet sie dann ab und nutzt die zweite Friedmanngleichung in (7), so folgt

$$\frac{8\pi G}{3}\frac{d}{dt}(a^3\rho) = \frac{d}{dt}(a\dot{a}^2 + ak - \frac{\Lambda}{3}a^3) = \dot{a}a^2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{k}{a^2} - \Lambda\right)$$
$$= \dot{a}a^2(-8\pi Gp).$$

Damit erhält man

$$p\frac{d}{dt}a^3 = -\frac{d}{dt}(\rho a^3) \Longleftrightarrow p = -\frac{d}{dt}(\rho a^3)/\frac{d}{dt}a^3,$$

d.h. der Druck ist gleich der Änderung der Energie in einem mitbewegten Volumen dividiert durch die Änderung dieses Volumens. Mit einer Zustandsgleichung $p(\rho)$ so können wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2. \tag{9}$$

benutzen, um ρ als Funktion von a zu bestimmen.

Übungen:

1. Zeige, daß für ein Friedmann–Universum mit $p = \omega\rho,\ 0 \leq \omega \leq 1$ und $\Lambda = 0$
$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega} + 1 - \Omega_0\right]$$
gilt.

3.1 Diverse Spezialfälle

Nun sollen einige Spezialfälle diskutiert werden:

1. Für ein Strahlungsfeld, d.h. $p = \frac{1}{3}\rho$ läßt sich Gleichung (9) einfach lösen. Man erhält $\rho \sim a^{-4}$. Die Energiedichte nimmt aufgrund der Ausdehnung wie ($\sim \frac{1}{a^3}$) ab. Zusätzlich hat man einen Rotverschiebungseffekt, der proportional zu $\frac{1}{a}$ ist.

2. Im Falle eines statischen Universums (a ist konstant), vereinfachen sich die Friedmann–Gleichungen zu
$$k - \frac{\Lambda}{3}a^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho \tag{10a}$$
$$8\pi Gp = -\frac{k}{a^2} + \Lambda. \tag{10b}$$

Für eine verschwindende kosmologische Konstante folgt aus Gleichung (10a) sofort, daß k positiv sein muß. Wegen (10b) muss der Druck dann aber negativ sein. Diese Beobachtung verleitete Einstein dazu, ein kosmologische Konstante einzuführen. Man kann allerdings zeigen, daß solch ein statisches Einstein–Universum instabil ist.

3. Um die Abbremsung des Universums zu diskutieren, wollen wir annehmen, daß die kosmologische Konstante Λ verschwindet.
Gleichung (7a) vereinfacht sich auf

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a(\rho + 3p).$$

Für $\rho + 3p > 0$ ist damit die Beschleunigung $\frac{\ddot{a}}{a}$ negativ. Im $a - t$–Diagramm ist die Krümmung positiv, d.h. $a(t)$ nach unten konkav. Da das Universum expandiert, ist auch die Steigung positiv. Man schließt daraus, daß $a(t_0)$ zu einer endlichen Zeit in der Vergangenheit 0 war, es also eine Singularität gegeben hat. Außerdem läßt sich das Alter des Universums mit Hilfe der Hubble–Konstanten nach oben abschätzen

$$t_0 < \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)} = \frac{1}{H_0}.$$

4. Auch über die Zukunft des Universums läßt sich mit Hilfe der Friedmanngleichungen einiges lernen: Ist $p \geq 0$, so fällt wegen (9) ρ mindestens wie a^{-3} ab. Damit kann die rechte Seite der Friedmanngleichung (7b) vernachlässigt werden. Für die drei Typen von Geometrien erhält man

   - $k = -1 :\ a(t) \sim t \quad \text{für} \quad t \to \infty$
   - $k = 0 :\ \dot{a}$ geht von oben gegen 0
   - $k = 1 :\ \dot{a} = 0 \quad \text{für} \quad \rho a^2 = \frac{3}{8\pi G}$
     Mit der zweiten Friedmanngleichung folgt in diesem Fall, daß das Friedmann–Universum in einer endlichen Zeit zu $a = 0$ kollabiert.

5. Die kosmologische Konstante kann durch eine Redefinition von Druck und Dichte absorbiert werden. Aus den Friedmanngleichungen (7) wird

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) \tag{11a}$$

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \tilde{\rho} a^2 \tag{11b}$$

$\tilde{p}$ und $\tilde{\rho}$ sind dabei

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}.$$

$\tilde{p}$ und $\tilde{\rho}$ können als effektiver Druck und effektive Dichte interpretiert werden. Schränkt man sich nun wieder auf die statischen Lösungen der Friedmanngleichungen ein, so findet man

$$\tilde{\rho} = -3\tilde{p} = \frac{3k}{8\pi G a^2}$$

d.h. Druck und Dichte sind bestimmt durch a. Für ein Staubuniversum ($p = 0$, nichtrelativistisch) gilt

$$\Lambda = \frac{k}{a^2} \qquad\qquad \rho = \frac{k}{4\pi G a^2}.$$

Damit folgt aber, daß k und die kosmologische Konstante größer als 0 sind. Eine positive kosmologische Konstante wirkt der gravitativen Anziehung entgegen und sorgt dafür, daß es statische Lösungen der Friedmann Gleichungen gibt. Da Gravitation auf Materie universell anziehend wirkt, beschreibt die kosmologische Konstante "Materie", die sich sehr verschieden von "vernünftiger" Materie verhält.

Übungen:

1. Berechne im materiefreien Einstein–DeSitter–Universum mit kosmologischer Konstante den Skalenparameter $a(t)$. Unterscheide zwischen den drei Fällen $k = 0, k = 1, k = -1$!

3.2 Das Hubble–Gesetz, die Rotverschiebung und der Bremsparameter

Die Hubble–Konstante ist eine der wichtigsten kosmologischen Größen. Deshalb wird auf sie nun näher eingegangen. Sei P_0 der Ursprung des Polarkoordinatensystems und P ein beliebiger anderer Punkt. Der Abstand d_P zwichen P_0 und P, gemessen zu gegebener Zeit t, wird mit Hilfe der Robertson–Walker–Metrik berechnet

$$d_P = \int dl = \int_0^r \frac{a dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} = af(r) = a \begin{cases} \arcsin r, & k = 1 \\ r, & k = 0 \\ \text{arcsinh} r, & k = -1 \end{cases}$$

Die Eigendistanzen zu Zeiten t und t_0 hängen gemäß $d_P(t_0) = \frac{a_0}{a} d_P(t)$ zusammen. Die Distanz einer Quelle kann sich also aufgrund der t–Abhängigkeit von a mit der Zeit ändern. Dann hat P eine radiale Geschwindigkeit relativ zum Ursprung gemäß dem Hubble Gesetz

$$v_r = \dot{a} f(r) = H d_P.$$

Eine weitere kosmologisch wichtige Größe ist die Rotverschiebung z. Sie ist direkt beobachtbar. Man stelle sich vor, daß ein Sender Licht der Wellenlänge λ_e emittiere und ein Empfänger Licht der Wellenlänge λ_0 beobachtet. Die Rotverschiebung z ist definiert als

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}.$$

Ursache der Rotverschiebung ist die Änderung des Skalenfaktors a: Licht bewegt sich entlang von Geodäten, d.h. es gilt

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} = f(r)$$

Da $f(r)$ zeitunabhängig ist, gilt auch

$$f(r) = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = f(r) + c\frac{\delta t_0}{a(t_0)} - c\frac{\delta t_e}{a(t_e)}.$$

Also folgt

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}.$$

Falls nun $\Delta t_e = \frac{1}{\nu_e}$ und $\Delta t_0 = \frac{1}{\nu_0}$ ist, wo ν_e und ν_0 die Frequenzen des emittierten bzw. absorbierten Lichts bezeichnen, so ist $\nu_e a_e = \nu_0 a_0$ und man findet folgende wichtige Beziehung zwischen a und der Rotverschiebung:

$$z + 1 = \frac{a_0}{a_e}. \tag{12}$$

Neben der Hubblekonstanten H_0 ist der dimensionslose Bremsparameter q_0 der zweite wichtige Parameter der die Dynamik des Universums bestimmt. Entwickelt man $a(t)$ um $a(t_0) = a_0$

$$a(t) = a_0 \left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + ...\right),$$

so ist

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} a(t_0).$$

Oft ist es nützlich, die Rotverschiebung in Potenzen von $(t - t_0)$ zu kennen. Wegen (12)

$$\begin{aligned} z &= -1 + \frac{1}{1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \ldots} \\ &\sim H_0(t_0 - t) + (1 + \frac{q_0}{2}) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Für r findet man in Potenzen von z

$$r = \frac{c}{a_0 H_0} \left(z - \frac{1}{2}(1 + q_0) z^2 + \ldots \right).$$

Nun aber zurück zu den kosmologischen Modellen.

3.3 Die Friedmann–Modelle

Friedmann–Modelle sind homogene und isotrope Universen mit einer idealen Flüssigkeit als Materieinhalt. Sie sind immer dann eine gute Approximation, wenn die mittlere freie Weglänge zwischen Teilchenstößen sehr viel kleiner ist als die Skalen von physikalischem Interesse. In vielen Situationen kann die Zustandsgleichung durch $p = \omega \rho c^2, 0 \leq \omega \leq 1$ gut approximiert werden. Der Spezialfall $\omega = 0$ beschreibt Staub bzw. ein druckfreies Gas und ist eine gute Approximation für ein nichtrelativistisches Gas oder eine Flüssigkeit (ideales Gas von nichtrelativistischen Teilchen der Masse m und der Temperatur T). Für nicht entartete, ultrarelativistische Teilchen im thermischen Gleichgewicht gilt $p = \frac{1}{3}\rho$. Nimmt man an, daß ω zeitunabhängig ist, so findet man wegen (9), d.h. aus

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3\omega \rho a^2,$$

daß $\rho a^3 = \text{konstant} = \rho_m a^3$ für Staub und $\rho a^4 = \text{konstant} = \rho_r a^4$ für relativistische Materie. ρ_m bezeichnet die Energiedichte der nichtrelativistischen Materie und ρ_r die der relativistischen, ρ_{0m} und ρ_{0r} die entsprechenden Größen heute. Mit Hilfe der Beziehung (12) folgt

$$\rho_m = \rho_{0m}(1 + z)^3, \quad \text{d.h} \quad \rho \sim a^3 \qquad \rho_r = \rho_{0r}(1 + z)^4, \quad \text{d.h} \quad \rho \sim a^4. \tag{14}$$

Für $\Omega = 1$ lassen sich die Friedmann–Modelle einfach lösen. Die Ergebnisse sind in **Tabelle 2** aufgelistet:

	materiedominiert	strahlungsdominiert	allgemeines ω
$a(t)$	$a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$	$a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$	$a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(\omega+1)}}$
t	$t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}}$	$t_0(1+z)^{-2}$	$t_0(1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\omega)}$
H	$\frac{2}{3t}$	$\frac{1}{2t}$	$\frac{2}{3(1+\omega)t} = H_0\frac{t_0}{t}$
t_0	$\frac{2}{3H_0}$	$\frac{1}{2H_0}$	$\frac{2}{3(1+\omega)H_0}$
ρ	$\frac{1}{6\pi Gt^2}$	$\frac{3}{32\pi Gt^2}$	$\frac{1}{6(1+\omega)^2\pi Gt^2}$

Tabelle 2: Die wichtigsten Größen der verschiedenen Friedmann–Modelle ($\Omega = 1$)

Übungen:

1. Gegeben sei ein Einstein–DeSitter–Universum mit $\Omega = 1$. Finde die Rotverschiebung z_{eq}, bzw. die Zeit t_{eq}, zu denen die Energiedichte der relativistischen Materie ρ_r gleich der der nichtrelativistischen Materie ρ_m war.

