Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli
MSc Daniel Schmidt

Sommersemester 2016

Übungen zur Quantenmechanik II

Blatt 11

Aufgabe 27: Gamma-Matrizen 2+1+1+1+2 = 7 Punkte

In der chiralen Darstellung haben die Dirac-Matrizen die Form

$$\gamma^0 = \sigma_1 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = -\mathrm{i}\sigma_2 \otimes \sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

und in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \mathrm{i}\sigma_1 \otimes \sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Matrizen jeweils die Antikommutationsregeln $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ erfüllen.
   Hinweis: Die Rechnungen sind einfacher, wenn Sie Tensorprodukt-Regeln verwenden, z.B. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.
2. Was sind die Hermizitätseigenschaften der γ^μ? Warum kann z.B. γ^1 nicht hermitesch sein?
3. Berechnen Sie $\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ für beide Darstellungen.
4. Benutzen Sie nur die Antikommutationsregeln für die γ^μ um zu zeigen, dass γ_5 mit den γ^μ antikommutiert, $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$.
5. Zeigen Sie unter Benutzung der Antikommutationsregeln die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4\mathbb{1} \\ \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu &= -2\not{p} \\ \gamma^\mu \not{p}\not{q} \gamma_\mu &= 4p \cdot q\mathbb{1}, \end{aligned}$$

   wobei $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$ und $p \cdot q = p^\mu q_\mu$ sind (Aufteilung: 0.5+0.5+1 Punkte).

Aufgabe 28: Infinitesimale Lorentz-Transformationen 3+2+2 = 7 Punkte

Wir definieren die Matrizen $\Sigma_{\mu\nu}$ und Operatoren $M_{\mu\nu}$ gemäß

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4\mathrm{i}}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \qquad M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu\,,$$

worin $p_\mu = -\mathrm{i}\hbar\partial_\mu$ ist.

1. Berechnen Sie die Kommutatoren

$$\left[\Sigma_{\mu\nu}, \gamma_\alpha\right] \quad \text{und} \quad \left[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\alpha\beta}\right].$$

   Hinweis: benutzen Sie in dieser Teilaufgabe nur die Eigenschaft $\gamma_\nu\gamma_\alpha = -\gamma_\alpha\gamma_\nu + 2g_{\nu\alpha}$ und nicht etwa eine der expliziten Darstellungen!

2. Bestimmen Sie die Kommutatoren der Operatoren $M_{\mu\nu}$.
3. Eine infinitesimale Lorentztransformation eines Skalarfeldes ist gegeben durch

$$\delta_\omega \phi(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi\left(\Lambda^{-1}(s)x\right), \quad \Lambda(s) = \mathrm{e}^{s\omega}$$

   wobei $\omega^\mu{}_\nu$ nach herunter ziehen des Index μ anti-symmetrisch ist, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Wie hängt $\delta_\omega \phi$ mit den $M_{\mu\nu}$ zusammen?
4. Was erzeugen wohl die Matrizen $\Sigma_{\mu\nu}$? (ohne Punkte)

Bemerkung: die Bedeutung von $J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}$ wird in der Vorlesung diskutiert werden.

Aufgabe 29: Weyl-Spinoren 2 Punkte

Der zwei-komponentige Spinor $\phi(p)$ erfüllt die Gleichung

$$p_0 \phi(p) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \phi(p) .$$

Zeigen Sie: Es gibt nicht-verschwindende Lösungen für ϕ nur für

$$p_0 = \pm|\boldsymbol{p}| = \frac{E}{c} .$$

Hinweis: Wenden Sie den Helizitätsoperator $\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ oder $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ auf beide Seiten der Gleichung an.

Abgabetermin: Donnerstag, 23.06.2016, vor der Vorlesung.