Übungen zur Quantenmechanik II

Blatt 1

Aufgabe 1: Relativistische Effekte

1+3 = 4 Punkte

In dieser Serie wollen wir die in der QMI besprochene stationäre Störungstheorie anwenden. Rufen Sie sich diese wieder in Erinnerung (mit Hilfe Ihrer Notizen oder eines Lehrbuchs über QM).

Der nicht-relativistische Hamilton-Operator eines Elektrons mit Masse m im sphärisch symmetrischen Coulomb Potential ist

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}.$$

Berücksichtigen Sie nun in vereinfachter Weise relativistische Effekte mit Hilfe des folgenden Hamilton-Operators, der durch die relativistische Energie-Impuls-Beziehung motiviert werden kann,

$$H' = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - \frac{e^2}{r}.$$

- Entwickeln Sie den kinetischen Term $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ in Potenzen von $x = p^2/(m^2c^2)$ bis zur zweiten Ordnung und behandeln Sie die Terme, die von H_0 abweichen, als Störung. (Hinweis: Konstante Terme können Sie ignorieren.)
- Berechnen Sie die Änderung der Grundzustandsenergie in erster Ordnung in Störungstheorie. (Verwenden Sie dazu Ihre Kenntnisse über das Wasserstoff-Atom aus der QM1 Vorlesung.)

Aufgabe 2: Störung des harmonischen Oszillators

1+3+2 = 6 Punkte

Nun betrachten wir den harmonischen Oszillator mit Hamilton-Operator

$$H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

Diesen stören wir mit einer anziehenden anharmonischen Kraft $-4\lambda x^3$, die aus einem quartischen Potential

$$V(x) = \lambda x^4 = \frac{\lambda}{16\zeta^4}\left(a + a^\dagger\right)^4 \equiv \frac{\lambda}{16\zeta^4}\Delta$$

abgeleitet wird.

- Bestimmen Sie die Konstante ζ ?

- Multiplizieren Sie nun das quartische Polynom $\Delta = (a + a^\dagger)^4$ aus und fassen Sie Terme zusammen, die die Besetzungszahl um denselben Betrag verändern. Bringen Sie Δ mit Hilfe von $aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = N + 1$ in die Form

$$\Delta = P_1(N) + aP_2(N)a + a^\dagger P_2(N)a^\dagger + a^4 + a^{\dagger 4}$$

Bestimmen Sie die Polynome P_1 und P_2 .

- Bestimmen Sie die Änderung der Energien $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ des harmonischen Oszillators in der ersten Ordnung Störungstheorie.

Abgabetermin: Dienstag, 12.04.2016, vor der Vorlesung