3.4 Horizonte

Das Standardmodell der Kosmologie ist von Horizonten "geplagt". Horizonte geben Auskunft darüber, welche räumlichen Regionen miteinander kausalen Kontakt haben konnten. Ein Beobachter O kann nur Ereignisse innerhalb seines Vergangenheits-Lichtkegels beobachten. O messe zur Zeit t und wir wählen Koordinaten, so daß er bei $r = 0$ sitzt. Für Lichtstrahlen ist $ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)dl^2 = 0$. Deshalb hat die Kugeloberfläche um O, von der zur Zeit t_1 emittiertes Licht zur späteren Zeit t bei O ankommt, den (eigentlichen) Abstand ab

$$R_h(t, t_1) = a(t)\int_0^r dl = a(t)\int_{t_1}^t \frac{cdt'}{a(t')}.$$

Falls das Integral für $t_1 \to 0$ divergiert, ist für den Beobachter O (siehe auch **Skizze 1**) das ganze Universum sichtbar. Konvergiert das Integral, so heißt die Kugelfläche mit Zentrum O und Abstand $R_h(t) = R_h(t, 0)$ der Teilchenhorizont des Beobachters O zur Zeit t. In diesem Fall kann O nie Signale von

Ereignissen, deren Eigendistanz heute größer als $R_h(t)$ ist, erhalten haben. Der Teilchenhorizont trennt Raumpunkte in zwei Klassen. In diejenigen, die von O gesehen werden können und in diejenigen, für die das nicht möglich ist. Wegen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left(\Omega_\omega\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega} + 1 - \Omega_\omega\right)$$

gilt für ein Universum mit Zustandsgleichung $p = \omega\rho c^2$

$$R_h(t) = \frac{c}{H_0}\frac{a(t)}{a_0}\int_0^{a(t)} \frac{da'}{a'\left[\Omega_\omega\left(\frac{a_0}{a'}\right)^{1+3\omega} + 1 - \Omega_\omega\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nähert man sich dem "Urknall" ($t \to 0, a(t) \to 0$), so kann man den zweiten Term im Nenner des Integranden vernachlässigen. Eine Abschätzung liefert

$$R_h(t) \approx \frac{c}{H_0\Omega_\omega^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{3\omega+1}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3(1+\omega)/2} \approx 3\frac{1+\omega}{1+3\omega}ct.$$

Dieses Resultat ist für $\Omega_\omega = 1$ exakt. In einem materiedominierten Universum ist $R_h(t) = 3ct$, in einem strahlungsdominierten gilt $R_h(t) = 2ct$.

Zusammenfassend: In Friedmannmodellen mit $0 \leq \omega \leq 1$ gibt es immer Teilchenhorizonte.

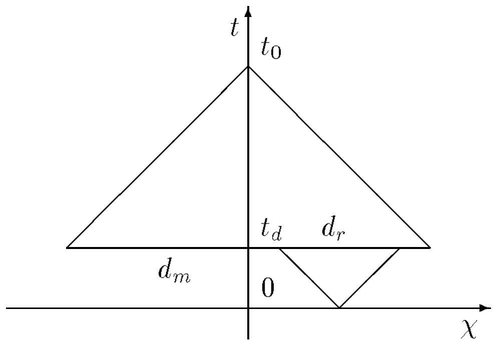
Neben Teilchenhorizonten kennt die Kosmologie das Konzept des Ereignishorizontes R_e, der z.B. in DeSitter Raumzeiten wichtig ist.

$$R_e = \begin{cases} R_h(\infty, t) & \text{für ein offenes Universum} \\ R_h(t_{end}, t) & \text{für ein geschlossenes Universum} \end{cases}$$

Der Ereignishorizont trennt Ereignisse, deren Signale den Beobachter O irgendwann erreichen können, von denen, die O nie erreichen können.

Übungen:

1. Nimm an, daß der Übergang von der strahlungs– in die materiedominierte Phase des Universums zur Zeit t_d stattgefunden hat. Berechne die Horizonte $d_r(0, t_d)$ und $d_m(t_d, t_0)$ der strahlungsdominierten und materiedominierten Ära des Universums. Was ist das Verhältnis $\frac{d_m}{d_s}$? Betrachte zur Illustration **Skizze 1**:



Skizze 1: Die Horizonte $d_r(0, t_d)$ und $d_m(t_d, t_0)$

2. Gegeben sei ein materiefreies expandierendes Einstein–DeSitter–Universum mit $k = 0$.

   (a) Berechne den Teilchenhorizont zu einer Zeit $t < t_0$.

   (b) Berechne den Ereignishorizont.

4 Beobachtbare Eigenschaften des Universums

In diesem Kapitel sollen die beobachtbaren Eigenschaften unseres Universums wie Entfernungen, der "Inhalt" des Universums, das Alter, seine Dichte, sowie der Mikrowellenhintergrund, wenn möglich von theoretischer und experimenteller Seite diskutiert werden. Auch auf die Hubble–Konstante wird noch einmal eingegangen.

4.1 Die kosmologischen Distanzen

Wie schon im Zusammenhang mit dem Hubble–Gesetz diskutiert, handelt es sich bei d_P um eine Längenmessung zu fester Zeit, die damit keine physikalische Bedeutung hat. Licht von entfernten Objekten braucht eine endliche Zeit, um zu uns zu gelangen, was dazu führt, daß die physikalischen Distanzen über den Rückwärtslichtkegels (Lichtbündel) zu definieren sind Für verschiedene Experimente sind unterschiedliche Entfernungsbegriffe von Nutzen. Deshalb unterscheidet man in der Kosmologie verschiedene Distanzen, z.B. die Helligkeitsdistanz d_L, die Winkeldistanz d_A und die Eigenbewegungsdistanz d_M, die hier eingeführt werden sollen.

Die Helligkeitsdistanz d_L ist so definiert, daß die Intensität von Kugelwellen proportional zu $1/d_L^2$ abfällt. Man stellt sich vor, daß ein Sender in einem Punkt P eine Kugelwelle abstrahlt, die zur Zeit t_0, d.h. heute, den Empfänger B überstreicht. Sei L die intrinsische Luminosität einer Lichtquelle und l der beobachtete (und beobachtbare) Energiefluß. Dann ist die Helligkeitsdistanz d_L definiert als

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Photonen in P emittiert werden und O zur Zeit t_0 erreichen, sind ein Rotverschiebungseffekt aufgrund der Ausdehnung des Universums und ein Zeitdilatationsfaktor zu berücksichtigen.

Hat eine Galaxie eine "scharfe" Eigenausdehnung D, so ist zur Abstandsmessung auch die Winkeldistanz d_A gebräuchlich. d_A ist definiert als Quotient aus dem eigentlichen Durchmesser der Galaxie und ihrer Winkelausdehnung:

$$d_A = \frac{D}{\Delta\Theta}.$$

Schließlich sei noch die Eigenbewegungsdistanz d_M erwähnt. Die Quelle bewege sich mit einer "wahren" transversalen Geschwindigkeit v_T und der scheinbaren Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\Theta}{dt_0}$. Dann ist

$$d_M = \frac{v_T}{\frac{d\Theta}{dt_0}}.$$

Übung:

1. Zeige, daß die folgende Beziehung zwischen der Helligkeitsdistanz d_L, der Winkeldistanz d_A und der Eigenbewegungsdistanz d_M gilt:

$$(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L$$

4.2 Klassifizierung von Galaxien

Die "Elementarteilchen" der Kosmologie sind die Galaxien. Man unterscheidet grob zwischen drei Typen von Galaxien, den Spiral-, den elliptischen und den irregulären Galaxien.

Spiralgalaxien werden je nach Größe des Kernes mit $S_a, S_b, S_c, ...$ bezeichnet. Wenn sie einen Balken haben, so lautet die Katalogisierung SB_a, SB_b, SB_c, ect. (die Größe des Kerns nimmt mit der Ordnung im Alphabet ab). Anteilmäßig machen sie ca. 50% der hellen Galaxien aus. Sie enthalten Staub und in den Spiralarmen findet Sternbildung statt. Die Spiralarme sind blau. Das Helligkeitsprofil außerhalb des Kernes fällt exponentiell ab: $I(r) \sim I_0 \mathrm{e}^{-\frac{r}{R}}$, wobei R die optische Skalenlänge ist. Ferner unterliegen sie einer geordneten Rotation, die eine Massenabschätzung ermöglicht. Die Massen der Spiralgalaxien streuen wenig um $10^{11} M_\odot$.

Elliptische Galaxien sind danach klassifiziert, inwieweit ihre Gestalt von der einer Kugel abweicht. E_0 sind die sog. Kugelgalaxien, E_n bezeichnen diejenigen, deren kleine und große Halbachse b und a in einem Verhältnis zueinander stehen, so daß n der ganzzahlige Anteil von $10 \cdot (1 - \frac{b}{a})$ ist. Elliptische Galaxien machen 10% der beobachteten hellen Galaxien aus. Sie enthalten wenig Staub, es findet keine aktive Sternbildung statt, sie rotieren nur schwach und für ihr Helligkeitsprofil gilt $I(r) \sim I_0 (1 + \frac{r}{R})^{-2}$. Typischerweise findet man sie in dichten Regionen, d.h. in Clustern von Galaxien. Ihre Massen streuen stark zwischen $10^5 M_\odot$ und $10^{12} M_\odot$.

Um ein Gefühl für Größenordnungen zu bekommen, sei hier genannt, daß der typische Abstand zwischen zwei Sternen ungefähr 1 pc ist, zwischen zwei Galaxien beträgt er ungefähr 1 Mpc. Zur Erinnerung, 1 pc $= 3,087 \cdot 10^{18}$cm $\approx 3,26$ Lichtjahre. Galaxienmassen reichen von $10^5 - 10^{12} M_\odot$, mit $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{33}$ g.

Unter den Galaxien gibt es viele, insbesondere Spiralgalaxien, die nicht-thermische Strahlung im Radiowellen– bis Röntgenbereich emittieren. Diese aktiven Galaxien werden als " Active Galactic Nucleus" (AGN) bezeichnet. Darunter kennt man die Seyfert–Galaxien. Sie senden keine Radiowellen aus und sind hell im Infrarot–Bereich. Ihre Leuchtkraft im Infraroten kann etwa 100 mal größer sein, als die Leuchtkraft L unserer Galaxie. Sie zeigen variable Emissionslinien und Jets werden nicht beobachtet.

Quasare sind punktartige Objekte mit einer Rotverschiebung bis zu $z = 4,9$. Zum Vergleich: Sterne unserer Galaxie haben eine Rotverschiebung $z \leq 10^{-3}$. Sie zeigen eine enorme Luminosität auf allen Frequenzen, die im Stundentakt variiert. Daraus schließt man, daß sie nur einige Lichtstunden klein sind. Es sind derzeit ca. 5000 Quasare bekannt.

Radiogalaxien haben kompakte Kerne und zeigen eine starke Radioemission die 10^{62}ergs erreichen kann. Diese Emission rührt von Synchrotronstrahlung, erzeugt durch in Jests radial nach aussen geschleuderte Teilchen.

Da selbstgravitierende Systeme gerne Dichtekonzentrationen bilden, häufen sich Galaxien. So definiert sich unsere Milchstraße in einer Gruppe von 20 Galaxien, wozu auch Andromeda M31 gehört. Etwa 10 h^{-1} Mpc entfernt ist der Virgo Cluster, dem sich unsere lokale Gruppe nähert, in einer Entfernung von ca. 60 h^{-1} Mpc ist der Coma–Cluster, dem Tausende von Galaxien angehören.

Seit mehr als 60 Jahren werden Galaxien katalogisiert. Ein zur Zeit laufendes ergeiziges Projekt ist der Sloan–Survey, in dem mehr als 10^6 Galaxien vermessen werden sollen, einschließlich ihrer Rotverschiebung.

Die Strukturen im Universum sind noch nicht vollständig verstanden. Von der experimentellen Seite ist bekannt, daß Cluster Filamente, d.h. Flächen von Galaxien, aufweisen. Zwischen den Filamenten gibt es riesige Leerräume mit 100-200 Mpc Durchmesser (voids). Das beinahe skaleninvariante Spektrum der Dichtefluktuationen läßt sich, zumindest qualitativ, mit mit Methoden aus der Quantenfeldtheorie (Vakuumfluktuationen, Strings, Texturen) verstehen. Darauf wird im Folgenden jedoch nicht näher eingegangen (leider...).

