

Kapitel 5

Reelles Skalarfeld

Skalarfeldtheorien gehören zu den einfachsten wechselwirkenden Feldtheorien und werden auch deshalb gerne bei einer Einführung in die Quantenfeldtheorie behandelt. Wichtiger als ihr pädagogische Wert ist allerdings ihr Auftreten als Bestandteil des Standardmodells der elektroschwachen Theorie. Das spinlose Higgs-Teilchen wird durch ein vierkomponentiges Skalarfeld beschrieben, das mit den Feldern der Leptonen, Baryonen und Eichbosonen wechselwirkt. Würden wir die Wechselwirkung mit den anderen Feldern abschalten, dann erhielten wir eine selbstwechselwirkende Theorie für ein vierkomponentiges Skalarfeld.

Wir wissen, dass diese Subtheorie des Standardmodells, der sogenannte *Higgs-Sektor*, für sich genommen wahrscheinlich uninteressant ist. Entfernt man nämlich den Cutoff der regularisierten ϕ^4 -Theorie in mehr als vier Dimensionen dann wird die renormierte Theorie trivial – die Wechselwirkung zwischen den skalaren Teilchen verschwindet [35]. Es gibt gute Argumente dafür, dass dies auch in vier Dimensionen geschieht. In weniger als vier Dimensionen erhält man eine wechselwirkende Theorie. Der Higgssektor ist auch dafür verantwortlich, dass die elektroschwache Eichtheorie vermutlich nur als effektive Theorie unterhalb eines cut-offs Λ sinnvoll ist¹, es sei denn sie besitzt eine nicht-Gaußschen Fixpunkt. Danach wurde im Rahmen von Gittertheorien erfolglos gesucht. Sollte das Standardmodell also – wie allgemein erwartet – „trivial“ sein, so stellt sich die Frage nach dem Wert des cutoffs Λ . Liegt dieser bei ~ 1 TeV oder etwas bei der Planckmasse? Die Antwort auf diese Frage hängt vom Wert der Masse des Higgs-Teilchens ab. Auch deshalb ist die Suche nach diesem Teilchen eine erstrangige Aufgabe der Hochenergiephysik.

Für Modelle des frühen Universums spielen Skalarfelder eine zentrale Bedeutung, da sie in vielen Untersuchungen zur Inflation, Phasenübergänge, topologischen Defekten oder Strukturentstehung eine wichtige Rolle spielen. In diesem Kapitel untersuchen wir skalare (Gitter)Felder in d Dimensionen. Im Zentrum wird dabei die Behandlung von Systemen im thermischen Gleichgewicht stehen.

¹Es ist aber auch möglich, dass eine triviale ϕ^4 -Theorie durch Kopplung an Eichfelder nichttrivial wird.

5.1 Quantisierung des Skalarfelds

In diesem Abschnitt untersuchen wir skalare Feldtheorien in d Dimensionen. Ich werde annehmen, dass sie mit relativistischen Feldtheorien vertraut sind. Ein reelles Skalarfeld

$$\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x^\mu) = (ct, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d, \quad (5.1)$$

erfüllt eine kovariante Feldgleichung und diese sei die *Euler-Lagrange Gleichung* zu einer klassischen invarianten Wirkung $S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \implies \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)}. \quad (5.2)$$

Insbesondere erfüllt das freie Feld die *Klein-Gordon Gleichung* $(\square + m^2)\phi = 0$. Ein einfacher heuristischer Übergang von der Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie geht über die Ersetzung

$$q_i(t) \equiv q(t, i) \longrightarrow \phi(t, \mathbf{x}) = \phi(x), \quad \sum_i \longrightarrow \int d^{d-1}x. \quad (5.3)$$

Formal können wir viele Resultate der Quantenmechanik übernehmen, wenn wir diese Ersetzungen vornehmen. So hat zum Beispiel die Vakuum-Erwartungswerte zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren folgende Funktionalintegral-Darstellung,

$$\langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]/\hbar}, \quad (5.4)$$

wobei S die klassische Wirkung des Skalarfeldes ist. Hier ist $\mathcal{D}\phi$ die Verallgemeinerung des Integrals über alle Wege. Man integriert über alle Funktionen $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Die eindimensionale Quantenmechanik ist eine eindimensionale Feldtheorie, bei der man über Funktionen $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, also über Wege, integriert. Der Normierungsfaktor Z ist die Vakuum-Vakuum Amplitude,

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar}.$$

Ähnlich wie in der Quantenmechanik zu imaginären Zeiten oder in der Quantenstatistik führt man die euklidischen Feldoperatoren ein,

$$\hat{\phi}_E(x) \equiv \hat{\phi}_E(\tau, \mathbf{x}) = e^{\tau \hat{H}} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}) e^{-\tau \hat{H}}, \quad x = (\tau, \mathbf{x}) = (-ix^0, \mathbf{x}), \quad (5.5)$$

und beweist formal, dass die thermischen Erwartungswerte von zeitgeordneten Produkten dieser operatorwertigen Distribution folgende Funktionalintegral-Darstellung besitzen

$$\begin{aligned} \langle T \hat{\phi}_E(x_1) \cdots \hat{\phi}_E(x_n) \rangle_\beta &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\phi}_E(x_1) \cdots \hat{\phi}_E(x_n) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \oint \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi]/\hbar} \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei $\beta = 1/k_B T$ ist. Es wird über alle β -periodischen Funktionen

$$\phi : [0, \beta] \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\tau + \beta, \mathbf{x}) = \phi(\tau, \mathbf{x}), \quad (5.7)$$

funktional integriert. Hier tritt die euklidische Wirkung S_E auf. Der Normierungsfaktor in (5.6) ist die *Zustandssumme*

$$Z(\beta) = e^{-\beta F} = \oint \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}. \quad (5.8)$$

Ein Hauptanliegen der Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen ist die Berechnung der *freien Energiedichte* $f = F/V$.

Strebt die Temperatur gegen Null oder β gegen ∞ , dann erhalten wir die in ihren Argumenten symmetrischen *Schwinger-Funktionen*,

$$\begin{aligned} S^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \langle 0 | T \hat{\phi}_E(x_1) \cdots \hat{\phi}_E(x_n) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi]/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Diese sind invariant unter euklidischen Lorentz-Transformationen, ändern also nicht bei $SO(d)$ -Drehungen der Argumente x_i . Unter teilweise natürlichen Annahmen an die Schwingerfunktionen kann man aus ihnen die vollständige Quantentheorie im Minkowski-Raum rekonstruieren. Die Vakuum Erwartungswerte von Produkten von Feldoperatoren in der relativistischen Theorie, die sogenannten *Wightman-Funktionen* $W^{(n)}$, sind Randwerte der *analytischen* Wightman-Funktionen für komplexe Zeiten und die $S^{(n)}$ sind die Wightman-Funktionen zu imaginären Zeiten. Im folgenden werden wir den Index E unterdrücken, da wir ausschließlich euklidische Theorien untersuchen werden.

