Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli
MSc Daniel Schmidt

Sommersemester 2016

Übungen zur Quantenmechanik II

Blatt 6

Aufgabe 14: Drei Teilchen mit Spin 1/2 — 1+2+1+1= 5 Punkte

Für ein System bestehend aus drei Teilchen mit Spin 1/2 existieren acht Spinzustände. Klassifiziere diese nach ihrem Gesamtspin. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren (Spinfunktionen) $|SS_3\rangle$, beschrieben durch die Werte S und S_3 des Gesamtspins $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}^{(2)} + \boldsymbol{s}^{(3)}$.
(1 Punkt für die Klassifikation, 2 für das Multiplett mit größtem Spin und 1+1 für die verbleibenden Multipletts).

Aufgabe 15: Quadrupoltensor — 3+2+2+2+2 = 11 Punkte

Die kartesischen Komponenten des Quadrupoltensors sind

$$Q_{ik} = Q_{ki} = 3x_i x_k - r^2\delta_{ik}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Der Tensor Q ist symmetrisch und spurlos und hat entsprechend 5 linear unabhängige Komponenten. Bis auf einen Faktor r^2 können sie als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen mit $\ell = 2$ geschrieben werden.

1. Schreiben Sie die Komponenten Q_{ik} als Linearkombinationen der Y_{2m}.
   Hinweis: Erinnern Sie sich an $Y_{\ell m} \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$.
2. Was sind die Kommutatoren $[L_k, Y_{\ell m}]$?
   Hinweis: Wenn Sie es nicht wissen, dann wenden Sie den Kommutator auf ein Wellenfunktion im Ortsraum an.
3. Bestimmen Sie die Kommutatoren von L_3 mit den Komponenten Q_{ik}.
4. $-\mathrm{i}[L_3, Q]$ kann als Kommutator einer antisymmetrischen Matrix Ω_3 mit Q geschrieben werden. Bestimmen Sie Ω_3 und begründen Sie diese Beobachtung.
5. Sie sollten zum Beispiel

   $$[L_3, Q_{13} + \mathrm{i}Q_{23}] = -Q_{12} + \mathrm{i}(Q_{11} - Q_{33}) \quad \text{und} \quad [L_3, Q_{13} - \mathrm{i}Q_{23}] = -(Q_{13} - \mathrm{i}Q_{23})$$

   erhalten. Begründen Sie dies mit dem Wigner-Eckart Theorem und berechnen Sie nun mit Hilfe des Theorems die Kommutatoren

   $$[L_+, Q_{12}] \quad \text{und} \quad [L_-, Q_{12}].$$

Abgabetermin: Donnerstag, 19.05.2016, vor der Vorlesung