

Übungen zur Quantenmechanik II

Sommersemester 2006

Blatt 1

1.) Supersymmetrische Quantenmechanik

Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung der Stufenoperatoren des harmonischen Oszillators: Gegeben sei ein Differentialoperator

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \partial_x + W(x), \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \partial_x + W(x),$$

wobei $W(x)$ eine beliebige reelle Funktion ist. Daraus bildet man nun die folgenden Hamiltonoperatoren zweier verschiedener Systeme:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} + W(x)^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} + V^{(1)}(x) \\ H^{(2)} &= AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} + W(x)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{xx} + V^{(2)}(x) \end{aligned}$$

wobei $W'(x) \equiv \partial_x W(x)$ ist.

Wie Sie sehen werden, sind diese Systeme sehr eng verknüpft, so dass sich mit dieser Methode aus der Kenntnis eines Systems andere exakt lösbare Systeme gewinnen lassen.

- (a) Warum ist A^\dagger der zu A adjungierte Operator? **1 Punkt**
- (b) Verifizieren Sie die Formeln für die Hamiltonoperatoren! **1 Punkt**
- (c) Beweisen Sie, dass das Spektrum beider Operatoren positiv ist und dass für $E = 0$ die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung gelten müssen:

$$E = 0 : \quad A\psi_0^{(1)} = 0, \quad A^\dagger\psi_0^{(2)} = 0$$

Hinweis: Nutzen Sie im Ausdruck für die Energie-Erwartungswerte $(\psi, H^{(1)}\psi)$ und $(\psi, H^{(2)}\psi)$ die obige Faktorisierung der Hamiltonoperatoren! Bestimmen Sie $\psi_0^{(1)}$ und $\psi_0^{(2)}$! **2 Punkte**

- (d) Zeigen Sie den folgenden Zusammenhang:
Ist $\psi^{(2)}$ eine Eigenfunktion von $H^{(2)}$ mit Energie $E \neq 0$, dann ist $A^\dagger\psi^{(2)}$ eine Eigenfunktion von $H^{(1)}$ mit gleicher Energie. **2 Punkte**

- (e) Wie sieht das Potential $V^{(1)}$ aus, wenn $V^{(2)}$ das (nach oben verschobene) Potential des freien Teilchens ist:

$$V^{(2)}(x) \equiv \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m}, \quad \alpha > 0$$

Hinweis: Lösen Sie $W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = V^{(2)}(x)$ und bilden Sie dann $V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x)$. **3 Punkte**

- (f) Skizzieren Sie die Potentiale $V^{(1)}(x)$ für verschiedene α ! Wählen Sie dabei die Integrationskonstanten, so dass $V^{(1)}$ eine gerade Funktion ohne Singularitäten ist. Welches Spektrum erwarten Sie? Welche Asymptotik werden die Energie-Eigenfunktionen aufweisen? **2 Punkte**

- (g) Wenn $W(x)$ endliche Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ hat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) = W_-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = W_+$$

dann gilt dies auch für die Potentiale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V^{(1),(2)}(x) = W_-^2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} V^{(1),(2)}(x) = W_+^2$$

so dass Reflexions- und Transmissionskoeffizient definiert werden können. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$R^{(1)}(k) = \frac{W_- + i\kappa k}{W_- - i\kappa k} R^{(2)}(k), \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - W_-^2)}$$

$$T^{(1)}(k) = \frac{W_+ - i\kappa \tilde{k}}{W_- - i\kappa k} T^{(2)}(k), \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - W_+^2)}$$

mit $\kappa = \hbar/\sqrt{2m}$.

3 Punkte

Insgesamt: 14 Punkte

Abgabetermin: Donnerstag 27.04.06 nach der Vorlesung