4.3 Die Hubble–Konstante

Die Beobachtung rotverschobener Spektrallinien entfernter Galaxien erlaubte Hubble bereits 1929 das sog. Hubble–Gesetz zu formulieren:

$$v_r = H_0 d, \qquad [H_0] = \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}.$$

v_r ist die Geschwindigkeit aufgrund der Expansion des Universums, H_0 ist die Hubble–Konstante und d ist der räumliche Abstand zwischen dem Experimentator und dem zu beobachtenden Objekt zu einer festen Zeit t, also keine physikalische Größe. Wie schon im Kapitel 3.1 angedeutet, gibt uns die Hubble–Konstante H_0 im Rahmen der Friedmann–Modelle ein Maß für die Expansion des Universums. Der numerische Wert der Hubble–Konstanten schwankt heute zwischen 55 und 70. Die Schwierigkeiten, die Hubble–Konstante zu messen, die sich in der großen Unsicherheit widerspiegeln, haben im wesentlichen folgenden Grund: Galaxien innerhalb eines Clusters unterliegen einer Eigengeschwindigkeit von bis zu 1000 km/s. Daraus schließt man, daß die Expansionsgeschwindigkeit erst dann sehr viel größer als die Eigengeschwindigkeit der Galaxie ist, wenn die Rotverschiebung größer als 10^{-2} ist. Auf der anderen Seite gilt das Hubble-Gesetz nur exakt für den eigentlichen räumlichen Abstand, gemessen zu einer festen Zeit t. Dieser Abstand ist jedoch nicht direkt meßbar. Stattdessen muß der physikalische Abstand d_L

$$d_L \approx \frac{c}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2\right)$$

verwendet werden. Die lineare Beziehung $d \approx \frac{c}{H_0} z$ ist aber nur für $10^{-2} \leq z \leq 10^{-1}$ brauchbar.

Eine Methode, die Hubble–Konstante zu bestimmen, besteht darin, eine Quelle zu beobachten, deren Luminosität L möglichst genau zu kennen, die scheinbare Luminosität l zu messen und über das Spektrum die Rotverschiebung zu ermitteln. Die Hubble–Konstante H_0 folgt schließlich mit

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{c}{H_0} z.$$

Oft wird die Hubble–Konstante als $H_0 = h \cdot 100$ km/(s Mpc) angegeben. In dem Sinne parametrisiert h die Unsicherheit in der Messung der Hubble–Konstanten. Auf die Bestimmung von L wird im nächsten Abschnitt noch eingegangen.

4.4 Die Entfernungsleiter

Kosmologische Abstände werden über die sog. Entfernungsleiter bestimmt. Die Idee ist, lokale Indikatoren oder Standardkerzen zu definieren, um die Beziehung zu kalibrieren, die man benutzt, um Distanzen weit entfernter Objekte zu ermitteln. So hangelt man sich sukzessive die Entfernungsleiter hoch, wobei man sich jedoch auf jeder Stufe der Entfernungsleiter einen Meßfehler einhandelt und sich die Meßfehler der einzelnen Stufen akkumulieren. Wie schon oben erwähnt, sind weit entfernte Objekte kosmologisch interessant, weil bei großen Rotverschiebungen die Eigengeschwindigkeit der Galaxie gegen die Expansionsgeschwindigkeit vernachläßigt werden kann.

Für Entfernungen von weniger als 30 pc bieten sich Paralaxenmethoden zur Bestimmung der Entfernung an. Auf der nächsten Stufe der Entfernungsleiter stehen die Lyrae–Sterne. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß alle eine ähnliche Luminosität haben. Durch Messung der scheinbaren Luminosität läßt sich damit die Distanz ermitteln. Da sie außerdem sehr hell sind, funktioniert diese Methode bis zu Entfernungen von ca. 300 kpc. Die wohl immer noch wichtigsten Standardkerzen sind die Cepheiden. Dabei handelt es sich um pulsierende Sterne. Ihre intrinsische Luminosität ist eine Funktion der Periode. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich L sehr genau ermitteln. Cepheiden sind ebenfalls sehr leuchtstark, so daß die Entfernungsleiter bis auf 4 Mpc ausgedehnt werden kann. Weitere Indikatoren für Abstände bis zu 10 Mpc sind Novae und blaue und rote Riesensterne. Auf der nächsten Stufe der Entfernungsleiter ($d \leq 100$ Mpc) stehen die HII Regionen. Ihr Durchmesser zeigt wenig Streuung, so daß sich hier eine Entfernungsbestimmung über die Winkeldistanz anbietet. Sternhaufen streuen wenig in L so daß auch sie zur Entfernungsbestimmung herangezogen werden. Der derzeit letzten Stufe (O(100 Mpc)) gehören die hellsten Galaxien in Clustern oder Supernovae an, die sich durch nahezu konstantes L auszeichnen. Weiter gilt die Tully–Fisher–Beziehung, die ausnutzt, daß Spiralgalaxien relativ starr rotieren. Die Leuchtkraft ist in diesem Fall proportional zur vierten Potenz der Kreisfrequenz.

In die Distanz gehen viele Korrekturen ein. Zum Beispiel sorgt die galaktische Rotation für eine Spektrumsverschiebung. Durch Rotverschiebung wird die Luminosität in bestimmten Frequenzbereichen verschoben (K–Korrektur). Daneben gibt es noch Biasing-Effekte weil man in großen Entfernungen nur die hellsten Sterne bzw. Galaxien beobachtet usf. In den letzten Jahren wird nun auch der gravitative Linseneffekt zur Bestimmung von H_0 ausgenutzt. Allerdings sind wegen der Unsicherheiten in der Modellierung der Linsengalaxien die Werte für die Hubblekonstanten nicht sehr genau. Mit dem Hubble–Space–Teleskop ist es nun gelungen, Cepheiden im Virgo–Cluster zu beobachten und damit einige Stufen der Entfernungsleiter zu überspringen.

4.5 Das Alter des Universums

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Altersbestimmung des Universums im Rahmen des kosmologischen Standardmodells und den entsprechenden Beobachtungen zu. Das kosmologische Standardmodell sagt vorher, daß das Alter t_0 eines materiedominierten Universums

$$t_0 = F(\Omega) H_0^{-1} = 0,98 \cdot 10^{10} F(\Omega) h^{-1} \text{Jahre}$$

ist. Dabei ist

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_{oc}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0 \tag{15}$$

$$F(\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega}{2}(\Omega-1)^{-\frac{3}{2}} \arccos(\frac{2}{\Omega}-1) - (\Omega-1)^{-1} & \Omega > 1 \\ \frac{2}{3} & \Omega = 1 \\ -\frac{\Omega}{2}(1-\Omega)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arccosh}(\frac{2}{\Omega}-1) + (1-\Omega)^{-1} & \Omega < 1 \end{cases}$$

Setzt man verschiedene Werte von Ω in F ein so findet man

Ω	0	0.1	1	10	∞
$F(\Omega)$	1	0.9	0.67	0.5	0

Tabelle 3: F in Abhängigkeit von Ω

Beobachtungen (siehe unten) schränken die Dichte des Universums Ω auf $0.01 < \Omega < 2$ ein, womit sich das Alter t_0 von der theoretischen Seite zu $t_0 \sim 6.5 \cdot 10^9 h^{-1}$ Jahre für $\Omega \approx 2$, bzw. $t_0 \approx 10^{10} h^{-1}$ Jahre für $\Omega = 0.01$ ergibt.

Zur experimentellen Altersbestimmung werden Kugelsternhaufen genutzt. Sterne in Kugelsternhaufen sind alle etwa gleich alt und unterscheiden sich nur in ihrer Masse. Zu welchem Zeitpunkt ein Stern den Hauptast im Hertzsprung–Russel–Diagramm verläßt, hängt von seiner Masse ab. Die Kugelsternhaufen sind nun so alt wie diejenigen Sterne, die den Hauptast des

Hertzsprung–Russel–Diagramms gerade verlassen haben und auf dem Weg sind, rote Riesen zu werden. Damit schätzt man das Alter des Universums auf

$$t_0 \approx (1.4 \ldots 1.6) 10^{10} \text{Jahre}$$

ab. Der Vergleich des theoretisch ermittelten und des experimentell bestimmten Wertes liefert eine obere Schranke an h: $h \approx 0,6 - 0,8$. Für ein inflationäres Universum ($\Omega = 1$) gilt $h \approx 0,5$, was derzeit als untere Schranke angesehen wird. Eine andere experimentelle Möglichkeit, das Alter des Universums zu bestimmen, ist über den radioaktiven Zerfall von Kernen.

4.6 Die Dichte des Universums

Die Dichte des Universums ist nicht sehr gut bekannt. Definiert man den Beitrag der i-ten Sorte zum Dichteparameter Ω_i als den Quotienten der Dichte der i-ten Sorte ρ_{0i} zu der kritischen Dichte ρ_{0c}

$$\Omega_i = \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}},$$

so findet man für die leuchtende Materie in Galaxien Ω_g einen numerischen Wert von etwa 0,03. Auf der anderen Seite liefern die dynamisch beobachteten Massen in Objekten großer Ausdehnung (Galaxiencluster) eine Abschätzung von Ω auf ungefähr 0,2 ... 0,4. Diese enorme Diskrepanz ist bis heute nicht geklärt, es steht noch nicht einmal die genaue Zusammensetzung der Materie fest. Es ist äußerst unwahrscheinlich, daß ein großteil der gesamten Materie baryonischer Natur ist (siehe unten). Zu ρ tragen verschiedene Komponenten bei, z.B. Baryonen, Photonen und Neutrinos, deren Schranken nun aufgelistet werden.

Über die kosmische Hintergrundstrahlung (Strahlung eines schwarzen Körpers) – siehe dazu auch den nächsten Abschnitt – berechnet man den Dichteparameter der Photonen zu

$$\Omega_\gamma \sim 2,3 \cdot 10^{-5} h^{-2}.$$

Bis auf die Aufheizung der Neutrinos über den Prozeß der $e^+ e^-$–Annihilation und die unterschiedliche Statistik tragen masselose Neutrinos gleich bei wie Photonen. Weiter findet man für massive Neutrinos mit $m_\nu \sim 10$eV

$$\Omega_\nu \sim 0.1 N_\nu \frac{< m_\nu >}{10 eV} \cdot h^{-2},$$

d.h. genügend viele massive Neutrinos können das Universum schließen (siehe dazu auch Kapitel **5**). Die Nukleosynthese (Kapitel **5.4**) bietet eine sehr genaue Abschätzung des Dichteparameters der Baryonen Ω_b

$$0,011\,h^{-2} < \Omega_b < 0,015\,h^{-2}.$$

Wie bestimmt man nun die Dichte leuchtender Materie in Galaxien? Sei $\mathcal{L}_g$ die mittlere Leuchtkraft pro Einheitsvolumen und $< M/L >$ das mittlere Verhältnis von Masse zu Leuchtkraft, so läßt sich die gemittelte Massendichte ρ_{0g} schreiben:

$$\rho_{0g} = \mathcal{L}_g < M/L > .$$

Um $\mathcal{L}_g$ auszurechnen, startet man von der Anzahl von Galaxien pro Einheitsvolumen $\Phi(L)dL$ mit Luminositäten im Intervall $[L, L + dL]$. Schechter hat 1976 (siehe [Boe88]) eine empirische Formel für die Leuchtkraftfunktion $\Phi(L)$ angegeben:

$$\Phi(L) = \frac{\phi_*}{L_*}\left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{L}{L_*}},$$

wobei α, Φ_*, L_* empirische Werte sind und in Galaxienkatalogen nachgeschlagen werden können. Setzt man sie zu

$$\begin{aligned} \Phi_* &\sim \frac{h^3}{100} \cdot 0,16 \frac{1}{Mpc^3} \\ L_* &\sim 10^{10} h^{-2} L_\odot \\ \alpha &\sim 1, \end{aligned} \tag{16}$$

so ist $\mathcal{L}_g \approx 3,3 \cdot 10^8 h L_\odot \mathrm{Mpc}^{-3}$. Die Bestimmung des Verhältnisses M/L läuft auf eine Massenbestimmung hinaus. Bei Spiralgalaxien bietet sich eine Massenermittlung über Rotationskurven an, im Fall von elliptischen Galaxien nimmt man an, daß sie virialisiert haben. Diese Annahme ist jedoch nicht unumstritten (Hatten die Galaxien genügend Zeit zu virialisieren?). Damit folgt

$$< M/L > \sim\ 30h \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

und

$$\rho_{0g} = 6 \cdot 10^{-31} \frac{h^2 \mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \quad \text{d.h.} \quad \Omega_g \sim 0.03$$

Berechnet man nun die Masse eines Galaxienclusters, so ergibt sich ebenfalls mit Anwendung des Virialtheorems

$$M_{cl} \sim 10^{15} h^{-1} M_\odot.$$

Da sich etwa $4 \cdot 10^3$ große Cluster in einem Abstand kleiner als $6 \cdot 10^2 h^{-1}$ Mpc von unserer lokalen Gruppe befinden, folgt

$$\rho \approx 4 \cdot 10^{-31} \frac{h^2 \mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

Das entspricht in etwa der ermittelten Dichte für Galaxien. Andererseits ist

$$\left(\frac{M}{L}\right)_{Cluster} \approx 300 \frac{M_\odot}{L_\odot} \approx 10 \left(\frac{M}{L}\right)_{Galaxie},$$

Das deutet darauf hin, daß es im Rahmen des Standardmodells der Kosmologie Materie in unbekannter Form (dunkle Materie?) in großen Clustern gibt. Ein weiteres Indiz für die Existenz von dunkler Materie sind die flachen Rotationskurven von Spiralgalaxien. Würde sich alle Materie innerhalb eines Radius R befinden, so müßte gemäß dem Keplerschen Gesetz $v \sim r^{-\frac{1}{2}}$ sein, für $r > R$. Tatsächlich bleibt die Rotationskurve jedoch konstant bis zu $r \approx 2..3R$. Heute glaubt man, daß dunkle Materie nichtbaryonischen Ursprungs ist, da die Nukleosynthese, eines der am besten bestätigten Teilresultate der Astroelementarteilchenphysik, die erlaubten Dichte der baryonischen Materie stark einschränkt. Populär sind Photinos, Neutrinos oder Axionen. Unter anderem kann ein Universum mit $\Omega \approx 1$, das durch nichtbaryonische Materie dominiert wird, großräumige Strukturen leichter erklären.

