19.04.2006

Problem sheet „Advanced Quantum Mechanics“

Wintersemester 2019/20

Blatt 1

Problem 1: Supersymmetrische Quantenmechanik 14 points

Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung der Stufenoperatoren des harmonischen Oszillators: Gegeben sei ein Differentialoperator

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\,\partial_x + W(x)\;, \qquad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\,\partial_x + W(x)\;,$$

wobei $W(x)$ eine beliebige reelle Funktion ist. Daraus bildet man nun die folgenden Hamiltonoperatoren zweier verschiedener Systeme:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx} + W(x)^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\,W'(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx} + V^{(1)}(x) \\ H^{(2)} &= AA^\dagger = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx} + W(x)^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\,W'(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx} + V^{(2)}(x) \end{aligned}$$

wobei $W'(x) \equiv \partial_x W(x)$ ist.

Wie Sie sehen werden, sind diese Systeme sehr eng verknüpft, so dass sich mit dieser Methode aus der Kenntnis eines Systems andere exakt lösbare Syteme gewinnen lassen.

1. Warum ist $A^\dagger$ der zu A adjungierte Operator auf dem Hilbertraum $L_2(\mathbb{R})$? **1 Punkt**
2. Verifizieren Sie die Formeln für die Hamiltonoperatoren! **1 Punkt**
3. Beweisen Sie, dass das Spektrum beider Operatoren positiv ist und dass für $E = 0$ die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung gelten müssen:

   $$E = 0\ : \qquad A\psi_0^{(1)} = 0\;, \qquad A^\dagger\psi_0^{(2)} = 0$$

   Hinweis: Nutzen Sie im Ausdruck für die Energie-Erwartungswerte $(\psi, H^{(1)}\psi)$ und $(\psi, H^{(2)}\psi)$ die obige Faktorisierung der Hamiltonoperatoren! Bestimmen Sie $\psi_0^{(1)}$ und $\psi_0^{(2)}$! **2 Punkte**
4. Zeigen Sie den folgenden Zusammenhang:

   Ist $\psi^{(2)}$ eine Eigenfunktion von $H^{(2)}$ mit Energie $E \neq 0$, dann ist $A^\dagger\psi^{(2)}$ eine Eigenfunktion von $H^{(1)}$ mit gleicher Energie. **2 Punkte**
5. Wie sieht das Potential $V^{(1)}$ aus, wenn $V^{(2)}$ das (nach oben verschobene) Potential des freien Teilchens ist:

   $$V^{(2)}(x) \equiv \frac{\alpha^2\hbar^2}{2m}\;, \qquad \alpha\ >\ 0$$

   Hinweis: Lösen Sie $W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = V^{(2)}(x)$ und bilden Sie dann $V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x)$. **3 Punkte**

6. Skizzieren Sie die Potentiale $V^{(1)}(x)$ für verschiedene α! Wählen Sie dabei die Integrationskonstanten, so dass $V^{(1)}$ eine gerade Funktion ohne Singularitäten ist. Welches Spektrum erwarten Sie? Welche Asymptotik werden die Energie-Eigenfunktionen aufweisen? **2 Punkte**

7. Wenn $W(x)$ endliche Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ hat

$$\lim_{x\to-\infty} W(x) = W_- \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} W(x) = W_+$$

dann gilt dies auch für die Potentiale

$$\lim_{x\to-\infty} V^{(1),(2)}(x) = W_-^2 \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} V^{(1),(2)}(x) = W_+^2$$

so dass Reflexions- und Transmissionskoeffizient definiert werden können. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} R^{(1)}(k) &= \frac{W_- + i\kappa k}{W_- - i\kappa k} R^{(2)}(k) \ , \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - W_-^2)} \\ T^{(1)}(k) &= \frac{W_+ - i\kappa \tilde{k}}{W_- - i\kappa k} T^{(2)}(k) \ , \qquad \tilde{k} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - W_+^2)} \end{aligned}$$

mit $\kappa = \hbar/\sqrt{2m}$. **3 Punkte**

Abgabetermin: Donnerstag 24.10.2019 vor der Vorlesung