Die thermischen Erwartungswerte von zeitgeordneten Produkten des euklidischen Feldes (5.6) werden vom Funktional

$$Z[\beta, j] = \oint \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar + \int j(x)\phi(x)} = \exp(W[\beta, j]), \quad (5.10)$$

der Zustandssumme in Anwesenheit einer äusseren Quelle $j(x)$, generiert

$$\langle T\hat{\phi}_E(x_1)\dots\phi_E(x_n)\rangle_\beta = \frac{1}{Z[\beta, 0]} \frac{\delta^n Z[\beta, j]}{\delta j(x_1)\dots\delta j(x_n)} \Big|_{j=0}, \quad (5.11)$$

während die verbundenen Korrelationsfunktionen von $W = \log Z$ erzeugt werden,

$$\langle T\hat{\phi}_E(x_1)\dots\phi_E(x_n)\rangle_{c,\beta} = \frac{\delta^n W[\beta, j]}{\delta j(x_1)\dots\delta j(x_n)} \Big|_{j=0}, \quad Z[\beta, j] = e^{W[\beta, j]}. \quad (5.12)$$

Das Funktional $W[\beta, j]$ spielt die Rolle einer freien Energie bei Anwesenheit einer Quelle. Für tiefe Temperaturen geht es in das *Schwingerfunktional* $W[j]$ über, das die verbundenen Vakuumerwartungswerte erzeugt,

$$\langle 0|T\hat{\phi}_E(x_1)\dots\phi_E(x_n)|0\rangle_c = \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1)\dots\delta j(x_n)} \Big|_{j=0}, \quad W[j] = \lim_{\beta\rightarrow\infty} W[\beta, j]. \quad (5.13)$$

Die euklidische Wirkung des freien Skalarfeld

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2} \int d^d x (\nabla\phi \cdot \nabla\phi + m^2\phi^2) = \frac{1}{2} \int d^d x \phi (-\Delta + m^2) \phi \quad (5.14)$$

ist eine quadratische Funktion und das Funktionalintegral (5.10) für $Z[\beta, j]$ wird zu einem berechenbaren Gaußschen Integral mit der Lösung

$$\begin{aligned} Z[\beta, j] &= \frac{\text{const}}{\det^{1/2}(-\Delta + m^2)} \exp(W[\beta, j]) \quad \text{mit} \\ W[\beta, j] &= \int d^d x d^d y j(x) \Delta_F(\beta; x-y) j(y), \end{aligned} \quad (5.15)$$

wobei der euklidische *Feynman-Propagator* im Ortsraum auftritt,

$$\Delta_F(\beta; x-y) = \langle T\hat{\phi}_E(x)\hat{\phi}_E(y)\rangle_\beta = \langle x | \frac{1}{-\Delta + m^2} | y \rangle. \quad (5.16)$$

Berücksichtigt die Periodizitätsbedingung (5.7) für die Felder, dann findet man folgende Fourierdarstellung für diesen Propagator bei endlichen Temperaturen

$$\Delta_F(\beta; x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_n x^0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\beta} n. \quad (5.17)$$

Für tiefe Temperaturen liegen die *Matsubara-Frequenzen* ω_n sehr dicht und die Riemannsche Summe geht in ein Riemannsches Integral über. Deshalb strebt $\Delta_F(\beta; x)$ für $T \rightarrow 0$

gegen den bekannten euklidischen Feynmanpropagator bei Temperatur Null,

$$\Delta_F(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \Delta_F(\beta; x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + m^2}. \quad (5.18)$$

Die Addition eines Potentialterms zur freien Wirkung S_0 in (5.14) führt auf die euklidische Wirkung des selbst-wechselwirkenden Skalarfeldes,

$$S_E = S_0 + \int d^d x V(\phi). \quad (5.19)$$

Entwickelt man nun die Funktionalintegrale (5.6) oder (5.9) in Potenzen der Wechselwirkung V , dann erhält man die mit Divergenzen behaftete Störungsentwicklungen für die Schwingerfunktionen bei endlicher Temperatur oder bei Temperatur Null. Den dabei auftretenden Amplituden können Feynmangraphen mit entsprechenden Regeln zur Berechnung der Amplituden zugeordnet werden. Zum Beispiel wird jeder inneren Linie eines Graphen der Feynmanpropagator Δ_F zugeordnet und die möglichen Vertizes des Graphen werden durch die Selbstwechselwirkung V bestimmt.

5.1.1 Das freie Feld bei endlichen Temperaturen

Für das freie Feld mit euklidischer Wirkung

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, A\phi), \quad A = -\Delta + m^2, \quad (5.20)$$

wobei (\cdot, \cdot) das L_2 -Skalarprodukt bezeichnet, führt das Funktionalintegral für die Zustandssumme (5.8) auf die Determinante des Operators A , und entsprechend ist

$$F(\beta) = \frac{1}{2\beta} \log \det A + \text{const.} \quad (5.21)$$

Der Operator wirkt auf β -periodische Funktionen und diese Randbedingung an die Moden führt auf eine Temperaturabhängigkeit der A -Eigenwerte und damit der freien Energie.

Determinanten von Differentialoperatoren treten in vielen feldtheoretischen Untersuchungen auf, zum Beispiel bei der semiklassischen Näherung. Es lohnt sich daher, diese Determinanten näher zu betrachten. Wir schließen das System in eine endliche Box ein, damit der nicht-negative Operator A ein diskretes Spektrum hat. Die zu A gehörige ζ -Funktion ist durch die Reihe

$$\zeta_A(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}, \quad (5.22)$$

definiert und diese konvergiert für genügend große $\Re(s)$. Die Reihe definiert die ζ -Funktion in einer Halbebene der komplexen s -Ebene. Über die analytische Fortsetzung gewinnt man die Funktion in der gesamten komplexen Ebene [55].

Zum Beispiel konvergiert die Reihe (5.22) für den einfachen Operator in (5.20) für alle s mit $\Re(s) > d/2$ und definiert eine meromorphe Funktion in der komplexen s -Ebene die in einer Umgebung von 0 sogar analytisch ist. Die für Matrizen gültige Identität

$$\log \det A = \text{Sp} \log A = \sum \log \lambda_n = -\left. \frac{\zeta_A(s)}{ds} \right|_{s=0} \quad (5.23)$$

wird nun für Operatoren übernommen, und dies definiert die ζ -Funktion-Regularisierung der Funktionaldeterminante. Indem man den Realteil des Arguments s von ζ_A genügend groß wählt, wird die Determinante regularisiert. Die Fortsetzung der Funktion nach $s = 0$ entspricht einer speziellen Renormierung. Der Zusammenhang zu anderen 1-Schleifen Renormierungsschemen ist bekannt [56].

Mit Hilfe der *Mellin-Transformation* kann man die ζ -Funktion mit dem Wärmeleitungskern von A in Verbindung bringen,

$$\zeta_A(s) = \sum_n \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t\lambda_n} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \text{Sp} (e^{-tA}). \quad (5.24)$$

Bezeichnet $K(t; x, y)$ der Integralkern des Operators $\exp(-tA)$, dann ist

$$\text{Sp} (e^{-tA}) = \int dx K(t; x, x), \quad t > 0, \quad (5.25)$$

und die ζ -Funktionen hat die Darstellung

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \int dx K(t; x, x). \quad (5.26)$$

In Anwendungen ist A ein Differential-Operator A_x in der Ortsdarstellung und der Wärmeleitungskern K erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} K(t; x, y) = -A_x K(t; x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} K(t; x, y) = \delta(x - y). \quad (5.27)$$

Damit können wir die Determinante von A scheinbar wie folgt berechnen: wir konstruieren die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (5.27), setzen die Lösung $K(t, x, y)$ in die Darstellung (5.24, 5.25) für die ζ -Funktion ein und berechnen dann die Determinante mit Hilfe der Formel (5.23). Diese Vorgehensweise hat mindestens zwei Probleme. Für viele Operatoren von Interesse kann man K nicht explizit berechnen und zudem existiert die Integraldarstellung (5.26) nur für genügend große $\Re(s)$. Es braucht noch die analy-

tische Fortsetzung der ζ -Funktion nach $s = 0$. Allerdings genügt uns die Ableitung der ζ -Funktion am Ursprung, und im Gegensatz zur Funktion selbst ist diese Größe in vielen Fällen berechenbar. Für interessante Anwendungen dieser Renormierungs Methode auf Probleme der Quantenfeldtheorie verweise ich auf [55, 57].