4.7 Der Mikrowellenhintergrund

Seit der Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) 1965 durch Penzias und Wilson (siehe z.B. [Boe88], [Wei72]), wurde sie als Hintergrundsignal interpretiert, das auf einen dichten und heißen Anfangszustand unseres Universums hindeutet. Damit ist die 3K Mikrowellenstrahlung das wichtigste Indiz für eine Urknall–Theorie. Es handelt sich bei der CMB um eine perfekte Hohlraumstrahlung mit einer Temperatur von $T = 2,726 \pm 0.005K$ (Cobe). Sie hat eine Dipolanisotropie. Definiert man

$$T(\theta, \phi) = T_0 \left(1 + \frac{\delta T_D}{T_0} \cos\theta\right), \qquad \frac{\delta T}{T_0} = \frac{T(\theta, \phi) - T_0}{T_0},$$

T_0 ist dabei die mittlere Temperatur, so findet man

$$\frac{\delta T_D}{T_0} \approx 10^{-3}.$$

Die Dipolanisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung ist verstanden: Sie "mißt" die Bewegung unserer Galaxie in Bezug auf den Mikrowellenhintergrund. Tatsächlich läßt sich damit die Geschwindigkeit unserer Galaxie zu

$v_g \sim 600$ km/s ermitteln. Subtrahiert man den Dipolanteil von dem CMB, so bleiben Temperaturfluktuationen $\delta T/T \sim 10^{-5}$. Strukturen im Universum sind, davon ist man heute überzeugt, aus primordialen Fluktuationen gewachsen. Denn wäre das Universum vollständig homogen, so hätten keine Strukturen entstehen können. Über den Ursprung dieser Fluktuationen streiten sich die Kosmologen bzw. Teilchenphysiker noch. Die allgegenwerteigen Quantenfluktuationen, Strings oder sogenannte Texturen (die allerdings eine globale Symmetrie benötigen) könnten die 'seeds' gewesen sein. Beiträge zu den Temperaturfluktuationen liefern der Sachs–Wolfe–Effekt und der Sunyaev–Zel'dovich–Effekt. Der Sachs–Wolfe–Effekt ist die Temperaturänderung der Strahlung aufgrund der Rot/Blauverschiebung beim Durchlaufen von verschiedenen Gravitationspotentialen. Die Potentialunterschiede rühren von den Dichtefluktuationen auf der 'Fläche' letzter Streuung der Hintergrundstrahlung. Untersuchungen mit Hilfe von Röntgenstrahlen haben gezeigt, daß es eine größere Menge heißen Gases in Galaxienclustern gibt. Aufgrund des Sunyaev–Zel'dovich–Effektes, d.h. der Comptonstreuung der Mikrowellenphotonen an heißen Elektronen des Gases, ändert sich das Photonen-Spektrum Temperaturfluktuationen werden induziert.

5 Das frühe Universum

Die Geschichte des frühen Universums wird im wesentlichen durch das Bild vom "heißen" Urknall beschrieben. Die Vorstellung vom Urknall entstammt den homogenen Friedmann–Modellen, die, wie weiter oben gezeigt wurde, unter der Bedingung $\rho+3p \geq 0$ notwendigerweise zu einem Verschwinden des Skalenfaktors $a(t)$, d.h. zu einer Singularität bei einer endlichen Zeit führen. Für ein Gas nichtwechselwirkender Teilchen wächst die Temperatur bei einer Annäherung an die Singularität unbeschränkt. Dieser Umstand findet in der Namensgebung " heißer" Urknall seinen Ausdruck. Danach entwickelte sich das heutige, materiedominierte Universum ($\rho_0 \simeq \rho_{0m}$, $p_0 = p_{0r} \ll \rho_{0m}$) aus einem Zustand vollständigen thermodynamischen Gleichgewichts durch Abkühlung infolge der kosmischen Expansion.

Neben der Erklärung des Spektrums der kosmischen Hintergrundstrahlung und des Neutrinohintergrundes zählt die richtige Vorhersage der relativen Häufigkeiten der leichten Elemente zu den größten Erfolgen dieses Szenarios. Das heute beobachtete Verhältnis der Zahl der Photonen zu der der Baryonen $\eta_0 = \frac{n_{0\gamma}}{n_{0b}}$ gehört zu den charakteristischen Größen dieses einfachen Friedmann–Modells, da die Anzahl der Photonen bei einer adiabatischen Expansion erhalten bleibt. Aus den Werten

$$n_{0b} = \frac{\rho_{0b}}{m_p} \simeq 1,12 \cdot 10^{-5} \Omega_b h^2 \mathrm{cm}^{-3}$$

und

$$n_{0\gamma} = 2\zeta(3)\pi^{-2} \left(\frac{kT_{0\gamma}}{\hbar c} \right)^3 \simeq 4,11 \cdot 10^2 \mathrm{cm}^{-3}$$

für die Baryonen– bzw. Photonendichte findet man für η_0

$$\eta_0 = \frac{n_{0\gamma}}{n_{0b}} \simeq 3,75 \cdot 10^7 (\Omega_b h^2)^{-1}. \tag{17}$$

Bevor einige wichtige Prozesse im frühen Universum detailliert untersucht werden, wird im folgenden Abschnitt ein Abriß der Geschichte des frühen Universums gegeben.

Übungen:

1. Ein statisches, unendlich ausgedehntes Universum gehört zu den einfachsten kosmologischen Modellen. Ist es homogen mit Materie gefüllt

und haben die Sterne eine konstante mittlere Luminosität pro Volumen, so ergibt sich der folgende Widerspruch: die beobachtete Luminosität ist unendlich, aber unser Nachthimmel dunkel. Das bezeichnet man als das Olberssche Paradoxon. Dieses Paradoxon tritt in expandierenden Universen nicht auf.

Berechne die Frequenzabhängigkeit der empfangenen Intensität I in einem geschlossenen materiedominierten Universum unter der Annahme, daß die Anzahl n_0 der Galaxien im mittleren Volumen konstant ist und alle Galaxien die gleiche Frequenz emittieren.

5.1 Die Geschichte des frühen Universums im Überblick

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Etappen in der Entwicklung des frühen Universums in kurzer Form zusammenhängend dargestellt werden. **Tabelle 4** gibt einen Überblick.

Temperatur (K)	Charakteristische Prozesse
10^{32}	Planckskala, Quanteneffekte der Gravitation werden wichtig,
	Ära der Quarks,
10^{12}	Hadronen werden nichtrelativistisch
	Photonen und Leptonen dominieren die Dichte (Leptonenära), Annihilation von Myonenpaaren,
$5 \cdot 10^9$	Neutrinos entkoppeln, e^+-e^-–Annihilation, Synthese der leichten Elemente ein,
10^5	Strahlung und Materie erreichen gleiche Dichten
10^4	Photonen und Materie entkoppeln
	Strukturentstehung

Tabelle 4: Die thermische Entwicklung des Universums im Überblick

Wie bereits erwähnt, beginnt die Existenz des Universums im Standardmodell der Kosmologie mit dem heißen Urknall, einem singulären Zustand unendlich hoher Dichte. Man nimmt an, daß für Zeiten, die kleiner als die

Planckzeit $t_p = \sqrt{G\hbar/c^5} \sim 5 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}$ ($T \simeq 10^{32}$ K) sind, die Quanteneffekte der Gravitation eine dominierende Rolle spielen. Danach war das Universum mit einem Teilchen–Antiteilchengemisch aller Sorten angefüllt. Es befand sich in einem Zustand thermodynamischen Gleichgewichts, das hauptsächlich über Paarerzeugung und –vernichtung aufrecht erhalten wurde. Im weiteren Verlauf der Expansion sank die Temperatur unter 10^{12} K ($t \simeq 10^{-4}$ s). Die Pionen sind verschwunden und die verbleibenden Baryonen werden nichtrelativistisch. Das thermodynamische Gleichgewicht wird nun von Leptonen über elektroschwache Prozesse bestimmt. Diese Phase wird als die Leptonenära bezeichnet. Im Zuge der weiteren Abkühlung kommt es zunächst zur Vernichtung von Myonenpaaren. Bei Temperaturen um 10^{10} K entkoppeln dann die Neutrinos von der Materie. Sie verhalten sich auch nach der Entkopplung wie ein relativistisches Gas. Ihre Temperatur ist dann umgekehrt proportional zum Skalenfaktor. Die Vernichtung von Elektronen und Positronen setzt bei Temperaturen $T \simeq 5 \cdot 10^9$ K ein. Etwa zur gleichen Zeit ($T \simeq 0,8 \cdot 10^9$ K) ist die Häufigkeit des Deuteriums auf einen Wert angewachsen, der die Synthese leichter Kerne, insbesondere die Heliumproduktion möglich macht. Schwere Elemente können in dieser Phase nicht erzeugt werden. Die Dichte des Universums wird immer noch von der Strahlung dominiert. Die Photonen stehen nun hauptsächlich über die Streuung an geladenen Teilchen mit der Materie im Gleichgewicht. Bei einer Temperatur um 10^5 K erreichen Strahlung und Materie die gleiche Dichte und bei ungefähr 10^4 K ($t \simeq 10^5$ a) entkoppeln die Photonen der thermischen Strahlung von der Materie. Die Temperatur der entkoppelten Photonen nimmt nun wie das Inverse des Skalenfaktors $a(t)$ ab. Sie bilden die heute beobachtete kosmische $2,7$ K–Hintergrundstrahlung. Das Universum betritt nun die materiedominierte Phase. Seine Dichte wird durch die Dichte nichtrelativistischer Materie bestimmt. Es bilden sich neutrale Atome, Strukturen wie Sterne und Galaxien entstehen. Die räumliche Krümmung wird in der weiteren Entwicklung wichtig und unterscheidet zwischen offenen und geschlossenen Modellen.

In den folgenden Abschnitten sollen die für das Verständnis der Entwicklung des frühen Universums entscheidenden Prozesse etwas genauer untersucht werden.

5.2 Rekombination und Entkopplung

Bei ausreichend hohen Temperaturen ($T \geq 10^5$ K) ist die Materie vollständig thermisch ionisiert. Sinkt die Temperatur jedoch unter einen gewissen

Wert, die Entkopplungstemperatur T_d, bilden sich neutrale Wasserstoffatome. Das Universum wird für die Photonen der thermischen Strahlung transparent. Materie und Strahlung entkoppeln voneinander und befolgen von nun an unterschiedliche Gesetze der thermischen Entwicklung. Die entkoppelten Photonen sind (obwohl nicht wechselwirkend) weithin ein Plack-verteilt und werden in der kosmischen Hintergrundstrahlung beobachtet.

Zur näheren Betrachtung der Vorgänge bei der Entkopplung muß zunächst der Zusammenhang zwischen Temperatur und Rotverschiebung hergestellt werden.

