Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli
MSc Daniel Schmidt

Sommersemester 2016

Übungen zur Quantenmechanik II

Blatt 9

Aufgabe 21: Intervalle im Minkowski-Raum 1+1+1 = 3 Punkte

P und Q seien zwei Ereignisse im Minkowski-Raum. Die Koordinaten von P seien $x = (x^\mu)$ und die Koordinaten von Q seien y.

1. Zeigen Sie, dass für raumartig getrennte Ereignisse ein Inertialsystem existiert, in dem P und Q gleichzeitig sind und dass ihre Zeitreihenfolge durch eine geeignete Wahl des Inertialsystems vertauscht werden kann.
2. Zeigen Sie, dass für zeitartig getrennte Ereignisse ein Inertialsystem existiert, in dem P und Q am selben Raumpunkt sind.
3. Für lichtartig getrennte Ereignisse: Bestimmen Sie die Hyperfläche in der Raumzeit, auf der Q bezüglich P liegen kann.

Hinweis: Bitte keine langen Rechnungen anstellen. Argumentieren Sie möglichst geometrisch. Diskutieren Sie die Bildmenge $\{\eta = \Lambda\xi\}$ für raumartige, zeitartige und lichtartige Differenzvektoren $\xi = y - x$ wenn Λ die Menge der Lorentztransformationen durchläuft.

Aufgabe 22: Erhaltene Ladung der Klein-Gordon-Gleichung 2+1 = 3 Punkte

Zeigen Sie, dass für jedes Wellenpaket $\phi^+(t, \boldsymbol{x})$ bzw. $\phi^-(t, \boldsymbol{x})$ bestehend aus Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung mit $\epsilon = \hbar\omega \geq mc^2$ oder aus Lösungen mit $\epsilon \leq mc^2$ die erhaltene Größe

$$Q = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int \left\{ \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right\}$$

ein festes Vorzeichen hat.

Aufgabe 23: Lösungen der Wellengleichung 2+2+1+1 = 6 Punkte

Wir betrachten die Wellengleichung $\Box\phi = 0$ in zwei Raumzeit-Dimensionen. Dies ist auch die Klein-Gordon-Gleichung für ein masseloses Teilchen in zwei Raumzeit-Dimensionen.

1. Charakterisieren Sie die allgemeine Lösung der Wellengleichung
$$\Box\phi = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0\,.$$
Hinweis: Führen Sie Lichtkegelkoordinaten $x^- = ct - x$ und $x^+ = ct + x$ ein.
2. Eine Lösung ist eindeutig durch das anfängliche Feld $\phi|_{t=0} = \phi_0(x)$ und das anfängliche „Geschwindigkeitsfeld“ $\partial_t \phi|_{t=0} = c\phi_1(x)$ bestimmt. Wie sieht die allgemeine Lösung für gegebene ϕ_0 und ϕ_1 aus?

3. Es seien
$$\phi_0 = \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \quad \text{und} \quad \phi_1 = \phi_0(x) \cdot \sin(kx)\,.$$
Wie sieht die Lösung für diese Anfangsbedingung aus?

4. Plotten Sie die Lösungen für $ct = 0, 1, 2, 3, 4$ und 5. Wählen Sie dabei $\sigma = 1$ (besser: x und ct werden in Vielfachen von σ angegeben) und $k\sigma = 1$.

Abgabetermin: Donnerstag, 09.06.2016, vor der Vorlesung