Für den Operator $A = -\Delta + m^2$ hat der Wärmekern die Form

$$K(t; x, x') = \frac{e^{-m^2 t}}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\{(\tau - \tau' + n\beta)^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2\}/4t} \quad (5.28)$$

Der $n = 0$ Term ist der Wärmekern zum Schrödinger-Operator des freien Teilchens in \mathbb{R}^d und die Summe macht daraus den Wärmekern auf dem Zylinder $[0, \beta] \times \mathbb{R}^{d-1}$. Wir finden

$$\zeta_A(s) = \frac{\beta V}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(s)} \int dt t^{s-1-d/2} e^{-m^2 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \beta^2 / 4t}. \quad (5.29)$$

Das Spektrum von $-\Delta + m^2$ auf $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$ ist nicht diskret und dies zeigt sich in der harmlosen Volumendivergenz der Zetafunktion. Beim Übergang zur freien Energiedichte werden wir diesen divergenten Faktor los. Wir könnten auch periodische Randbedingungen in allen Raumrichtungen fordern und am Schluss der Rechnung den Limes $L \rightarrow \infty$ durchführen. Dieses Vorgehen führt für die freie Theorie zu identischen Resultaten.

Mit Hilfe folgender Integraldarstellung für die Kelvin-Funktionen

$$\int_0^\infty dt t^a e^{-bt-c/t} = 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{(a+1)/2} K_{a+1} \left(2\sqrt{bc}\right) \quad (5.30)$$

können die t -Integrale berechnet werden und führen auf die Reihendarstellung

$$\zeta_A(s) = \frac{\beta V}{(4\pi)^{d/2}} \frac{m^{d-2s}}{\Gamma(s)} \left(\Gamma\left(s - \frac{d}{2}\right) + 4 \sum_1^\infty \left(\frac{nm\beta}{2}\right)^{s-d/2} K_{d/2-s}(nm\beta) \right). \quad (5.31)$$

Die Gammafunktion hat einfache Pole an den Stellen $0, -1, -2, \dots$, und $1/\Gamma(s) \sim s$. In unserer Welt mit 4 Raumzeit-Dimensionen benutzt man

$$\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = s + O(s^2)$$

um die Ableitung der Zetafunktion am Ursprung zu berechnen. Man findet für die freie Energiedichte

$$f(\beta) = -\frac{1}{2\beta V} \zeta'_A(0) = -\frac{m^4}{128\pi^2} \left(3 - 2 \log m^2 + 64 \sum_{n=1,2,\dots} \frac{K_2(nm\beta)}{(nm\beta)^2} \right). \quad (5.32)$$

Um das Resultat für masselose Teilchen zu gewinnen benutzen wir $K_2(x) \sim 2/x^2$, so dass

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(\beta) = -\frac{T^4}{\pi^2} \zeta_R(4), \quad (5.33)$$

wobei die in der Zahlentheorie so wichtige *Riemannsche Zetafunktion* auftritt,

$$\zeta_R(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-x}. \quad (5.34)$$

Die weiter unten benötigten Werte dieser Funktion und ihrer Ableitung sind

$$\xi_R(0) = -\frac{1}{2}, \quad \xi_R(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \xi_R(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \zeta'_R(0) = -\frac{1}{2} \log(2\pi). \quad (5.35)$$

Sie ist in der ganzen komplexen Ebene regulär, bis auf einen einfachen Pol mit Residuum 1 bei $s = 1$. Damit lautet die freie Energiedichte und innere Energiedichte für masselose spinlose Teilchen

$$f(\beta) = -\frac{\pi^2 T^4}{90} \quad \text{und} \quad u(\beta) = \partial_\beta(\beta f) = \frac{\pi^2 T^4}{30}. \quad (5.36)$$

Für Photonen mit zwei Polarisation sind die Energiedichten der Hohlraumstrahlung doppelt so groß.

Um die freie Energie für ein freies Gas von massiven spinlosen Teilchen zu berechnen, entwickeln wir die Besselfunktion für kleine Argumente,

$$K_{2-s}(x) \sim \frac{2}{x^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} - \gamma - \log \frac{x}{2} \right) + O(x^4) \quad (5.37)$$

und benutzen die Formel

$$\sum \log(nm\beta) = \log(m\beta) \zeta_R(0) - \zeta'_R(0) \quad (5.38)$$

für die mit Hilfe der ζ -Funktionsregularisierung definierte Summe der Logarithmen. Dies führt auf folgende Entwicklung der Energiedichte für hohe Temperaturen $T \gg m$,

$$f(\beta) = -\frac{1}{128\pi^2} \left(128\zeta_R(4) T^4 - 32\zeta_R(2) m^2 T^2 - 8m^4 \zeta_R(0) \log \frac{m}{2T} \right. \\ \left. + \{3 + 8\zeta'_R(0) + (6 - 8\gamma)\zeta_R(0) - 2 \log m^2\} m^4 \right) + O\left(\frac{m^2}{T^2}\right), \quad (5.39)$$

mit Euler-Konstanten $\gamma \approx 0,5772$. Die Werte für die Riemannsche ζ -Funktion sind in (5.35) angegeben.

5.2 Schwingerfunktion und effektives Potential

Effektive Potentiale sind nützlich bei der Untersuchung der Phasen und Phasenübergänge von Systemen mit Ordnungsparameter. In der Feldtheorie ist das effektive Potential die Legendre-Transformierte der Schwinger-Funktion bei Anwesenheit einer homogenen Quelle, in der statistischen Mechanik ist es die freie Energie bei festem Ordnungsparameter. Es gibt allerdings Alternativen zu diesem konventionellen effektiven Potential. Dazu gehört das „constraint effective potential“, das später in der Vorlesung vorgestellt wird.

In Anwesenheit einer homogenen äusseren Quelle j hat die „Zustandssumme“ die formale Pfadintegral-Darstellung [24]

$$Z(\beta, j) \equiv e^{\beta V w(\beta, j)} = c \cdot \oint \mathcal{D}\phi \exp \left(-S_E[\phi] + j \int_0^\beta \phi(x) \right), \quad (5.40)$$

wobei in der Quantenstatistik über β -periodische Funktionen integriert wird,

$$\phi(\tau + \beta, \mathbf{x}) = \phi(\tau, \mathbf{x}), \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad (5.41)$$

und V das *räumliche Volumen* bezeichnet. Bis auf den Volumenfaktor βV ist die *Schwingerfunktion* $w(\beta, j)$ in (5.40) gleich dem Schwingerfunktional W in (5.10) für eine konstante Quelle. Eine konstante Quelle ist verträglich mit der Translationsinvarianz des Systems. Die Funktion $-w(\beta, j)$ ist gleich der freien Energiedichte für das System mit Hamiltonoperator $\hat{H}_j = \hat{H} - j\hat{\phi}$ und strebt für tiefe Temperaturen gegen die negative Grundzustandsenergiedichte $-E_0(j)/V$ des Systems mit Hamiltonian \hat{H}_j .