Dazu benutzt man zweckmäßigerweise die Friedmanngleichung (9) in der Gestalt

$$d(\rho a^3) + p d(a^3) = 0.$$

Für Photonen der Schwarzkörperstrahlung ist der Zusammenhang zwischen Energiedichte und Temperatur durch das Stefan–Boltzmann–Gesetz

$$\rho_r = \sigma c^{-2} T_r^4$$

gegeben, das gemeinsam mit der relativistischen Zustandsgleichung $p = \frac{1}{3}\rho$ und der Friedmanngleichung (9) die Gestalt

$$d(T^4 a^3) = -\frac{1}{3} T^4 d(a^3)$$

gibt. Hieraus findet man durch Integration die gesuchte Beziehung zwischen Temperatur und Rotverschiebung für die kosmische Hintergrundstrahlung:

$$T_r = T_{0r} \frac{a_0}{a} = T_{0r}(1+z). \tag{18}$$

Hierbei stellt sich natürlich die Frage, unter welchen Umständen man ein Gas von Photonen im expandierenden Universum als frei betrachten kann. Dazu muß die mittlere freie Weglänge $l = c\tau$ der Photonen sehr viel kleiner als die Hubble-Länge cH^{-1} sein

$$l = c\tau \ll \frac{c}{H}.$$

Dabei bezeichnet τ die mittlere Zeit zwischen Streuereignissen.

Die Temperatur–Rotverschiebungs–Relation für Materie findet man auf ähnliche Weise. Für ein ideales Gas sind $pn^{-\gamma}$ und $\frac{nT}{p}$ konstant, woraus sich sofort $Tn^{1-\gamma} = konst$ ergibt. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung

$\frac{d}{dt}(na^3) = 0$ führt diese Beziehung auf $Ta^{3(\gamma-1)} = konst$. Für ein einatomiges Gas ($\gamma = \frac{5}{3}$) erhält man damit die Temperatur–Rotverschiebungs–Relation

$$T_m = T_{0m}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = T_{0m}(1+z)^2.$$

Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Rotverschiebung wird auch dadurch deutlich, daß die Besetzungszahl N_r jeder Mode bei einer adiabatischen Expansion erhalten bleibt. Für freie Photonen ist diese bei der Temperatur T durch die Planckverteilung

$$N_r = \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}$$

gegeben. Bei der Herleitung der Rotverschiebung in Abschnitt **3.2** wurde gezeigt, daß $\nu a = konst$ bzw. $\frac{\lambda}{a} = konst$ gilt. Soll die Besetzungszahl N_r unverändert bleiben, muß auch $Ta = konst.$ sein. Da diese Beziehung von der Wellenlänge unabhängig ist, bleibt das Spektrum von Strahlung, die sich ursprünglich im thermodynamischen Gleichgewicht befand, erhalten und es ergibt sich wiederum die Beziehung (18).

In der strahlungsdominierten Phase des frühen Universums ($T \geq 10^5$ K) wird die Materie durch Photonen ionisiert. Die Photoionisationsreaktion

$$e + p \longleftrightarrow H + \gamma \tag{19}$$

befindet sich im thermischen Gleichgewicht. Für nichtrelativistische nichtentartete Teilchen ist die Teilchenzahldichte der Teilchensorte i durch

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\, e^{\frac{\mu-\epsilon}{kT}} = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi m_i kT)^{\frac{3}{2}}\, e^{\frac{\mu - m_i c^2}{kT}}$$

gegeben, wobei der Faktor g_i die möglichen Spinzustände ($g_e = g_p = 2$, $g_H = 4$) zählt. Die lokale Ladungsneutralität fordert die Gleichheit der Dichten von Elektronen und Protonen ($n_e = n_p$). Die Gleichgewichtsbedingung der Reaktion (19) drückt sich in der Beziehung $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ zwischen den chemischen Potentialen aus. Beachtet man weiter, daß die Differenz der Massen $(m_e + m_p - m_H)c^2 = \Delta = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \simeq 13,6$ eV die Ionisationsenergie Δ ergibt, so findet man für das Verhältnis $\frac{n_e n_p}{n_H}$ folgenden Ausdruck

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\Delta}{kT}}.$$

Führt man weiterhin die Gesamtprotonendichte $n = n_p + n_H$ und den Ionisationsgrad $x = \frac{n_p}{n_p+n_H}$ ein, gelangt man zur Saha–Gleichung des thermodynamischen Ionisationsgleichgewichts. Sie beschreibt die Abhängigkeit des Ionisationsgrades von der Temperatur.

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{n(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\Delta}{kT}}. \tag{20}$$

Die Entkopplungstemperatur T_d wird nun als diejenige Temperatur definiert, bei der ein Ionisationsgrad $x = \frac{1}{2}$ erreicht wird. Sie kann mit Hilfe der Saha–Gleichung numerisch bestimmt werden. Da bei einer adiabatischen Expansiondie Strahlungsentropie pro Baryon konstant bleibt (Übung), kann man die Entkopplungstemperatur T_d leicht abschätzen: Die Strahlungsentropiedichte ist durch $s = \frac{4}{3}\sigma T^3$ gegeben. Die Strahlungsentropie pro Baryon wird mit Hilfe der heute beobachteten Werte berechnet

$$\frac{s}{n_b} = \frac{4}{3}\sigma \frac{T_r^3}{n_b} = \frac{4}{3}\sigma m_p \frac{T_{0r}^3}{\rho_{0b}} \simeq 1,2 \cdot 10^8 \frac{k}{\Omega_b h^2}.$$

Nun kann man in der Saha–Gleichung (20) für den Ausdruck $\frac{T^3}{n}$ die Strahlungsentropie pro Baryon substituieren. Nach Einsetzen der numerischen Faktoren erhält man

$$\frac{m_e}{T_d} = 2(137)^2 \left(\ln \frac{s}{6,908 \cdot n_b} + \frac{3}{2} \ln \frac{m_e}{T_d} \right).$$

Durch Iteration dieser Gleichung gelangt man zu folgenden Werten für die Entkopplungstemperatur

$$T_d = \begin{cases} 4330K & \text{falls} \quad \frac{s}{n_b} = 10^8, \\ 4050K & \text{falls} \quad \frac{s}{n_b} = 10^9. \end{cases}$$

Das Erreichen des Ionisationsgrades $x = \frac{1}{2}$ markiert zugleich den Beginn der Rekombination. Die Bildung neutraler Wasserstoffatome kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Unter dem Einfluß der kosmischen Expansion kommt es hierbei zu interessanten Effekten. Wenn ein Proton und ein Elektron sich direkt zu einem Wasserstoffatom im Grundzustand verbinden, hat das emittierte Photon eine genügend große Energie, um mit hoher Wahrscheinlichkeit wieder ein Wasserstoffatom zu ionisieren. Der Beitrag zur effektiven Rekombinationsrate ist gering. Bildet sich ein Wasserstoffatom in einem angeregten Zustand, wird beim Übergang in den Grundzustand ein Resonanzphoton der Lyman–Serie emittiert. Dieses wiederum kann andere Atome in angeregte Zustände überführen, die dann leichter ionisierbar sind. Der für die Rekombination typische Übergang ist daher der Zerfall des 2s–Zustandes in den Grundzustand. Die kosmische Expansion schafft nun eine weitere Möglichkeit, nämlich den "Verlust" eines $L\alpha$–Photons infolge der Rotverschiebung. Für die Berechnung der Rekombinationsrate und eine detaillierte Darstellung der Vorgänge bei der Rekombination sei hier auf die Literatur verwiesen [KolTur90], [Pee93].

Es wurde bereits gezeigt, daß die Energiedichten von Strahlung und nichtrelativistischer Materie eine unterschiedliche Abhängigkeit von der Rotverschiebung aufweisen. Daher kam es beim Übergang von der strahlungs- zur materiedominierten Phase des Universums zu einem Zustand ($T = T_{eq}$), in dem Strahlung und Materie die gleiche Energiedichte hatten ($\rho_m = \rho_r$). Unter Benutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho_m &= \rho_{0m}(1+z)^3 \qquad \text{für} \qquad T < T_{eq} \\ \rho_r &= \rho_{0r}(1+z)^4 \qquad \text{für} \qquad T > T_{eq}, \end{aligned}$$

egibt sich folgender Ausdruck für die Rotverschiebung z_{eq}, die der Temperatur T_{eq} entspricht:

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega}{\Omega_{0r}}.$$

Als numerischen Wert für z_{eq} findet man

$$z_{eq} \simeq 4,3 \cdot 10^4 \Omega h^2.$$

Unter Berücksichtigung des Beitrages der Neutrinos zur Strahlungsdichte ändert sich dieser Wert zu $2,6{\cdot}10^4\,\Omega h^2$. Ein Vergleich der Zeit $t_{eq} \simeq 10^4\,(\Omega h^2)^{-1}$ a, die der Rotverschiebung z_{eq} entspricht, mit der Zeit der Entkopplung $t_d \simeq 3{\cdot}10^5$ Jahre ergibt, daß beide Ereignisse in etwa zur gleichen Zeit eingetreten sind.

Übungen:

1. Betrachte Materie im thermodynamischen Gleichgewicht. Zeige, daß die Entropie bei einer adiabatischen Expansion des Universums konstant ist.

5.3 Die Leptonenära

Der Gegenstand dieses Abschnitts sind die elektroschwachen Prozesse in der frühen, strahlungsdominierten Phase des Universums ($T \geq 10^{13}$ K), die der

Entkopplung von Strahlung und Materie voranging. Die strahlungsdominierte Phase wird durch die Existenz eines Zustandes vollständigen thermodynamischen Gleichgewichts charakterisiert. Die Temperatur und die chemischen Potentiale stellen die den Zustand bestimmenden Größen dar.

Die Dichte für Teilchen der Sorte i mit chemischem Potential μ_i bei der Temperatur T ist im thermodynamischen Gleichgewicht durch

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty dpp^2 \left(e^{\frac{\varepsilon - \mu_i}{kT}} \pm 1 \right)^{-1} \tag{21}$$

gegeben. Hierbei ist g_i die Anzahl der Spinfreiheitsgrade. Das "+"–Zeichen bezieht sich auf Fermionen, das "−"–Zeichen auf Bosonen. Die chemischen Potentiale μ_i sind freie Parameter, deren Werte durch weitere Überlegungen gefunden werden müssen.

Bei Temperaturen unterhalb von 10^{12} K gibt es keine Hadronenpaare mehr in der Strahlung. Photonen, Leptonen und Nukleonen befinden sich über elektroschwache Prozesse im Gleichgewicht. Bei den elektroschwachen Reaktionen existieren erhaltene additive Quantenzahlen, d.h. der Ausgangs- und der Endzustand werden durch denselben Wert der betreffenden Quantenzahl charakterisiert. Die elektrische Gesamtladung Q und die Baryonenzahl B ($B = 1$ für n, p ; $B = -1$ für $\bar{n}$, $\bar{p}$ und $B = 0$ für Leptonen) dienen als Beispiele für derartige Quantenzahlen. Das Salam–Weinberg–Modell der elektroschwachen Wechselwirkung läßt Prozesse zu, die die separate e– bzw. μ–Leptonenzahlerhaltung verletzen. Die Gesamtleptonenzahl $L = L_e + L_\mu$ bleibt jedoch erhalten. Sieht man von den leptonenzahlverletzenden Prozessen ab, so hat man entsprechend den vier erhaltenen Quantenzahlen Q, B, L_e, L_μ vier unabhängige chemische Potentiale. Die Erzeugungs– bzw. Vernichtungsprozesse von Teilchen–Antiteilchen–Paaren mit Photonen zeigen, daß die chemischen Potentiale von Teilchen und Antiteilchen das entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Die drei Reaktionen

$$e^- + \mu^+ \to \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \qquad e^- + p \to \nu_e + n, \qquad \mu^- + p \to \nu_\mu + n$$

führen im Gleichgewicht zur folgenden Bedingung an die chemischen Potentiale

$$\mu_{e^-} - \mu_{\nu_e} = \mu_{\mu^-} - \mu_{\nu_\mu} = \mu_n - \mu_p.$$

Das bedeutet, man kann μ_p, μ_{e^-}, μ_{ν_e} und μ_{ν_μ}, als die zu den vier Erhaltungsgrößen Q, B, L_e, L_μ gehörenden unabhängigen chemischen Potentiale wählen. Die diesen Quantenzahlen zugeordneten Dichten n_Q, n_B, n_{L_e}, n_{L_μ}

wechseln das Vorzeichen bei einer Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen. Die vier unabhängigen chemischen Potentiale sind nun Funktionen dieser Dichten. Da auch $\mu_i(\text{Teilchen}) = -\mu_i(\text{Antiteilchen})$ folgt unmittelbar, daß die chemischen Potentiale ungerade Funktionen der Dichten sein müssen:

$$\mu_i(-n_k) = -\mu_i(n_k); \qquad i = p, e^-, \nu_e, \nu_\mu \quad ; \qquad k = Q, B, L_e, L_\mu. \tag{22}$$

Aus der lokalen Ladungsneutralität folgt nun, daß die elektrische Ladungsdichte verschwinden muß:

$$n_Q \simeq 0. \tag{23}$$

Wie weiter oben bereits ausgeführt wurde, ist die Baryonendichte sehr klein im Vergleich zur Entropiedichte ($s \propto n_\gamma$). Deshalb kann man die Baryonenzahldichte in einer vernünftigen Näherung vernachlässigen:

$$n_B \simeq 0. \tag{24}$$

Nimmt man an, daß die chemischen Potentiale der Neutrinos verschwinden[1], so kann man mit analogen Argumenten schließen, daß die Leptonenzahldichten

$$n_{L_e} = n_{e^-} + n_{\nu_e} - n_{e^+} - n_{\bar{\nu}_e} \quad \text{und} \quad n_{L_\mu} = n_{\mu^-} + n_{\nu_\mu} - n_{\mu^+} - n_{\bar{\nu}_\mu}$$

in guter Näherung verschwinden. Anders ausgedrückt besteht die Näherung darin, daß der Hauptanteil der Teilchendichten im Gleichgewicht auf Paarerzeugungs- und Vernichtungsreaktionen zurückzuführen ist.

