Friedrich-Schiller-Universität Jena
Theoretisch-Physikalisches-Institut

Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli

seit 1558

Klausur: Quantenmechanik II, Wintersemester 2017/18

name: **Matrikel number:**

time: 10:15 – 12:45; place: Helmholtzweg 3, Hörsaal 3
permitted tools: **at most one written sheet of paper**
Hint: Please mark every sheet of paper with your name

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte								
max. Punkte	7	4	4	2	4	3	24	

problem 1: Comprehension questions 1+1+1+1+1+1+1 = 7 points

Please give short and precise answers to the following questions:

1. Explain, why a totally symmetric or totally anti-symmetric wave function describing identical bosons or identical fermions remains symmetric or anti-symmetric under the time evolution.
2. What needs to be taken into account when one describes the scattering of identical fermions or bosons?

3. A system with angular momentum j_1 and a system with angular momentum j_2 are coupled to a total system. What are the allowed angular momenta of the total system (only the result)?
4. What are the Clebsch-Gordan coefficients (in words)?
5. When considering space-rotations in non-relativistic quantum mechanics: why do we need SU(2) instead of SO(3)? When considering with Lorentz transformations in relativistic quantum mechanics: why do we need SL(2,$\mathbb{C}$) instead of SO(1,3)?
6. Why can the Schrödinger equation not be relativistically covariant (look the same in all inertial systems)?
7. What is the principle of minimal coupling?

problem 2: Scattering 3 points

Calculate in the first Born approximation the neutron scattering cross-section in a three-dimensional potential

$$V(r) = \begin{cases} U_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

problem 3: Time-dependent perturbation theory 3 points

The Hamiltonian $H(t) = H_0 + V(t)$ contains a time-independent part H_0 and a time-dependent perturbation $V(t)$. In the interaction picture the solution of the time-dependent Schrödinger equation is given by the Dyson series

$$\begin{aligned} |\psi_W(t)\rangle = \Bigg(\mathbb{1} &+ \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t V_W(t_1)\mathrm{d}t_1 \\ &+ \frac{1}{(\mathrm{i}\hbar)^2}\int_0^t V_W(t_1)\mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 V_W(t_1) + \dots\Bigg)|\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

with

$$V_W(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar} V(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}$$

Show that in first order perturbation theory the expectation value of an observable A is given by

$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|A_W(t)|\psi(0)\rangle + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' \,\langle\psi_0(t')|[V_W(t'), A_W(t)]|\psi 0(t)\rangle$$

problem 4: Many electron system 1+2 = 3 points

Consider N non-interacting electrons in a one-dimensional infinitely high potential well of width L. What is the smallest value of the total energy for large N?
Hints: Recall that at most two electrons can occupy the same energy level (the must have

different s_z). For large N it does not matter whether the highest level is occupied with one or two electrons. Finally you may need

$$\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \approx \frac{k^3}{3}$$

problem 5: Spin and magnetic moment of the deuteron 3 points

Assume that the electron cloud is in a state with energy E_J and total angular momentum $J(J+1)\hbar^2$ and the nucleus is in a state with energy E_I and total angular momentum $I(I+1)\hbar^2$. The respective magnetic moments are $\boldsymbol{\mu} = g_J \mu_B \boldsymbol{J}/\hbar$ and $\boldsymbol{\mu} = g_I \mu_N \boldsymbol{I}/\hbar$, where g_J and g_I are dimensionless factors. The magnetic interaction Hamiltonian of the electron cloud with the nucleus is of the form $W = a\boldsymbol{\mu}_J \cdot \boldsymbol{\mu}_I$, where a is a constant which depends on the electron distribution around the nucleus.