Aus w kann man leicht den quantentheoretischen Mittelwert des Feldes berechnen,

$$\frac{dw}{dj} = \frac{\int \mathcal{D}\phi M e^{-S[\phi]+j\int\phi}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]+j\int\phi}} = \langle \phi(x) \rangle_j. \quad (5.42)$$

Wir haben hier benutzt, dass für translationsinvariante Systeme der Erwartungswert von $\phi(x)$ unabhängig von x ist, so dass gilt

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle M \rangle, \quad \text{wobei} \quad M = \frac{1}{\beta V} \int \phi(x) \quad (5.43)$$

den raum-zeitliche Mittelwert von $\phi(x)$ bezeichnet. Man beachte, dass Erwartungswerte von der äusseren Quelle j abhängen, da sie mit der Wirkung $S[\phi] - j \int \phi(x)$ berechnet werden. An Stellen wo w nicht differenzierbar ist, kann man die Formel (5.42) nicht direkt anwenden. Die Schwingerfunktion $w(\beta, j)$ ist strikt konvex, da ihre zweite Ableitung gleich

dem Erwartungswert einer positiven Grösse ist,

$$\frac{d^2 w}{dj^2} = \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle. \quad (5.44)$$

Das *effektive Potential* gewinnt man mit Hilfe einer *Legendre-Transformation* aus der Schwingerfunktion,

$$u(\beta, \varphi) = (\mathcal{L}w)(\varphi) = \sup_j (j\varphi - w(\beta, j)). \quad (5.45)$$

Die maximierende Quelle j heisst zu φ konjugiert. Im Gegensatz zum mikroskopischen Feld ϕ ist φ ein makroskopisches mittleres Feld. Ist das Minimum φ_0 von u nicht entartet, dann ist es gleich dem Erwartungswert des Feldoperators im Gleichgewichtszustand,

$$u(\beta, \varphi_0) \leq u(\beta, \varphi), \quad \forall \varphi \iff \varphi_0 = \langle \phi(x) \rangle_{j=0}. \quad (5.46)$$

Dies folgt aus der Ungleichung (5.55) im Abschnitt 5.2.1 über Legendre Transformationen.

Es gibt mehrere Verallgemeinerungen der gerade betrachteten Systeme. Ist man an der Vakuumstruktur einer euklidischen Skalarfeldtheorie mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi(x)) = \int_{\Omega} d^d x \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi(x) \nabla \phi(x) + V(\phi(x)) \right\}, \quad (5.47)$$

interessiert, dann braucht das Quantisierungsgebiet Ω weder ein Zylinder oder der ganze Raum \mathbb{R}^d zu sein und es werden allgemeinere Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bei der Funktionalintegral-Quantisierung betrachtet. Auch kann das ϕ -Feld mehrere Komponenten aufweisen und nicht-trivial unter einer globalen inneren Symmetriegruppe G transformieren. Das Feld kann auch Werte in einer Lieschen Gruppe oder einem homogenen Raum annehmen.

Der „klassische Grundzustand“ entspricht dem *homogenen* Feld, welches das klassische Potential V minimiert. Dieser Wert ist nicht notwendigerweise gleich dem quantenmechanischen Erwartungswert $\langle \hat{\phi}(x) \rangle$ des Quantenfeldes. Um die Quantenkorrekturen zum klassischen Vakuum zu studieren setzt man die Schwingerfunktion w ein,

$$Z(\Omega, j) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(-S[\phi] + j \int_{\Omega} \phi(x) \right) = e^{\Omega w(\Omega, j)}. \quad (5.48)$$

Wir benutzen das gleiche Symbol Ω für das Quantisierungsgebiet und sein Volumen. Hat das Gebiet Ω einen Rand $\partial\Omega$, dann wird das Feld noch gewisse Randbedingungen erfüllen. Auf derlei Fragen soll hier nicht weiter eingegangen werden. Auch für Feldtheorien in allgemeineren Quantisierungsgebieten definiert man das effektive Potential $u(\Omega, \varphi)$ genauso wie in (5.45) als Legendre-Transformierte der Schwingerfunktion. Wählen wir

als Raumzeit einen Kasten mit Volumen βV und fordern periodische Randbedingungen, dann ist $Z(\Omega, j)$ die thermische Zustandssumme in Anwesenheit der Quelle j (5.40) und $u(\Omega, \varphi)$ das effektive Potential bei endlichen Temperaturen.

5.2.1 Die Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation tritt in der Mechanik, Thermodynamik, Quantenstatistik und Quantenfeldtheorie auf und wir wollen hier ihre wichtigsten Eigenschaften notieren. Im Folgenden seien φ und j Elemente einer konvexen Menge im \mathbb{R}^d .

1. *Die Legendre-Transformierte einer für genügend große Argumente konvexen Funktion ist immer konvex.*

Zum Beweis betrachten das zwischen φ_1 und φ_2 interpolierende Feld

$$\varphi_\alpha = (1 - \alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.49)$$

Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} u(\varphi_\alpha) &= \sup_j \left\{ (1 - \alpha)(j, \varphi_1) + \alpha(j, \varphi_2) - ((1 - \alpha) + \alpha)w(j) \right\} \\ &\leq (1 - \alpha) \sup_j \left\{ (j, \varphi_1) - w(j) \right\} + \alpha \sup_j \left\{ (j, \varphi_2) - w(j) \right\} \\ &= (1 - \alpha)u(\varphi_1) + \alpha u(\varphi_2), \end{aligned} \quad (5.50)$$

wobei wir benutzten, dass das Supremum einer Summe kleiner oder gleich der Summe der Suprema der Summanden ist. Damit liegt der Graph von u unterhalb der die Punkte $(\varphi_i, u(\varphi_i))$ verbindenden Strecke. Dies beweist die Konvexität von u .

2. *Die Legendre-Transformation ist involutiv für konvexe Funktionen.*

Für ein konvexes w gibt es für jeden Punkt $(j_0, w(j_0))$ eine Hyperebene unterhalb des Graphen von w . In anderen Worten, es gibt ein von j_0 abhängiges φ_0 , so dass

$$w(j_0) + (\varphi_0, j - j_0) \leq w(j) \quad \text{für alle } j,$$

oder auch

$$(\varphi_0, j) - w(j) \leq (\varphi_0, j_0) - w(j_0) \quad \text{für alle } j.$$

Das Supremum der linken Seite bezüglich j ist $\mathcal{L}w$ an der Stelle φ_0 , so dass gilt

$$(\mathcal{L}w)(\varphi_0) \leq (\varphi_0, j_0) - w(j_0). \quad (5.51)$$

Schreiben wir dies in der Form

$$w(j_0) \leq (\varphi_0, j_0) - (\mathcal{L}w)(\varphi_0). \quad (5.52)$$

und bemerken, dass die rechte Seite kleiner gleich der Legendre-Transformierten von $\mathcal{L}w$ ist, dann folgt $w(j_0) \leq (\mathcal{L}^2w)(j_0)$. Deshalb ist die zweifache Legendre-Transformierte immer größer oder gleich der ursprünglichen Funktion. Andererseits gilt

$$(\mathcal{L}w)(\varphi) \geq (\varphi, j) - w(j) \text{ für alle } \varphi \implies w(j) \geq (\varphi, j) - (\mathcal{L}w)(\varphi). \quad (5.53)$$