Die Tatsache, daß die chemischen Potentiale ungerade Funktionen der Dichten sind (Gleichung (22)), führt zusammen mit diesen Annahmen zu dem Schluß, daß alle chemischen Potentiale gleich Null gesetzt werden können:

$$\mu_p = \mu_{e^-} = \mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = 0.$$

Es ist nun möglich, die wichtigsten Größen, wie Anzahldichten n_i und Energiedichten ρ_i für relativistische Materie (Für $m_i c^2 \ll kT$ ist das eine gute Näherung!) zu berechnen. Für verschwindende chemische Potentiale hat man (vgl. (21))

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{g_i}{2\pi^2}\int dp \frac{p^2}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \pm 1} & \qquad \rho_i &= \frac{g_i}{2\pi^2}\int dp \frac{p^2 \varepsilon(p)}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \pm 1} \\ p_i &= \frac{g_i c^2}{6\pi^2}\int dp \frac{p^4 \varepsilon^{-1}}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \pm 1} & \qquad s_i &= \frac{\rho_i + p_i}{T}. \end{aligned} \tag{25}$$

[1] Dies ist eine Annahme. In der Tat, kosmologische Modelle mit $\mu_\nu \gg kT$ wurden diskutiert

Die Ergebnisse sind in der **Tabelle 5** zusammengefaßt. Die mittlere Spalte enthält die wichtigsten Größen für die strahlungsdominierte Phase. Zum Vergleich zeigt die rechte Spalte die entsprechenden Größen für nichtrelativistische Teilchen der Masse m_i.

	$kT > m_i c^2$	$kT < m_i c^2$
Anzahldichte n	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g'(T) T^3$	$g_i (m_i kT)^3 e^{-\frac{m_i}{kT}}$
Energiedichte ρ	$\frac{\pi^2}{30} g(T) T^4$	$m_i n_i + \frac{3}{2} kT n_i$
Druck p	$\frac{1}{3}\rho$	$kT n_i$
Entropiedichte s	$\frac{2\pi^2}{45} g(T) T^3$	$mc^2 \frac{\rho_i}{T}$

Tabelle 5: Dichten und Druck des strahlungsdominierten Universums

Die Koeffizienten $g(T)$ und $g'(T)$ berücksichtigen den Beitrag aller Teilchen, die sich bei der Temperatur T im Gleichgewicht befinden:

$$g(T) = g_B + \frac{7}{8} g_F, \qquad g'(T) = g_B + \frac{3}{4} g_F, \tag{26}$$

wobei g_B und g_F die Anzahl der bosonischen bzw. fermionischen Freiheitsgrade zählen.

Neben der kosmischen Hintergrundstrahlung stellen die von der Materie entkoppelten thermischen Neutrinos einen wichtigen Zeugen der strahlungsdominierten Epoche des frühen Universums dar. Interessant ist dies vor allem im Zusammenhang mit einer möglichen nichtverschwindenden Ruhemasse einer Neutrinofamilie. In diesem Fall würde der Neutrinohintergrund in beträchtlichem Umfang zur heutigen Massendichte des Universums beitragen. Durch einen Vergleich der Reaktions- mit der Expansionsrate des Universums soll zunächst die Entkopplungstemperatur der Neutrinos abgeschätzt werden.

Bei Temperaturen unterhalb von 10^{12} K spielen die Nukleonen im thermodynamischen Gleichgewicht nur noch eine untergeordnete Rolle. Das Gleichgewicht zwischen den Photonen und den geladenen Teilchen wird durch die elektromagnetische Wechselwirkung aufrecht erhalten. Neutrinos und Antineutrinos stehen hauptsächlich über die schwachen Reaktionen

$$e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}, \qquad e^\pm + \nu \to e^\pm + \nu, \qquad e^\pm + \bar{\nu} \to e^\pm + \bar{\nu} \tag{27}$$

mit der Materie im Gleichgewicht. Hinzu kommen sechs mögliche Reaktionen mit Myonen, die jedoch aufgrund der größeren Masse der Myonen nur oberhalb von 10^{12} K, d.h. bei Energien oberhalb von $\simeq 100$ MeV eine Rolle spielen. Die Wirkungsquerschnitte σ_W der Reaktionen (27) sind von der Größenordnung $\sigma_W \simeq G_F^2 T^2$, wobei G_F die Fermi-Konstante bezeichnet: $G_F \simeq 10^{-5} m_p^{-2}$. Aus Gleichung (21) entnimmt man $n_e \simeq T^3$ für die Elektronen– bzw. Positronendichte. Die Reaktionsrate für Neutrinostreuung und –erzeugung kann demnach durch

$$\sigma_W n_e c \simeq G_F^2 T^5$$

abgeschätzt werden. Andernseits erhält man aus der Gesamtenergiedichte des Universums $\rho \sim g(T) T^4$ (siehe **Tabelle 5**) und der Friedmanngleichung im strahlungsdominierten Fall folgenden Ausdruck für die Expansionsrate H

$$H \simeq \sqrt{Gg} T^2.$$

Damit läßt sich nun das Verhältnis der schwachen Reaktionsraten zur Expansionsrate H näherungsweise bestimmen

$$\frac{\sigma_W n_e}{H} \simeq \frac{G_F^2}{\sqrt{Gg}} T^3 \simeq \frac{1}{\sqrt{g}} T_{10}^3. \tag{28}$$

T_{10} steht für die Temperatur, gemessen in Einheiten von 10^{10} K. Das Verhältnis (28) wird kleiner als eins bei Temperaturen unter 10^{10} K, d.h. die Neutrinos beginnen bei dieser Temperatur, aus dem thermodynamischen Gleichgewicht auszuscheiden. Auch nach der Entkopplung gehorchen sie weiterhin einer Fermi–Verteilung. Da die Entropie relativistischer Teilchen konstant ist, schließt man wie im Fall der Photonen (siehe oben), daß die Temperatur der Neutrinos bei der Expansion umgekehrt proportional zum Skalenfaktor abnimmt $T_\nu \propto a^{-1}$.

Die heutige Neutrinotemperatur kann mit Hilfe der gemessenen Strahlungstemperatur bestimmt werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Annihilation von Elektronen und Positronen bei Temperaturen $T \leq 5 \cdot 10^9$ K erfolgt, also erst nach der Entkopplung der Neutrinos. Dies wirkt sich natürlich auf die

Temperatur der Strahlung aus. Die Erhaltung der Entropie macht die Bestimmung des Verhältnisses von Neutrino– zur Photonentemperatur dennoch möglich. Die Entropie relativistischer Teilchen ist (vgl. (25))

$$S = \frac{4}{3}\frac{a^3}{T}\rho.$$

Vor der Annihilation tragen Elektronen und Positronen mit $\rho_{e^\pm} = 2\rho_\nu = \frac{7}{8}\rho_\gamma$ zur Gesamtenergiedichte bei. Für die Photonendichte gilt natürlich $\rho_\gamma \propto T^4$. Wenn man nun fordert, daß die Entropien S_v und S_n vor bzw. nach der Elektron–Positron–Annihilation gleich sind, gelangt man zu der folgenden Gleichung

$$S_v \equiv (1 + 2\frac{7}{8})(aT_\gamma)^3_v + (aT_\nu)^3_v = (aT_\gamma)^3_n + (aT_\nu)^3_n.$$

Die Entropie der Neutrinos ist aber separat erhalten, d.h. es gilt $(aT_\nu)^3_v = (aT_\nu)^3_n$. Damit ist der Zusammenhang zwischen der Temperatur der Photonen vor und nach der Annihilation hergestellt. Vor der Annihilation befanden sich die Neutrinos aber mit den Photonen im thermodynamischen Gleichgewicht, so daß ihre Temperaturen in dieser Phase gleich waren. Daraus folgt nun endgültig die gesuchte Beziehung zwischen Strahlungs– und Neutrinotemperatur nach der Annihilation

$$\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)_n = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Den Einfluß der Entkopplung der Photonen von der Materie auf die Temperatur kann man vernachlässigen, da die Baryonendichte sehr klein im Vergleich zur Strahlungsdichte ist. Für die heutige Temperatur der Neutrinos findet man dann

$$T_{0\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} T_{0\gamma} \simeq 1,9\,K.$$

Im letzten Abschnitt soll näher auf die Nukleosynthese eingegangen werden, deren Voraussagen erstaunlich gut mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Übungen:

1. Betrachte die folgenden elektroschwachen Reaktionen im Gleichgewicht:

$$e^- + \mu^+ \longleftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad e^- + p \longleftrightarrow \nu_e + n, \quad \mu^- + p \longleftrightarrow \nu_\mu + n.$$

(a) Zeige, daß die Beziehungen

$$\mu_{e^-} - \mu_{\nu_e} = \mu_{\bar{\nu}_\mu} - \mu_{\mu^+} = \mu_n - \mu_p = \mu_{\mu^-} - \mu_{\nu_\mu}$$

gelten.

(b) Wieviele unabhängige chemische Potentiale gibt es?

5.4 Nukleosynthese

Die beobachtete relative Häufigkeit von ${}^4He$ im Universum ist

$$Y_4 = \frac{\rho_{^4He}}{\rho_b} \simeq 0,25.$$

Im Vergleich dazu sind die relativen Häufigkeiten von ${}^3He$ und Deuterium wesentlich kleiner ($Y_3 \simeq 10^{-3} Y_4$, $Y_2 \simeq 2 \cdot 10^{-2} Y_4$). Das in unserer Galaxie beobachtete Verhältnis von Leuchtkraft zur Masse liegt bei etwa einem Zehntel des solaren Wertes

$$\frac{L}{M} \simeq 0,1 \cdot \frac{L_\odot}{M_\odot} \simeq 0,2 \frac{\text{erg}}{\text{s}}.$$

Diese große He_4-Häufigkeit kann nicht alleine durch Fusion in den Sternen erklärt werden. Dies zeigt folgende einfache Abschätzung: Setzt man die Leuchtkraft L als konstant voraus, ergibt sich, daß in unserer Galaxie eine Energie von ungefähr $0,006$ MeV pro Nukleon freigesetzt worden ist. Bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium werden dagegen 6 MeV pro Nukleon frei. Das bedeutet, daß höchstens ein Promille aller ${}^4He$-Kerne fusionär erzeugt worden sein kann. Dieser Umstand deutet darauf hin, daß der Großteil der leichten Elemente in der frühen, heißen Phase erzeugt worden ist.