1. What are the possible values $K(K+1)\hbar^2$ of the total angular momentum $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}$ of the atom?
2. Express W in terms of $\boldsymbol{I}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ and $\boldsymbol{K}^2$. Express the hyperfine energy levels of the atom in terms of I, J and K (without interaction between the electron-cloud and nucleus the energy is $E_J + E_I$).
3. Calculate the splitting between two consecutive hyperfine levels.

problem 6: Klein-Gordon equation 2 points

Let the scalar function $\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ be a solution of the Klein-Gordon equation

$$\Box\phi + \mu^2\phi = 0$$

Show, that the charge density and 3-current density obey the continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0\,,$$

where the densities are

$$\rho = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}m}\left(\phi^* \nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right).$$

problem 6: Chiral symmetry 1+2 = 3 Punkte

Consider the following transformation of a Dirac spinor

$$\psi \to \psi' = \exp(\mathrm{i}\alpha\gamma_5)\psi$$

with constant real parameter α and hermitean γ_5, which anti-commutes with all γ^μ.

- Determine the transformation of the Dirac-conjugate Spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.
- When is the Lagrangian density $\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\mathrm{i}\not{\partial} - m \right) \psi$ invariant under above transformation?

Hint:

$$\gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{1}, \qquad \exp(\mathrm{i}\alpha\gamma_5) = \mathbb{1} \cos\alpha + \mathrm{i}\gamma_5 \sin\alpha.$$

Viel Erfolg!

Lösungen:

problem 1: Verständnisfragen

1. Die Energie des Grundzustandes ist das Minimum des Erwartungswertes des Hamiltonoperators auf dem Raum der normierbaren Zustandsvektoren (Wellenfunktionen). Bei der Anwendung sollte man Versuchsfunktionen wählen, die möglichst alle Symmetrien des Problems aufweisen.

2. Bei identischen Bosonen muss die Wellenfunktion eine symmetrische Funktion bei Austausch der Quantenzahlen (Orte und Spins) der beiden Teilchen sein. Bei identischen Fermionen muss sie anti-symmetrisch sein.

3. Man findet für den Wert des Drehimpulses j des Gesamtsystems
$$j \in \{j_1 + j_2,\, j_1 + j_2 - 1,\, j_1 + j_2 - 2, \ldots, |j_1 - h_2\}$$
Zum Beispiel kann den Gesamtspin eines Zweielektronensystems die Werte
$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.$$

4. Die orthonormierten Drehimpuls-Eigenzustände eines Systems mit Drehimpuls j bezeichnet man mit $|jm\rangle$. Koppelt man zwei Systeme mit Drehimpulsen j_1 und j_2 dann gibt es einerseits die orthonormierten Produktzustände $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ und andererseits die Eigenzustände $|jm\rangle$ des gesamten Drehimpulses j, wobei j die in der vorherigen Aufgabe angegebenen Werte annehmen kann. Der Übergang zwischen den beiden orthonormierten Systemen wird durch die Clebsch-Gordon-Koeffizienten beschrieben.

5. Die Lorentzgruppe hat 4 Zusammenhangskomponenten,
$$L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow$$
wobei die Elemente von $L_+^\uparrow$ die Determinante 1 haben und keine Zeitumkehr enthalten. P ist die Raumspiegelung und T die Zeitumkehr..

   Die quantenmechanische Lorentzgruppe ist die doppelte Überlagerung der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe,
$$L_+^\uparrow = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2\,.$$

6. Die Schrödingergleichung kann unmöglich das Äquivalenzprinzip erfüllen, das sie nur die erste Zeitableitung enthält aber zweite Ableitungen nach den Raumkoordinaten. Das Klein-Gordon-Feld transformiert gemäß
$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi\big(\Lambda^{-1}x\big)\,.$$

7. Man ersetzt die partielle Ableitung ∂_μ nach Zeit und Raum in

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0$$

durch die kovariante Ableitung

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} A_\mu$$

Damit lautet die gesuchte Wellengleichung

$$D^\mu D_\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0\,.$$

problem 2: *Streuung

In the first Born-Approximation the scattering amplitude is ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$)