Nehmen wir das Supremum über alle φ in der letzten Ungleichung, dann folgt $w(j) \geq (\mathcal{L}^2w)(j)$, oder dass die zweifache Legendre-Transformierte immer kleiner oder gleich der ursprünglichen Funktion ist. Zusammen mit der obigen Ungleichung folgern wir, dass für jede konvexe Funktion gilt

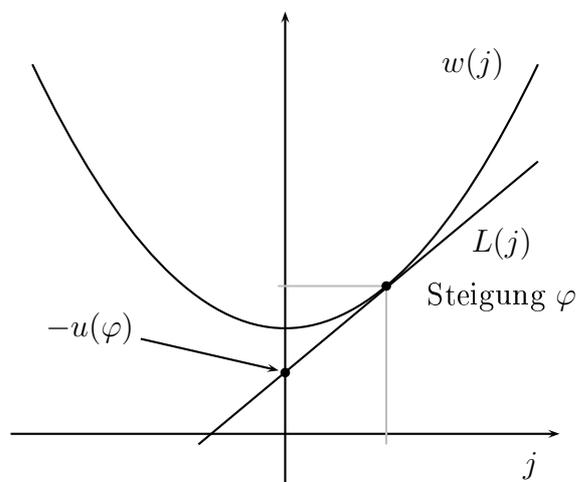
$$(\mathcal{L}^2w)(j) = w(j). \quad (5.54)$$

3. Für beliebige φ und j gilt die Ungleichung von FENCHEL und YOUNG

$$w(j) + u(\varphi) \geq (j, \varphi), \quad u = \mathcal{L}w. \quad (5.55)$$

Sie wird zu einer Gleichung für konjugierte Variablen φ und j . Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Ungleichung (5.53).

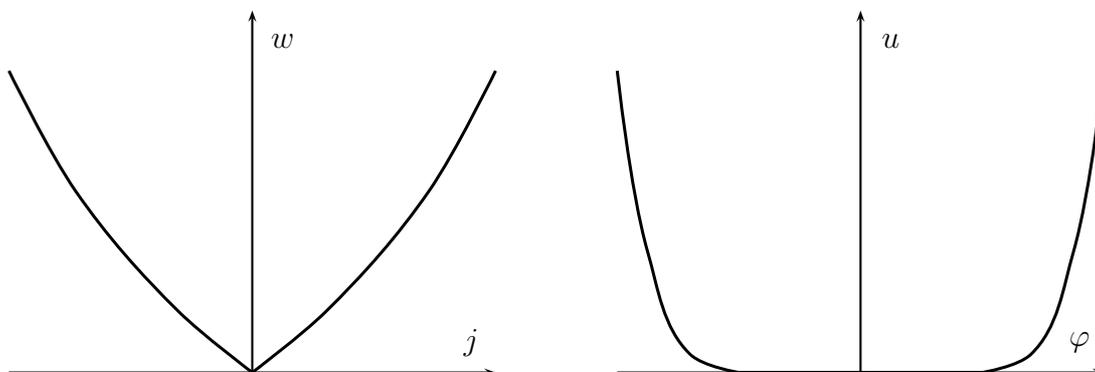
4. Ist die stetige Schwingerfunktion nicht differenzierbar und hat einen Knick, dann hat $u = \mathcal{L}w$ ein Plateau. Für ein einkomponentiges Feld ist die Breite des Plateau gleich dem Sprung von w' . Umgekehrt wird ein Plateau in einen Knick abgebildet.



Diese Eigenschaft folgt aus der graphischen Konstruktion der Transformation: $u(\varphi)$ ist $-L(0)$, wobei der Graph der linearen Funktion $L(j)$ mit Steigung φ denjenigen von $w(j)$ berührt. Für gegebenes φ und eine konvexe und differenzierbare Schwingerfunktion ist der konjugierte Strom durch die Forderung definiert, dass $L(j)$ beim konjugierten Strom tangential an $w(j)$ ist.

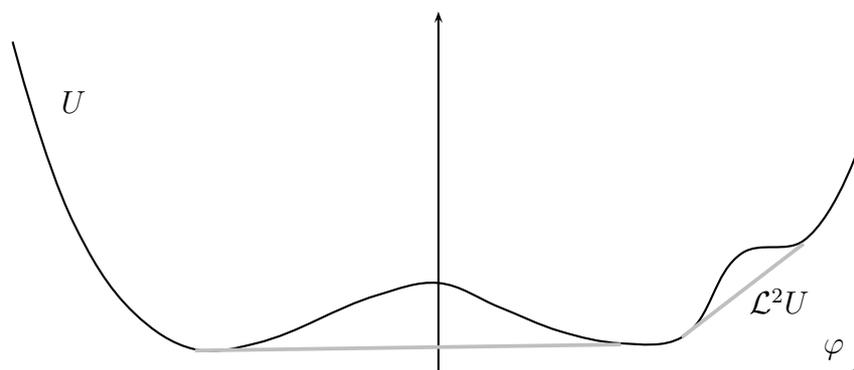
In der folgenden Abbildung ist eine typische Situation für ein System mit spontaner

Symmetriebrechung skizziert. Die Schwingerfunktion hat einen Knick bei ausgeschalteter Quelle und entsprechend das effektive Potential u ein Plateau.



5. Die zweifache Legendre-Transformierte einer für große Argumente konvexe Funktion die konvexe Hülle dieser Funktion ist.

Dies folgt sofort aus dem bisher gezeigten Eigenschaften.



6. Für differenzierbare w und u sind die konjugierten Variablen φ und j wie folgt verbunden,

$$\varphi = w'(j) \quad \text{und} \quad j = u'(\varphi). \quad (5.56)$$

Ersetzen wir (j, φ) durch (p, \dot{x}) und (w, u) durch (H, L) , dann ist dies die bekannte Legendre-Transformation der klassischen Mechanik von der Hamiltonschen zur Lagrangeschen Formulierung.

7. Ist u die Legendre-Transformierte von w , dann ist u_α die Legendre-Transformierte von w_α . Dabei ist $F_\alpha(x)$ die reskalierte Funktion

$$F_\alpha(x) = \alpha F\left(\frac{x}{\alpha^{1/2}}\right). \quad (5.57)$$

Die Legendre-Transformierte des Monoms mit Exponenten $\alpha > 1$ ist das Monom mit dualem Exponent β ,

$$w(j) = \frac{1}{\alpha} |j|^\alpha \iff u(\varphi) = \frac{1}{\beta} |\varphi|^\beta, \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \quad (5.58)$$

Mit zunehmendem Exponent β entwickelt u ein Plateau von -1 bis 1 . Der Exponent α der transformierten Funktion w strebt gegen Eins und die Funktion konvergiert gegen die stückweise lineare Funktion $w(j) = |j|$.