Dem Verhältnis von Neutronen zu Protonen kommt eine besondere Bedeutung zu, da die Menge der erzeugbaren schwereren Elemente dadurch festgelegt wird. Das Ziel wird also zunächst darin bestehen, die zeitliche Entwicklung der relativen Häufigkeit X_n der Neutronen zu bestimmen

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p}.$$

Die Umwandlungen von Protonen in Neutronen und umgekehrt erfolgt über Prozesse der schwachen Wechselwirkung wie

$$p + e^- \leftrightarrow \nu_e + n, \qquad n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$$

oder den Zerfall des Neutrons. Die Reaktionsraten dieser schwachen Prozesse können berechnet werden [Wei72]. Zum Beispiel findet man für die Reaktion $\nu + n \to p + e^-$

$$\lambda = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{\pi} \int dp_\nu p_\nu v_e E_e^2 \left(1 + e^{\frac{E_\nu}{kT_\nu}}\right)^{-1} \left(1 + e^{-\frac{E_e}{kT}}\right)^{-1},$$

deren Wirkungsquerschnitt σ

$$\sigma = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{\pi} v_e E_e^2(p)$$

hier verwendet wurde. Dabei bezeichnen E_e und E_ν die Elektronen– bzw. Neutrinoenergie, v_ν ist die Geschwindigkeit und T_ν die Neutrinotemperatur. Die Raten der übrigen Reaktionen ergeben sich analog. Die Gesamtreaktionsraten der Umwandlungen $n \to p$ und $p \to n$ ergeben sich dann als

$$\begin{aligned} \lambda(n \to p) &= \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{\pi} \int dq q^2 (q+Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(q+Q)^2}} \\ &\times \left(1 + e^{\frac{q}{kT_\nu}}\right)^{-1} \left(1 + e^{-\frac{Q+q}{kT}}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda(p \to n) &= \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{\pi} \int dq q^2 (q+Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(q+Q)^2}} \\ &\times \left(1 + e^{\frac{-q}{kT_\nu}}\right)^{-1} \left(1 + e^{\frac{Q+q}{kT}}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Integration erstreckt sich mit Ausnahme des Intervalls $(-Q - m_e, -Q + m_e)$ über die ganze reelle Achse. Die Abkürzung Q steht hierbei für die Energiedifferenz $Q = E_e - E_\nu \equiv m_n - m_p \simeq 1,3\text{MeV}$. Die Ratengleichung für das Verhältnis X_n kann nun mit Hilfe dieser Reaktionsraten angegeben werden

$$-\frac{d}{dt} X_n = \lambda(n \to p) X_n - \lambda(p \to n)(1 - X_n). \quad (31)$$

Diese Differentialgleichung muß im allgemeinen numerisch integriert werden [KolTur90], [Pee93].

Einige wichtige Grenzfälle lassen sich jedoch näherungsweise behandeln. Wenn die Temperatur sehr viel größer als Q ist, d.h. $kT \gg Q$ gilt, kann man Q und m_e vernachlässigen. Die Temperatur kann als mit der Neutrinotemperatur identisch betrachtet werden. Die Reaktionsraten werden dann nahezu gleich und sind durch

$$\lambda(n \to p) \simeq \lambda(p \to n) = \frac{7}{15}\pi^3(G_V^2 + 3G_A^2)(kT)^5 = 0,36\, T_{10}^5 \mathrm{s}^{-1}$$

gegeben. Bei Temperaturen oberhalb von 10^3 K übersteigen diese Reaktionsraten die Expansionsrate des Universums und das System befindet sich im Gleichgewicht. Solange die Temperatur T gleich der Neutrinotemperatur ist, ergibt sich aus (29) und (30) das Verhältnis der beiden Reaktionsraten

$$\frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(n \to p)} = e^{-\frac{Q}{kT}}.$$

Damit kann man die Gleichgewichtslösung der Ratengleichung (31) angeben

$$X_n = \left(1 + e^{\frac{Q}{kT}}\right)^{-1}.$$

Für sehr hohe Temperaturen ($\gg Q$) ist

$$\lim_{T\to\infty} X_n = \frac{1}{2}.$$

Im Standardmodell benötigt man also keine zusätzlichen Anfangsbedingungen für die relativen Häufigkeiten von Neutronen und Protonen. Das thermische Gleichgewicht bei hohen Temperaturen legt diese bereits fest.

Fällt die Temperatur auf Werte unter $3 \cdot 10^{10}$ K (1 MeV), werden die schwachen Reaktionsraten klein im Vergleich zur Expansionsrate H. Die relative Neutronenhäufigkeit X_n wird nun nur noch vom β–Zerfall des Neutrons beeinflußt. Ihr Zeitverhalten weicht nun erheblich vom Gleichgewichtswert ab und folgt bis zum Beginn der Nukleosynthese dem Gesetz

$$X_n(t) = N \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$$

mit $\tau_n \simeq 1013$ s. Ein interessanter Aspekt hierbei ist die Tatsache, daß der Wert, auf den X_n beim Verlassen des Gleichgewichtes festgelegt wird, über $g(T)$ von der Anzahl der Spinfreiheitsgrade abhängt.

Bei Temperaturen oberhalb von 10^{10} K kommen auch kompliziertere Kerne im thermodynamischen Gleichgewicht vor. Die Gleichgewichtsbedingung (Massenwirkungsgesetz) an das chemische Potential μ_i der Kernsorte i mit Massenzahl A_i und Ladungszahl Z_i lautet

$$\mu_i = Z_i\mu_p + (A_i - Z_i)\mu_n.$$

Vernachlßsigen wir angeregte Kerne, so gehorcht die Anzahldichte solcher Kerne einer Maxwell–Boltzmann–Verteilung

$$n_i = g_i \hbar^{-3} (2\pi m_i kT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu_i - m_i}{kT}}.$$

Hierin ist m_i die Masse des Nukleons und g_i das statistische Gewicht des Grundzustandes. Die Massenhäufigkeit X_i, die durch

$$X_i = \frac{n_i A_i}{n_n + n_p}$$

definiert ist, kann dann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung auf folgende Art dargestellt werden

$$X_i = \frac{g_i}{2} X_p^{Z_i} X_n^{A_i - Z_i} \sqrt{A_i} \varepsilon^{A_i - 1} e^{\frac{B_i}{kT}}.$$

In dieser Gleichung bezeichnet B_i die Bindungsenergie

$$-B_i = m_i - Z_i m_p - (A_i - Z_i) m_n$$

des Kerns. Die dimensionslose Zahl ε ist eine Abkürzung für

$$\varepsilon = \frac{1}{4} n_N (2\pi m_N T)^{-\frac{3}{2}}.$$

Der numerische Wert von ε kann mit Hilfe des Zusammenhangs der Dichte mit der Rotverschiebung ($n_N \propto (1+z)^3$) abgeschätzt werden. Man findet, daß ε in der betrachteten Epoche sehr klein ist. Kerne der Sorte i werden also nur dann mit einer deutlich von Null verschiedenen Häufigkeit auftreten, wenn die Temperatur unter

$$T_i \simeq \frac{|B_i|}{(A_i - 1)|\ln \varepsilon|}$$

gesunken ist. Derartige Temperaturen liegen typischerweise unterhalb von $3 \cdot 10^9$ K. Bei diesen Temperaturen sind die Dichten schon so klein, daß das Gleichgewicht nicht mehr über direkte Vielteilchenreaktionen, wie z.B. $2n + 2p \rightarrow {}^4$He aufrecht erhalten werden kann. Folglich ist die Synthese komplexerer Kerne nur mit Hilfe kaskadierter Zweiteilchenreaktionen möglich. Die in diesem Zusammenhang bedeutendsten Reaktionen sind

$$p + n \leftrightarrow D + \gamma; \quad D + D \leftrightarrow^3 He + n \leftrightarrow 3H + p; \quad 3He + D \leftrightarrow^4 He + n.$$

Die Reaktionsrate des Prozesses $p + n \leftrightarrow D + \gamma$ ist groß im Vergleich zur Expansionsrate des Universums. Die Reaktion befindet sich im Gleichgewicht und die relative Häufigkeit des Deuteriums ist durch

$$X_D = \frac{3}{\sqrt{2}} X_p X_n \varepsilon e^{\frac{B_D}{kt}}$$

gegeben. Bei einer Temperatur von etwa $0,8 \cdot 10^9$ K liegt eine hinreichend große Menge Deuterium vor, um die Produktion von Helium in Gang zu setzen. Die Erzeugung schwererer Elemente wird durch das Fehlen stabiler Kerne der Massenzahlen $A = 5$ und $A = 8$ stark unterdrückt. Geringe Mengen ^{7}Li und ^{7}Be werden jedoch über die Synthese von ^{3}He und ^{4}He erzeugt. Die Nukleosynthese ist beendet, wenn alle ursprünglich ($T \simeq 0,1$ MeV) vorhandenen Neutronen in Helium und Deuterium umgewandelt worden sind. Die gesamte Dauer der Nukleosynthese beträgt einige Minuten. Die relative Massenhäufigkeit von ^{4}He ($Y_4 \simeq 0,25$) beträgt dann ungefähr das Doppelte der Neutronenhäufigkeit zu Beginn der Nukleosynthese.

Zum Schluß soll noch auf einen wichtigen Punkt hingewiesen werden. Wie weiter oben bereits erwähnt (**Tabelle 5**), hängt die für die Expansion und damit für die thermische Entwicklung maßgebliche Energiedichte auch von der Anzahl der Neutrinofamilien ab. Es stellt sich heraus, daß die berechnete Häufigkeit Y_4 mit den Beobachtungen im Einklang steht, wenn die Zahl der Neutrinofamilien kleiner als vier ist ($N_\nu < 4$). Dieses Resultat ist konsistent mit den drei bisher nachgewiesenen Neutrinofamilien und wird als einer der großen Erfolge des Standardmodells der Kosmologie betrachtet.

Übungen:

1. Erläutere die Struktur einer Ratengleichung und der Reaktionsraten λ am Beispiel der Reaktion $e^- + p \longleftrightarrow \nu_e + n$.

Literaturverzeichnis

[Boe88] Börner G.: *The Early Universe*. Springer–Verlag (1988).

[KolTur90] Kolb E.W., Turner M.S.: *The Early Universe*. Addison–Wesley Publishing Company (1990).

[Pee80] Peebles P.J.E: *The Lage–Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press (1980).

[Pee93] Peebles P.J.E: *Principles of Physical Cosmology.* Princeton University Press (1993).

[Wei72] Weinberg S.: *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons (1993).

Anhang

Lösung der Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1:

i, j bezeichnen die räumlichen Indizes der Metrik $g_{\mu\nu}$. Der räumliche Anteil wird mit h_{ij} gekennzeichnet. Man berechnet die folgenden nichtverschwindenden Christoffelsymbole:

$$\begin{aligned}
\Gamma^i{}_{jk} &= \frac{1}{2}\left(h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{jk,l}\right), \\
\Gamma^0{}_{ij} &= \frac{\dot{a}}{a}\, h_{ij}, \\
\Gamma^i{}_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a}\, \delta^i{}_j.
\end{aligned}$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des Ricci Tensors sind

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{ij} &= \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right) h_{ij}.
\end{aligned}$$

Der Krümmungsskalar ergibt sich zu

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right).$$

Aufgabe 1.2:

Φ ist das Newtonsche Potential. Es hängt nur von den räumlichen Koordinaten ab. Wie in Aufgabe 1.1 bezeichnen i, j, k die räumlichen Indizes. Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind:

$$\Gamma^0{}_{0i} \approx \partial_i \Phi$$

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{00} &\approx \partial_i \Phi \\ \Gamma^i{}_{jk} &\approx -\left(\partial_k \Phi\, \delta_{ij} + \partial_j \Phi\, \delta_{ki} - \partial_i \Phi\, \delta_{jk}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3:

Um aus dem Erhaltungssatz $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ den richtigen Anteil herauszufiltern, kontrahiert man mit u_μ. Zunächst wird jedoch $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ berechnet.

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= \left[(p+\rho)\, u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}\right]_{;\nu} \\ &= (p+\rho)_{;\nu}\, u^\mu u^\nu + (p+\rho)(u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + u^\mu u^\nu{}_{;\nu}) - p_{;\nu} g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= (p+\rho)_{;\nu} u_\mu u^\mu u^\nu + (p+\rho)(u_\mu u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + u_\mu u^\mu u^\nu{}_{;\nu}) - p_{;\nu} u_\mu g^{\mu\nu} \\ &= (p+\rho) u^\nu{}_{;\nu} + \rho_{;\nu} u^\nu. \end{aligned}$$

Damit lautet die relativistische Kontinuitätsgleichung

$$(p+\rho) u^\nu{}_{;\nu} + \rho_{;\nu} u^\nu = 0.$$

Nicht nur eine Energiedichte, sondern auch ein Druck erzeugt ein Gravitationsfeld.