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{Born}}(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}^3 x = -\frac{U_0 m}{\hbar^2} \int_0^a \mathrm{d}r\, r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}qr\cos\vartheta} \\
&= -\frac{mU_0}{\hbar^2} \int_0^a \mathrm{d}r\, r^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}qrz} = -\frac{2mU_0}{q\hbar^2} \int_0^a \mathrm{d}r\, r\, \sin(qr) \\
&= \frac{2mU_0}{q^3\hbar^2} \big(aq\cos(aq) - \sin(aq)\big)
\end{aligned}$$

Hence, the differential cross section in first order Born approximation is

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{2mU_0}{q^3\hbar^2}\right)^2 \big(aq\cos(aq) - \sin(aq)\big)^2\,.$$

problem 3: Time-dependent perturbation theory

We calculate

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle &= \langle\psi_W(t)|A_W(t)|\psi_W(t)\rangle \\
&= \big\langle\psi(0)\big|\Big(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t' V_W(t') + \dots\Big)^\dagger A_W(t)\Big(\mathbb{1} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t' V_W(t') + \dots\Big)\big|\psi(0)\big\rangle \\
&= \big\langle\psi(0)\big|\Big(\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t' \big(V_W(t')A_W(t) - A_W(t)V_W(t')\big) + \dots\Big)\big|\psi(0)\big\rangle \\
&= \big\langle\psi(0)\big|\Big(\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t' \big[V_W(t'), A_W(t)\big] + \dots\Big)\big|\psi(0)\big\rangle
\end{aligned}$$

problem 3: *Vielteilchensysteme

We first need the energy levels, given by

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi, \quad \psi(0) = \psi(L) = 0$$

The eigenfunctions are $\sin(kx)$ with $k = k_n = n\pi/L$ and hence

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

Let us assume N is even. Then in the ground state all states $n = 1, \ldots, N/2$ are occupied and the other states are empty. Then the energy of the ground state is

$$E_0 = \sum_{n=1}^{N/2} E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^2 \sum_{1}^{N/2} n^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^2 \frac{N^3}{3\cdot 8} = \left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^2 \frac{N^3}{48m}$$

1) To compute the energy functional one has to comupute the expectation value of H on a Slater determinant or on a totally symmetrized wave function.

$$|\Psi^{F(B)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi)^{1(2)}\psi_1(x_{\pi(1)})\psi_2(x_{\pi(2)})\psi_3(x_{\pi(3)})$$

In both cases the expectation value of $H^{(1)}$ is

$$\langle\Psi^{F(B)}|H^{(1)}|\Psi^{F(B)}\rangle = \sum_{j=1}^{3}\langle\psi_j|h|\psi_j\rangle$$

For the two-body piece the computation of the expectation value has already been discussed in one of the homeworks (exercise 10). Calling $A(i,j) = \lambda\delta(x_i + x_j)$ we need to compute the direct term

$$A_{jk,jk} = \lambda\int \mathrm{d}x\ |\psi_j(x)|^2|\psi_k(-x)|^2$$

and the exchange term

$$A_{jk,kj} = \lambda\int \mathrm{d}x\ \bar{\psi}_j(x)\psi_j(-x)\bar{\psi}_k(-x)\psi_k(x)$$

and combine them

$$\langle\Psi^{F(B)}|H^{(1)}|\Psi^{F(B)}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k}(A_{jk,jk} \mp A_{jk,kj})$$

the upper sign being for fermions. Thus in the end

$$E_{HF}[\psi_j] = \sum_{j=1}^{3}\int \mathrm{d}x\ \bar{\psi}_j h\psi_j + \frac{\lambda}{2}\sum_{j\neq k}^{3}\int \mathrm{d}x\ \bar{\psi}_j(x)\bar{\psi}_k(-x)\left[\psi_j(x)\psi_k(-x) \mp \psi_j(-x)\psi_k(x)\right].$$