8. Sind $w''(j)$ und $u''(\varphi)$ die Matrizen der zweiten Ableitungen von w und u , dann gilt

$$w''(j) u''(\varphi) = \mathbb{1}, \quad (j, \varphi) \text{ dual.} \quad (5.59)$$

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus den Relationen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial j_r \partial j_s} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial j_s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi_r \partial \varphi_s} = \frac{\partial j_r}{\partial \varphi_s}.$$

9. Als weitere Eigenschaften notieren wir:

Verhalten unter *Translationen*:

$$\begin{aligned} w(j) = w_1(j) + b &\Rightarrow (\mathcal{L}w)(\varphi) = (\mathcal{L}w_1)(\varphi) - b \\ w(j) = w_1(j + k) &\Rightarrow (\mathcal{L}w)(\varphi) = (\mathcal{L}w_1)(\varphi) - \varphi \cdot k \end{aligned} \quad (5.60)$$

Verhalten unter *Inversion*:

$$w(j) = w_1^{-1}(j) \Rightarrow (\mathcal{L}w)(\varphi) = -\varphi \cdot (\mathcal{L}w_1) \left(\frac{1}{\varphi} \right). \quad (5.61)$$

Nach dieser Erinnerung an wesentliche Eigenschaften der Legendre-Transformation kehren wir zur Quantenfeldtheorie zurück.

5.3 Skalares Gitterfeld

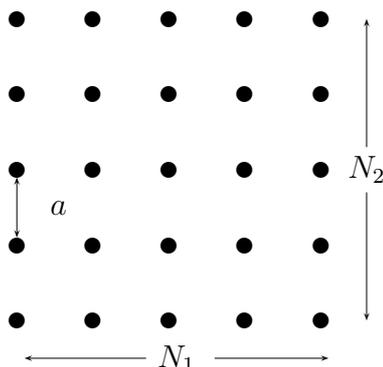
Bei der Gitterregularisierung der Funktionalintegrale wird die euklidische Raumzeit \mathbb{R}^d durch ein d -dimensionales Gitter Λ ersetzt. Für ein endliches Λ geht das formale Funktionalintegral (5.6) in ein gewöhnliches endlich-dimensionales Integral über, dass mit den Methoden der statistischen Mechanik behandelt werden kann.

Das Gitter wird aus theoretischen und praktischen Gründen zunächst als endlich angenommen. Der Einfachheit halber betrachten wir meistens ein *einfach kubisches Gitter*.

Die Gitterpunkte $x = (x^1, \dots, x^d)$ sind Elemente eines d -dimensionalen Gitters Λ ,

$$x^\mu = na \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, N_\mu, \quad L_\mu = aN_\mu. \quad (5.62)$$

Bei periodischen Randbedingungen werden die Gitterpunkte $x = (x^1, \dots, x^\mu, \dots, x^d)$ und $x' = (x^1, \dots, x^\mu + L_\mu, \dots, x^d)$ identifiziert und das Gitter wird zu einem (diskretisierten) Torus,



Ein Gitterfeld ϕ definiert eine Abbildung von Λ in den Targetraum,

$$\Lambda \ni x \longrightarrow \phi_x \in \mathcal{T}. \quad (5.63)$$

Im einfachsten Fall ist der Targetraum $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, im Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung ist $\phi \in \mathbb{C}^2$. Für Sigma-Modelle ist der Targetraum eine Lie-Gruppe oder ein homogener Raum und für isingartige Spinmodelle ist er eine endliche Gruppe.

Als Randbedingung wird dann meistens eine der folgenden Bedingungen auferlegt:

- *Periodische Randbedingungen:* Mit die Randbedingungen $\phi_{x+L_\mu e_\mu} = \phi_x$ für $\mu = 1, \dots, d$ wird, wie bereits erwähnt, das Gitter zu einem Torus und die Skalarfeldtheorie ist invariant unter diskreten Translationen.
- *Feste Randbedingungen* $\phi|_{\partial\Lambda} = \text{fest}$.
- *Offene Randbedingungen:* In diesem Fall ist die Wechselwirkung der Felder mit den Nachbarfeldern am Rand $\partial\Lambda$ abzuändern, so dass nur Wechselwirkungen innerhalb des Gitters bestehen. Bei Festkörpern sind diese Randbedingungen am natürlichsten, allerdings können Oberflächenphänomene auftreten.
- *Antiperiodische Randbedingungen:* Diese dienen dazu, unerwünschte langreichweitige Korrelationen zu unterdrücken oder künstliche Grenzflächen zu erzeugen. Verallgemeinerungen von periodischen Randbedingungen sind in Gittereichtheorien beliebt. Wir werden in diesem Kapitel periodische Randbedingungen auferlegen.

Die euklidische Wirkung des freien Klein-Gordon-Feldes (5.14) soll zu einer Funktion des Gitterfeldes werden. Dabei wird das Integral durch eine Riemann-Summe und die partiellen Ableitungen durch Differenzen der Felder an benachbarten Gitterpunkten ersetzt. Hier hat man eine Freiheit bei der Wahl der Gitterableitung. Oft wählt man die *Vorwärts-* oder *Rückwärtsableitung*

$$(\partial_\mu \phi)(x) = \frac{\phi_{x+ae_\mu} - \phi_x}{a} \quad \text{oder} \quad (\partial_\mu \phi)(x) = \frac{\phi_x - \phi_{x-ae_\mu}}{a} \quad (5.64)$$

Für beide Wahlen lautet die diskretisierte Wirkung des freien Skalarfeldes

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^{d-2}}{2} \sum_{\langle xy \rangle} (\phi_x - \phi_y)^2 + \frac{m^2 a^d}{2} \sum_x \phi_x^2 \\ &= \frac{a^{d-2}}{2} (2d + (am)^2) \sum_x \phi_x^2 - a^{d-2} \sum_{\langle xy \rangle} \phi_x \phi_y, \end{aligned} \quad (5.65)$$

wobei die letzte Summe über alle nächsten-Nachbarn Paare $\langle xy \rangle$ geht. Wie in der Quantenmechanik reskalieren wir dimensionsbehaftete Größen mit der Gitterkonstanten um zu dimensionslosen Größen zu gelangen. Die dimensionslose Masse m_L und das dimensionslose Gitterfeld ϕ_L lauten

$$am = m_L \quad \text{und} \quad a^{(d-2)/2} \phi = \phi_L, \quad (5.66)$$

der Abstand zwischen benachbarten Gitterpunkten wird zu 1 und das Gitter hat in Richtung μ die Länge $L_\mu = N_\mu$. Die Anzahl Gitterpunkte ist $V = N_1 \cdots N_d$. Im Folgenden werden wir den Index L an den Gittergrößen wieder unterdrücken.