Aufgabe 1.4:

Um die relativistische Eulergleichung zu finden, projiziert man mit $u_\mu u^\alpha - g_\mu{}^\alpha$:

$$\begin{aligned} & (u_\mu u^\alpha - g_\mu{}^\alpha)\left[(p+\rho)_{;\nu} u^\mu u^\nu + (p+\rho)(u^\mu{}_{;\nu} u^\nu + u^\mu u^\nu{}_{;\nu} - p_{;\nu} g^{\mu\nu}\right] \\ = \; & (p+\rho)_{;\nu} u^\alpha u^\nu + (p+\rho) u^\alpha u^\nu{}_{;\nu} - p_{;\nu} u^\alpha u^\nu - (p+\rho)_{;\nu} u^\alpha u^\nu \\ - \; & (p+\rho)(u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu + u^\alpha u^\nu{}_{;\nu}) - p_{;\nu} g^{\alpha\nu} \\ = \; & -p_{;\nu} u^\alpha u^\nu - (p+\rho) u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu + p^{;\alpha}. \end{aligned} \tag{32}$$

Damit lautet die relativistische Eulergleichung

$$-p_{;\nu} u^\alpha u^\nu - (p+\rho) u^\alpha{}_{;\nu} u^\nu + p^{;\alpha} = 0.$$

Aufgabe 2.1:

Das Alter des Universums berechnet sich zu

$$T_0 = \frac{2\pi a}{c} \approx \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{29}}{3 \cdot 10^{10}} \mathrm{s} \approx 2 \cdot 10^{19} \mathrm{s} \approx 6 \cdot 10^{11} \mathrm{Jahre}.$$

Aufgabe 3.1:

Die Friedmann Gleichung (7b) mit verschwindender kosmologischer Konstante kann man auch

$$\frac{\dot a^2}{a_0^2} - \frac{8\pi}{3} G\rho \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = -\frac{k}{a_0^2} = H_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right)$$

schreiben. Damit bleibt

$$\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega} = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho}{H_0^2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2$$

zu zeigen. Mit Hilfe von Gleichung (9) folgt

$$\omega\rho \frac{d}{dt} a^3 = -\frac{d}{dt}(\rho a^3), \qquad \text{d.h.} \quad \rho = c a^{-3(\omega+1)}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $\rho(0) = \rho_0$ erhält man das gewünschte Resultat.

Aufgabe 3.1.1:

Zu lösen ist das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot a^2 + k &= \frac{\Lambda}{3} a^2 \\ \ddot a &= \frac{\Lambda}{3} a \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist die Lösung

$$a(t) = C \mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t},$$

für $k = 1$ findet man

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + C\right),$$

und im Fall $k = -1$ folgt

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + C\right).$$

Aufgabe 3.3.1:

Für die Materiedichte im materiedominierten bzw. strahlungsdominierten Universum gilt:

$$\rho_m = \rho_{0m}\,(1+z)^3, \qquad \rho_r = \rho_{0r}\,(1+z)^4.$$

Die Bedingung gleicher Dichten lautet also $\rho_{0r}(1+z_{eq}) = \rho_{0m}$. Wir befinden uns im materiedominierten Universum, damit folgt

$$1 + z_{eq} = \frac{\rho_{0m}}{\rho_{0r}} = \frac{\Omega}{\Omega_{0r}}.$$

Setzt man $\Omega_{0r} \sim 2,3 \cdot 10^{-5} h^{-2}$ ein, so erhält man

$$1 + z_{eq} \sim 4,3 \cdot 10^4 h^2.$$

Die der Rotverschiebung z_{eq} entsprechende Zeit im materiedominierten Universum ist

$$t_{eq} = \frac{t_0}{(1+z_{eq})^{\frac{2}{3}}}.$$

Unter Benutzung von $t_0 = 0,98 \cdot 10^{10} F(1) h^{-1}$Jahre und $F(1) = 2/3$ (siehe **Tabelle 3**) folgt

$$t_{eq} = 0,72 \cdot 10^3 h^{-4}\text{Jahre}.$$

<u>Aufgabe 3.4.1:</u>

Die Lösung erhält man mit Hilfe der Gleichung $c\dot{t} = a(t)\dot{\chi}$. In der Zeitspanne von $t = 0$ bis $t = t_d$ war das Universum strahlungsdominiert, also der Skalenfaktor a gleich

$$a(t) = a_d \left(\frac{t}{t_d}\right)^{\frac{1}{2}},$$

also

$$a_0 \int_0^{t_d} dt \frac{c}{a(t)} = a_0 \int_0^{t_d} dt \frac{c}{a_d}\sqrt{\frac{t_d}{t}}.$$

Das heißt

$$d_r = 2c\frac{a_0}{a_d} t_d.$$

Von $t = t_d$ bis heute $(t = t_0)$ war das Universum materiedominiert mit

$$a(t) = a_d \left(\frac{t}{t_d}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Integration liefert

$$a_0 \int_{t_d}^{t_0} dt \frac{c}{a(t)} = a_0 \int_{t_d}^{t_0} dt \frac{c}{a_d} \left(\frac{t_d}{t}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

So erhält man

$$d_m = 3c \frac{a_0}{a_d} t_d^{\frac{2}{3}} (t_0^{\frac{1}{3}} - t_d^{\frac{1}{3}})$$

und es folgt

$$\frac{d_m}{d_r} = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t_0}{t_d}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = \frac{3}{2} \left[\sqrt{1 + z_d} - 1 \right].$$

Aufgabe 3.4.2:

Wie in Aufgabe 3.1.1 bereits berechnet, ist $a(t) = C \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$. Nun ist die Gleichung

$$c\dot{t} = a\dot{\chi} = C\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \dot{\chi}$$

zu integrieren. Die Lösung ist

$$d_0 = a_0 \int_t^{t_0} dt \frac{c}{C} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} = \frac{c\, a_0}{C} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t_0} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \right).$$

Den Ereignishorizont d_∞ erhält man im Limes $t_0 \to \infty$:

$$d_\infty = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}.$$

Das heißt, in exponentiell anwachsenden Universen gibt es Teilchen– und Ereignishorizonte.

Aufgabe 4.1.1:

Zunächst zur Eigenbewegungsdistanz d_L: Photonen, die an P im Zeitintervall $\triangle t$ emittiert werden, erreichen den Beobachter O im Intervall

$$\triangle t = \left(\frac{a_0}{a}\right) \triangle t.$$

Deshalb ist der beobachtete Energiefluß zeitdilatiert und rotverschoben:

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2} \left(\frac{a}{a_0}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right).$$

Das heißt, $d_l = a_0^2 \frac{r}{a}$.

Die Eigenbewegungsdistanz d_M ist über die scheinbare Winkelgeschwindigkeit $d\Theta/dt_0$ definiert. In der Zeit $\triangle t_0$ bewegt sich die Quelle um die wirkliche transversale Distanz

$$\triangle D = v_\perp \triangle t = v_\perp \triangle t_0 \frac{a(t)}{a(t_0)}.$$

Die tatsächliche Winkeländerung beträgt

$$\triangle\Theta = \frac{\triangle D}{ar} = \frac{v_\perp \triangle t_0}{a_0 r} \qquad \text{und} \qquad d_M = a_0 r.$$

Der Durchmesser D in der Definition der Winkeldistanz ist $D = ar\triangle\Theta$ und $d_A = \frac{D}{\triangle\Theta} = ar$.

Zusammenfassend erhält man

$$d_A = ar, \qquad d_M = a_0 r, \qquad d_L = \frac{a_0^2}{a} r$$

bzw.

$$(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L.$$

Aufgabe 5.1:

Die Intensität I hängt über die Helligkeitsdistanz l mit der Anzahl der Galaxien N zusammen:

$$dI = l dN.$$

Die Aufgabe besteht darin, die Abhängigkeit der Intensität von der empfangenen Frequenz zu ermitteln. Drückt man zunächst die Helligkeitsdistanz durch die Rotverschiebung aus

$$l = \frac{L}{a_0^2 4\pi r^2} \frac{1}{(1+z)^2}$$

und berücksichtigt die Beziehung

$$dN = n_0 \frac{4\pi r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

für die mittlere Anzahl n_0 der Galaxien im mitbewegten Volumen so ergibt sich:

$$dI = \frac{L n_0}{a_0^2 (1+z)^2} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Mit Hilfe der in Kapitel **3.2** über die Rotverschiebung definierten Funktion $f(r)$ und der Friedmanngleichung für ein materiedominiertes Universum findet man die Beziehung:

$$f(r) = \arcsin r = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_a^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a(\alpha - a)}}.$$

Hierbei wurde die Abkürzung $\alpha = H_0^2 \Omega_0 a_0^3$ verwendet. Die Substitution $a = \alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}$ liefert dann:

$$r = \sin(\beta_0 - \beta_1),$$

d.h.

$$dI = -\frac{Ln_0}{a_0^2(1+z)^2} d\beta.$$

Im nächsten Schritt muß der Parameter β durch die Rotverschiebung ausgedrückt werden. Dazu benutzt man die Beziehungen $1 + z = \frac{a_0}{a}$ und $a = \alpha \sin^2 \frac{\beta}{2}$ und erhält:

$$\cos \beta = \frac{\cos \beta_0 - z}{1 + z}.$$

Damit kann die Intensität in Abhängigkeit von der Rotverschiebung dargestellt werden

$$dI = -\frac{Ln_0}{a_0^2} \left(1 - \left(\frac{\cos \beta_0 - z}{1 + z} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 + \cos \beta_0}{(1+z)^4} dz.$$

Mit Hilfe der Definition der Rotverschiebung $1+z = \frac{\nu_e}{\nu}$ (ν_e ist die emittierte, ν die empfangene Frequenz) ergibt sich schließlich der Zusammenhang von Intensität und empfangener Frequenz

$$dI = \frac{Ln_0}{a_0^2} \frac{1 + \cos \beta_0}{\sqrt{2(1 + \cos \beta_0) - \frac{\nu}{\nu_e}(1 + \cos \beta_0)^2}} \left(\frac{\nu}{\nu_e} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\nu_e} d\nu.$$

Die gesamte empfangene Intensität I findet man durch Integration dieser Beziehung. Sie ist endlich. Das Olberssche Paradoxon tritt nicht auf.

<u>Aufgabe 5.1.1:</u>

Befindet sich alle Materie im thermodynamischen Gleichgewicht, so liefert der zweite Hauptsatz für die Änderung der Entropie

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Die Friedmanngleichung in der Form $pd(a^3) = -d(\rho a^3)$ führen mit $V = a^3$ zu folgender Beziehung:

$$pdV = -d(\rho V) = -dU,$$

d.h. die Expansion erfolgt adiabatisch. Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes ergibt sich nun sofort

$$dQ = dU + pdV = 0 \quad \text{bzw.} \quad dS = 0.$$

Die Entropie ist bei einer adiabatischen Expansion erhalten.

Aufgabe 5.3.1:

Die Gleichgewichtsbedingung der Reaktionen lauten:

$$\begin{aligned} \mu_{e^-} + \mu_{\mu^+} &= \mu_{\nu_e} + \mu_{\bar{\nu}_\mu} \\ \mu_{e^-} + \mu_p &= \mu_{\nu_e} + \mu_n \\ \mu_{\mu^-} + \mu_p &= \mu_{\nu_\mu} + \mu_n . \end{aligned}$$

Die gesuchten Beziehungen ergeben sich sofort durch geeignete Subtraktion dieser Gleichungen. Entsprechend den vier erhalten Quantenzahlen Q (elektrische Ladung), B (Baryonenzahl), L_e und L_μ (Elektron- bzw. Myonenleptonenzahl) gibt es vier unabhängige chemische Potentiale. Die Tau-Leptonen spielen aufgrund ihrer größeren Masse keine Rolle im elektroschwachen Gleichgewicht.

Aufgabe 5.4.1:

Betrachtet wird die Reaktion

$$e^- + p \longleftrightarrow \nu_e + n.$$

Die relative Häufigkeit $X_n = \frac{n_n}{n_N}$ der Neutronen gehorcht der Ratengleichung

$$\dot{X}_n = -\lambda(n \to p)X_n + \lambda(p \to n)(1 - X_n).$$

Die Reaktionsrate $\lambda(n \to p)$ für den Zerfall des Neutrons bewirkt eine Abnahme der relativen Neutronenhäufigkeit, die Rate $\lambda(p \to n)$ entsprechend eine Zunahme. Die Struktur einer Reaktionsrate soll am Beispiel des Prozesses $e^- + p \to \nu_e + n$ erläutert werden. Die Reaktionsrate $\lambda(n \to p)$ hat die Struktur

$$\lambda(n \to p) \sim \int dp\, p^2 n_\nu (1 - n_e) v_\nu \sigma.$$

Die Reaktionsrate ist natürlich proportional zur Geschwindigkeit v_ν der Neutrinos und zum Streuquerschnitt σ. Eine größere Dichte n_ν der Neutrinos bewirkt auch eine größere Reaktionsrate λ. Der Faktor $1 - n_\nu$ bringt den Einfluß der Besetzung der Endzustände zum Ausdruck. Die Reaktionsrate wird mit zunehmender Besetzung der Elektronenzustände unterdrückt.