Übungen zur Quantenmechanik II**Blatt 10****Aufgabe 24: Lorentz-Transformation von $F^{\mu\nu}$**

2+2 = 4 Punkte

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ transformiert bei einem Wechsel des Inertialsystems $I \rightarrow I'$ gemäß

$$F^{\mu\nu}(x) \mapsto F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x).$$

Betrachten Sie den Lorentz-Boost

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \beta \gamma x^1, & x'^2 &= x^2, \\ x'^1 &= \gamma x^1 - \beta \gamma x^0, & x'^3 &= x^3. \end{aligned}$$

Wie transformiert sich die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ und die magnetische Feldstärke $\mathbf{B}$ in $F^{\mu\nu}$ unter dieser Lorentz-Transformation? Benutzen Sie die Notation und Konventionen in der Vorlesung.

Aufgabe 25: Das skalare Feld

2+2 = 4 Punkte

In der Vorlesung wurde die 4-er Stromdichte j^μ des Klein-Gordon-Feldes ϕ in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes mit dem Potential A_μ folgendermaßen definiert:

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* D^\mu \phi - \phi (D^\mu \phi)^*)$$

Darin tritt die kovariante Ableitung auf:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \phi.$$

1. Zeigen Sie, dass die Stromdichte eichinvariant ist, d.h. invariant unter der Transformation

$$A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad \phi \mapsto e^{ie\lambda/\hbar c} \phi$$

mit beliebiger Eichfunktion λ ist.

2. Zeigen Sie, dass der Strom erhalten ist,

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

falls ϕ die Klein-Gordon-Gleichung löst,

$$\left(D_\mu D^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0.$$

Aufgabe 26: Klein'sches Paradoxon

1,5+2+1+1 = 5,5 Punkte

Ein positiv geladenes Teilchen mit Impuls p und Energie E (in 1 + 1 Dimensionen mit Koordinaten (t, x)) treffe bei $x = 0$ auf eine elektrostatische Barriere $A_0(x) = U\theta(x)$ mit $U > 0$ und

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Streulösungen der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 c^2 \right\} \phi = 0.$$

Nehmen Sie an, dass die Teilchen von links gegen die Barriere anlaufen. Dann ist für $x < 0$

$$\phi(t, x) = e^{-iEt/\hbar} (e^{ipx/\hbar} + \mathcal{R}e^{-ipx/\hbar}),$$

mit Reflexions-Amplitude $\mathcal{R}$. Setzen Sie weiterhin für $x > 0$

$$\phi(t, x) = \mathcal{T}e^{-iEt/\hbar}e^{iqx/\hbar}$$

mit Transmissions-Amplitude $\mathcal{T}$.

1. Wie lautet die Beziehung zwischen Energie und Impuls links und rechts von der Barriere? Welche qualitativen Aussagen können Sie über die Lösungen in den drei Energie-Intervallen

$$E \geq eU + mc^2, \quad eU - mc^2 < E < eU + mc^2, \quad E < eU - mc^2$$

machen?

2. Fordern Sie bei der Lösung des Streuproblems Stetigkeit für ϕ und $\partial_x \phi$ bei $x = 0$ und berechnen Sie die Koeffizienten $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ für obige drei Energie-Intervalle.
3. Was können Sie (ohne weitere Rechnung) über die Reflexionswahrscheinlichkeit $|\mathcal{R}|^2$ in den Intervallen

$$-mc^2 \leq E \leq -mc^2 + eU \quad \text{und} \quad mc^2 \leq E \leq mc^2 + eU$$

aussagen?

4. Berechnen Sie die Gruppen-Geschwindigkeit rechts vom Sprung für Energien $E < -mc^2$. Diese Geschwindigkeit sollte positiv sein. Was für eine (scheinbar) unphysikalische Eigenschaft von $\mathcal{R}$ folgt daraus?

Abgabetermin: Donnerstag, 16.06.2016, vor der Vorlesung.