2) By taking a functional derivative of the previous result with respect to $\bar{\psi}_i$ one gets the Hartree-Fock equation ($i = 1, 2, 3$)

$$h(x)\psi_i(x) + \lambda\sum_{k\neq i}^{3}\left[\bar{\psi}_k(-x)\psi_k(-x)\psi_i(x) \mp \bar{\psi}_k(-x)\psi_k(x)\psi_i(-x)\right] = 0.$$

problem 4: Spin and magnetic moment of the deuteron

1. The eigenvalues of $\boldsymbol{K}^2$ are $K(K+1)\hbar^2$ with
$$K = J+I, J+I-1, J+I-2, \ldots, |J-I|$$

2. We have $W = A\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{I}/\hbar^2$ with $A = ag_B g_I \mu_B \mu_N$. From $\boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{K}^2 + 2\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{K}$ one reads off
$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{I} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{K}^2 - \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{I}^2\big)$$
The possible energies of the Deuteron are
$$E_{I,J,K} = E_I + E_J + \frac{A}{2}\big(K(K+1) - J(J+1) - I(I-1)\big)$$

3. The energy difference between to state with neighbouring K is
$$E_{I,J,K} - E_{I,J,K-1} = \frac{A}{2}\big(K(K+1) - K(K-1)\big) = AK\,.$$

problem 5: Klein-Gordon-Gleichung

Die Aufgabe löst man durch einfaches Nachrechnen

1. Wir rechnen nach
$$\begin{aligned}\partial_t\rho &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}\right)\\ &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\phi^*\Delta\phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^*\phi - \phi\Delta\phi^* + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^*\phi\right)\\ &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\phi^*\Delta\phi - \phi\Delta\phi^*\right) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\nabla\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right) = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}\,.\end{aligned}$$

2. Wir setzen den Ansatz $\phi = \exp(-\mathrm{i}mc^2t/\hbar)\psi$ in die Wellengleichung ein. Dazu brauchen wir
$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\partial_t\phi &= \left(-\frac{\mathrm{i}mc}{\hbar}\psi + \frac{1}{c}\partial_t\psi\right)\exp(-\mathrm{i}mc^2t/\hbar)\\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi &= \left\{-\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi - \frac{2\mathrm{i}m}{\hbar}\partial_t\psi + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi\right\}\exp(-\mathrm{i}mc^2t/\hbar)\end{aligned}$$
Nun lautet die KG-Gleichung für ψ
$$\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2\mathrm{i}mc^2\,\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - c^2\hbar^2\Delta\psi = 0$$

Dem Hinweis folgend können wir den ersten Term vernachlässigen und erhalten die nicht-relativistische Schrödiger-Gleichung für ein freies Teilchen,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

problem 6: Chirale Symmetrie

Wir erinnern an $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ und $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$.

1. Da γ_5 hermitesch ist gilt $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5})^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}$, und es folgt

   $$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\gamma^0\,.$$

   Gebrauchen wir den in der Aufgabenstellung gegebenen Hinweis und die Tatsache, dass γ_5 mit den γ^μ anti-vertauscht, dann finden wir

   $$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\gamma^\mu = (\cos\alpha\,\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\alpha\,\gamma_5)\gamma^\mu = \gamma^\mu(\cos\alpha\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\alpha\gamma_5) = \gamma^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\,. \qquad (1)$$

   Benutzen wir dies für $\mu = 0$ im obigen Transformationsgesetz, so ergibt sich

   $$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\,.$$

2. Genauso beweist man die Invarianz des kinetischen Tems

   $$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \longrightarrow \bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\partial_\mu\psi = \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\,,$$

   da die Relation (1) folgendermaßen geschrieben werden kann:

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\gamma_5} = \gamma^\mu\,.$$

   Der Massenterm ist nicht invariant under chiralen Transformationen,

   $$m\bar{\psi}\psi \longrightarrow m\bar{\psi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi = m\cos\alpha\,\bar{\psi}\psi + \mathrm{i}m\sin\alpha\,\bar{\psi}\gamma_5\psi\,.$$

   Die gesamte Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist daher nur für masselose Teilchen ($m = 0$) unter einer chiralen Transformation (mit beliebigem α) invariant.