Die Wirkung (5.65) definiert eine quadratische Form des Feldes,

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} \phi_x K_{xy} \phi_y, \quad K_{xy} = (m^2 + 2d) \delta_{xy} - \sum_{\mu=1}^d (\delta_{x,y+e_\mu} + \delta_{x,y-e_\mu}). \quad (5.67)$$

Für eine positive Masse m ist die symmetrische Matrix (K_{xy}) positiv. Ist der Targetraum linear, dann fassen wir die $\{\phi_x | x \in \Lambda\}$ als Komponenten eines Vektors auf. Für ein reelles Skalarfeld auf einem Gitter Λ mit V Gitterpunkten ist dieser Vektorraum gleich \mathbb{R}^V mit ℓ_2 -Skalarprodukt

$$(\phi, \chi) = \sum_{x \in \Lambda} \phi_x \chi_x. \quad (5.68)$$

Die Gitterwirkung (5.67) schreibt sich dann gemäß

$$S = \frac{1}{2}(\phi, K\phi) \quad \text{mit} \quad K = (K_{xy}). \quad (5.69)$$

Die Bestimmung der 2-Punktfunktion der freien euklidischen Theorie reduziert sich auf die Berechnung eines einfachen Gaußschen Integrals,

$$\langle \phi_x \phi_y \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_x \phi_y e^{-\frac{1}{2}(\phi, K\phi)}, \quad \mathcal{D}\phi = \prod_{x \in \Lambda} d\phi_x \quad (5.70)$$

mit Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, K\phi)} = (2\pi)^{V/2} \det^{-1/2} K. \quad (5.71)$$

Derartige Gaußsche Integrale wurden im zweiten Kapitel besprochen. Man findet folgenden Propagator für das freie Feld,

$$\langle \phi_x \phi_y \rangle = K_{x,y}^{-1} \equiv G(x, y). \quad (5.72)$$

Zu seiner Berechnung suchen wir die Eigenfunktionen und Eigenwerte der symmetrischen *Toeplitz-Matrix* K . Diese hängen von den Randbedingungen an das Skalarfeld ab. Für die hier gewählten periodischen Randbedingungen auf dem hyperkubischen Gitter ist K sogar zirkulant. Die Anzahl Gitterpunkte sei in jede Richtung N , so dass die Gesamtzahl Gitterpunkte $V = |\Lambda| = N^d$ ist.

Wegen der Translationsinvarianz auf dem diskreten Torus haben die V orthonormierten Eigenvektoren ψ_p der symmetrischen Matrix K in (5.67) die Form

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(ipx) \quad \text{mit} \quad px = \sum_{\mu=1}^N p_\mu x^\mu. \quad (5.73)$$

Wegen der periodischen Randbedingungen liegen die Gitterimpulse auf dem *dualen Gitter*,

$$p_\mu = \frac{2\pi}{N} n_\mu \in \Lambda^*, \quad n_\mu \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (5.74)$$

Die zugehörigen $V = N^d$ Eigenwerte haben die Form

$$\lambda(n) = m^2 + 2d - 2 \sum_{\mu} \cos(p_\mu) = m^2 + \hat{p}^2, \quad \hat{p}_\mu = 2 \sin\left(\frac{1}{2}p_\mu\right). \quad (5.75)$$

Für den Propagator ergibt sich die Reihendarstellung

$$\langle \phi_x \phi_y \rangle = \sum \frac{\psi_p(x) \psi_n^\dagger(y)}{\lambda(n)} = \frac{1}{V} \sum_{\{p_\mu\}} \frac{e^{ip(x-y)}}{m^2 + \hat{p}^2}. \quad (5.76)$$

Diese Reihe enthält V Terme. Für Gitter mit unterschiedlichen Kantenlängen L_1, \dots, L_d muß in der obigen Formel n_μ/L durch n_μ/L_μ ersetzt werden.

Im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ füllen die Gitterimpulse die *Brilloin-Zone* $(0, 2\pi]^d$ aus. Die Riemannsche Summe (5.76)

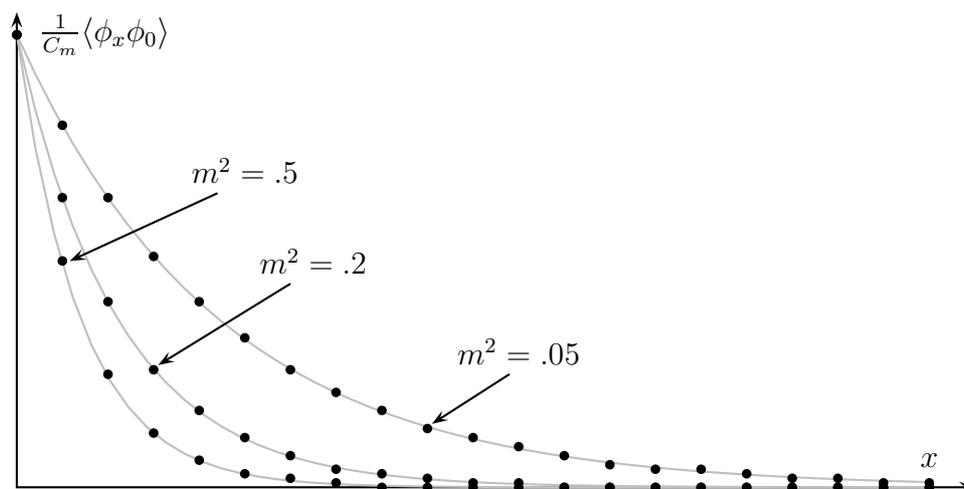
$$\langle \phi_x \phi_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\{p_\mu\}} \Delta p_1 \cdots \Delta p_d \frac{e^{ipx}}{m^2 + \hat{p}^2}$$

mit $\Delta p_\mu = 2\pi/N$, strebt dann gegen das folgende Integral über die Brilloin-Zone,

$$\begin{aligned} \langle \phi_x \phi_0 \rangle &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p \frac{e^{ipx}}{m^2 + \hat{p}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p \frac{\cos(px)}{m^2 + \hat{p}^2}, \quad \hat{p}_\mu = 2 \sin \frac{p_\mu}{2}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Die Zweipunktfunktion auf $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ist reell, invariant unter Gittertranslationen und Rotationen die das Gitter in sich überführen. Auf der Diagonalen ist ihr Wert

$$\langle \phi_0 \phi_0 \rangle \equiv C_m = \frac{1}{m\sqrt{m^2 + 4}} \quad (5.78)$$



In der Abbildung sind die (normierten) Werte der Zweipunktfunktion für drei Massen

an den Gitterpunkten $x = 0, \dots, 20$ geplottet. Die exponentiellen Fits $\exp(-mx)$ für ganzzahlige x sind hervorragend. Für reelle x oszilliert das Integral (5.77) allerdings enorm um den exponentiellen Fit.

5.4 2-Punktfunktion als Wegintegral

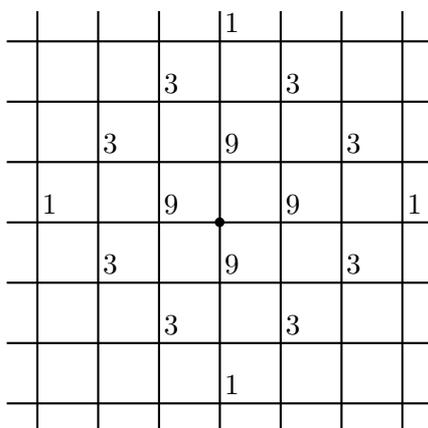
Wir werden nun zeigen, dass sich die 2-Punktfunktion des freien Skalarfeldes (5.77) als „gewichtete Summe über alle Wege“ von x nach y darstellen lässt. Dieses Resultat ist nützlich für Abschätzungen und Näherungen. Wir betrachten die Größe

$$G(x) = e^{-\mu} \sum_{\text{Wege } 0 \rightarrow x} e^{-\mu\ell} = e^{-\mu} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x)e^{-\mu\ell} \tag{5.79}$$

auf dem unendlichen Gitter. Dabei ist ℓ die Länge des Weges (in Einheiten des Gitterabstandes) und μ ein noch festzulegender Parameter. $P_{\ell}(x)$ ist die Anzahl Wege der Länge ℓ von 0 zum Punkt $x \in \mathbb{Z}^d$. Für P_{ℓ} gibt es eine *erzeugende Funktion*,

$$(e^{ip_1} + e^{-ip_1} + \dots + e^{ip_d} + e^{-ip_d})^{\ell} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_{\ell}(x) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_d x_d)}. \tag{5.80}$$

Zum Beweis multipliziert man die linke Seite aus. Dabei ergibt sich eine Summe über alle möglichen Kombinationen von jeweils ℓ Faktoren $e^{\pm ip_{\mu}}$. Jeder dieser Terme ist in eindeutiger Korrespondenz zu einem Weg der Länge ℓ auf dem Gitter, wenn man $e^{\pm ip_{\mu}}$ als Schritt in die $\pm\mu$ Richtung interpretiert. Die Summe über x konvergiert, da $P_{\ell}(x) = 0$ für alle Punkte x , deren Abstand von 0 größer als ℓ ist.



