Friedrich-Schiller-Universität Jena Sommersemester 2016
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli
MSc Daniel Schmidt

Übungen zur Quantenmechanik II

Blatt 3

Aufgabe 6: Wechselwirkungsfreie Teilchen 4 Punkte

Ein quantenmechanisches Einteilchensystem wird durch einen dreidimensionalen Hilbertraum beschrieben. Die Basis des Hilbertraumes sei $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$. Drei Teilchen besetzen diese Zustände. Wieviele verschiedene physikalische Zustände gibt es, wenn die Teilchen

1. drei identische Fermionen
2. drei identische Bosonen
3. zwei identische Fermionen und ein Boson
4. zwei identische Bosonen und ein Fermion

sind?

Aufgabe 7: 2 Fermionen im Kastenpotential 4 Punkte

Zwei nicht-wechselwirkende identische Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen seien in einem eindimensionalen Kasten $[0, L]$ eingeschlossen (dieser kann durch ein unendlich tiefes Kastenpotential modelliert werden). Die (unnormierten) Eigenfunktionen des (spin-unabhängigen) Einteilchen-Hamilton-Operators sind $\sin(n\pi x/L)$ und die nicht-entarteten Einteilchenenergien $\pi^2 n^2/L^2$ mit $n \geq 1$.

Schreibe die sechs Zweiteilchenzustände niedrigster Energie in der $\{x_1, x_2, m_1, m_2\}$ Darstellung. Hier steht $m_1 \in \{\uparrow, \downarrow\}$ für Spin up und Spin down von Teilchen 1.
Hinweis: Sie dürfen auf die Resultate für die Kopplung von zwei Spins bei der Behandlung des He-Atoms zurückgreifen.

Aufgabe 8: Anzahl Mehrteilchenzustände 2+1 = 3 Punkte

Wenn Sie N identische Bosonen in M verfügbaren Quantenzuständen haben, dann gibt es

$$W = \frac{(N + M - 1)!}{N!(M - 1)!}$$

Möglichkeiten.

- Beweisen Sie diese Formel.
  Hinweis: Stellen Sie sich jeden verfügbaren Quantenzustand als ein Kästchen vor, das eine bestimmte Anzahl identischer Kugeln aufnehmen kann. Bei der Bestimmung der Anzahl Verteilungsmöglichkeiten sollte man beachten, dass die N Kugeln und die $M - 1$ Wände zwischen den Kästchen in beliebiger Reihenfolge angeordnet werden können. Achten Sie darauf, welche Anordnungen identischen Zuständen entsprechen. Die Abbildung zeigt eine mögliche Anordnung mit $N = 10$ und $M = 3$.

- Bestimmen Sie für identische Fermionen die Anzahl Möglichkeiten, N Teilchen auf M verfügbare Quantenzustände zu verteilen.

Aufgabe 9: Dreikörperproblem 2+1+1 = 4 Punkte

Wir betrachten ein System von drei Teilchen mit gleichen Massen m und Paarwechselwirkungen

$$V = V(r_{12}) + V(r_{13}) + V(r_{23}), \quad r_{ij} = |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j| \,.$$

Zeige, dass der Hamilton-Operator

$$H^{(3)} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i^2 + V$$

folgende Form hat

$$H^{(3)} = H_{\mathrm{cm}} + H_{\mathrm{rel}}^{(3)} \quad \text{mit} \quad H_{\mathrm{cm}} = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M}.$$

Darin bezeichnet $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3$ den Gesamtimpuls und der Operator für die Relativbewegung ist die Summe von Zweiteilchen-Operatoren,

$$H_{\mathrm{rel}}^{(3)} = H_{12} + H_{13} + H_{23}.$$

1. Bestimmen Sie diese Zweiteilchen-Operatoren.
2. Kommutiert H_{cm} mit den H_{ij}?
3. Kommutieren die H_{ij} im Allgemeinen?

Abgabetermin: Donnerstag, 28.04.2016, vor der Vorlesung