In der Abbildung links sind beispielsweise die Anzahl Wege der Länge 3 auf einem 2-dimensionalen quadratischen Gitter angedeutet. So führen 9 verschieden Wege der Länge $\ell = 3$ vom Ursprung (durch einen Punkt gekennzeichnet) zu jedem nächsten Nachbarn. Für $\ell = 3$ gibt es keine Wege zu den übernächsten Nachbarn. Offensichtlich ist $P_3(x) = 0$ für Punkte x mit einem Abstand größer als 3. Die Anzahl Wege der Länge 3 ist $(2d)^3 = 64$.

Die Integration der Exponentialfunktion $\exp(ipx)$ über die Brillouin-Zone $p_{\mu} \in [0, 2\pi)$ ergibt 0, solange der Exponent nicht verschwindet. Damit können wir die Polynome P_{ℓ}

wie folgt gewinnen,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p e^{-ipx} (e^{ip_1} + e^{-ip_1} + \dots + e^{ip_d} + e^{-ip_d})^\ell \quad (5.81)$$

Eingesetzt in (5.79) erhält man eine geometrische Reihe,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{e^{-\mu}}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p e^{-ipx} \sum_\ell \{2e^{-\mu} (\cos p_1 + \dots + \cos p_d)\}^\ell \\ &= \frac{e^{-\mu}}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p \left(\frac{e^{-ipx}}{1 - 2e^{-\mu} \sum_\mu \cos p_\mu} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{2\pi} d^d p \left(\frac{e^{-ipx}}{e^\mu - 2d + 4 \sum_\mu \sin^2 \frac{p_\mu}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Wir erkennen die Integraldarstellung der Zweipunktfunktion des freien Klein-Gordon-Feldes (5.77), vorausgesetzt wir wählen

$$e^\mu - 2d = m^2. \quad (5.83)$$

Die Auflösung nach $e^{-\mu}$ setzen wir in (5.79) ein mit dem Resultat

$$\langle \phi_x \phi_0 \rangle = \frac{1}{(m^2 + 2d)} \sum_{\text{wege } 0 \rightarrow x} \frac{1}{(m^2 + 2d)^\ell}. \quad (5.84)$$

5.5 Zur Leibniz-Regel auf dem Gitter

Einige Probleme von Gitterfeldtheorien sind in der fehlenden Leibnizregel begründet. Man kann nämlich beweisen, dass es keine Gitterableitung gibt, welche diese Regel erfüllt.

Lemma *Ein linearer Operator D auf $\text{Map}(\Lambda, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Map}(\Lambda, \mathbb{C})$, der die Leibnizregel*

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg), \quad \forall f, g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}, \quad (5.85)$$

erfüllt, ist trivial, $D = 0$.

Beim Beweis benutzen wir die Leibnizregel in Komponentenform. Eine Gitterfunktion $f \in \text{Map}(\Lambda, \mathbb{C})$ wird mit dem entsprechenden V -komponentigen Vektor f_x identifiziert und der lineare Operator D mit einer $V \times V$ -Matrix D_{xy} ,

$$(Df)_x = \sum_{z \in \Lambda} D_{xz} f_z. \quad (5.86)$$

Dann lautet die Leibnizregel

$$\sum_z D_{xz} f_z g_z = g_x \sum_z D_{xz} f_z + f_x \sum_z D_{xz} g_z. \quad (5.87)$$

Wählen wir für f und g die charakteristische Funktion δ_y , wobei $\delta_y(z) = \delta_{y,z}$ ist, dann vereinfacht sie die Regel (5.87) zu

$$D_{xy} = D_{xy} \delta_{y,x} + D_{xy} \delta_{y,x}. \quad (5.88)$$

Daraus folgt sofort $D_{xy} = 0$ für alle $x, y \in \Lambda$. Das obige Lemma schliesst nicht aus, dass für spezielle Gitterfunktionen die Leibnizregel gilt.

Für periodische Gitterfunktionen werden wir fordern, dass

$$\sum_{x \in \Lambda} (Df)_x = 0 \quad (5.89)$$

gilt, in Anlehnung an die entsprechend Formel für Felder auf \mathbb{R}^d . Die Links- und Rechtsableitungen auf dem Gitter erfüllen diese Forderung.

5.6 Programme zu Kapitel 9

Das folgende octave-Programm `korrscalar` berechnet die Zweifunktionsfunktion (5.77) als Funktion von x , dividiert durch die massenabhängige Konstante C_m in (5.78). Die resultierende Korrelationsfunktion ist 1 für $x = 0$. Abgefragt wird das Quadrat der Masse. Das Resultat und der exponentiellen Fit $\exp(-mx)$ mit der Masse im Propagator werden angezeigt.

```
function korrscalar;
# berechnet die Zweifunktionsfunktion f"ur_freies
# Skalarfeld in einer Dimension mit der naiven
# Gitterableitung. Quadrat der Masse wird abgefragt.
# Speicherung in korrscalar.dat
#
m2=input("Masse_im_Quadrat_");
wco=sqrt(m2)*sqrt(4+m2)/(2*pi);# fuer Normierung des Integrals
closeplot;
Np=1001; eps=2*pi/(Np-1); # Np Stuetzstellen: ungerade!
p=linspace(0,2*pi,Np);ph=0.5*p;
sph=sin(ph);nenner=m2+4*sph.*sph;eps=eps/3;
#z=eps*cos(p).*cos(p);
z=eps./nenner;
# Fuer Simpson Integration;
for i=2:2:Np-1;
```

```

    z(i)=4*z(i);
endfor;
for i=3:2:Np-2;
    z(i)=2*z(i);
endfor;
x=linspace(0,20,21)';N=length(x);
int0=zeros(N,Np);
s0=zeros(N,1);
for i=1:N
    int0(i,:)=z.*cos(x(i)*p);
    s0(i)=sum(int0(i,:));
endfor;
s0=wco*s0;
data=[x,s0]; %#_Minimum_von_u_auf_0_setzen
data1=[x,exp(-sqrt(m2)*x)];
gplot([0:20]_data,_data1;
korrscalar=fopen("korrscalar.dat","w","native");
for i=1:N
    fprintf(korrscalar,"%4.2f,%4.2f",x(i),s0(i));
    if (rem(i,5)==0) fprintf(korrscalar,"\n");
    endif;
endfor;
fclose(korrscalar);
endfunction;

```

5.7 Aufgaben

Aufgabe 10: Hohlraumstrahlung

Berechne die freie und innere Energiedichte für masselose skalare Teilchen in zwei und drei Dimensionen.