

# Kapitel 13

## Reine Gittereichtheorien

Nach dem heutigen Kenntnisstand werden *alle* fundamentalen Wechselwirkungen durch Eichtheorien beschrieben. Die bekannteste Eichtheorie ist die Elektrodynamik. Sie ist eine Theorie mit Abelscher Symmetriegruppe. Die schwache und starke Wechselwirkung werden jeweils durch eine nicht-Abelsche Eichtheorie modelliert. In einem gewissen Sinne ist auch die allgemeine Relativitätstheorie eine nicht-Abelsche Eichtheorie.

Die erste Formulierung einer Eichtheorie auf dem Gitter geht auf FRANZ WEGNER zurück [10]. Er untersuchte Ising-artige Theorien mit einer *lokalen*  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianz und führte dabei den Ordnungsparameter ein, der in verallgemeinerter Form heute als Wilson-Schleife bekannt ist. Bei unserer Diskussion der Dualitätstransformationen haben wir die 3-dimensionale  $\mathbb{Z}_2$ -Eichtheorie bereits kennengelernt. Sie ist dual zum 3-dimensionalen Ising-Modell. Drei Jahre nach Wegners Arbeit formulierte WILSON erstmalig nicht-Abelsche Eichtheorien auf dem Gitter. Er fand ein neues Kriterium für Confinement in reinen Eichtheorien: das Flächengesetz für Wilson-Schleifen [11]. Es folgten Monte-Carlo-Simulationen von reinen Gitter-Eichtheorien in 3 und 4 Dimensionen, zunächst mit Eichgruppe  $\mathbb{Z}_2$  und später mit  $SU(2)$  sowie  $SU(3)$ , durch CREUTZ, JACOBS und REBBI [12].

Im folgenden werden wir nach einer kurzen Erinnerung an die Eichtheorien im Kontinuum die wichtigsten (qualitativen) Eigenschaften von Gittereichtheorien besprechen.

### 13.1 Eichtheorien im Kontinuum

Um das erfolgreiche Eichprinzip zu illustrieren, betrachten wir eine komplexes, einkomponentiges Skalarfeld mit klassischer Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^\dagger \phi, \quad (13.1)$$

und Bewegungsgleichung

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi = 0. \quad (13.2)$$

Wie in der Hochenergiephysik üblich, werden wir natürliche Einheiten mit  $\hbar = c = 1$  benutzen. Im Gegensatz zu einem reellen einkomponentigen Feld beschreibt ein komplexes Feld elektrisch geladene Teilchen. Die globalen, d.h. orts- und zeitunabhängigen Phasentransformationen

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \Omega \phi(x), \quad \Omega = e^{ie\lambda} \in U(1). \quad (13.3)$$

führen Lösungen in Lösungen über. Es sind Symmetrien der Lagrangedichte für das geladene Klein-Gordon-Feld. Die Dichte ist aber nicht invariant unter lokalen, d.h. orts- und zeitabhängigen Phasentransformationen,

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \Omega(x)\phi(x), \quad \Omega(x) = e^{ie\lambda(x)} \in U(1), \quad (13.4)$$

da die Ableitungen in (13.1) und (13.2) auch auf die Funktion  $\Omega(x)$  wirken. Die Phasenänderung hinter dem Mond muss also genau gleich sein wie diejenige in Jena.

Es zeigt sich nun, dass eine globale Symmetrie durchaus zu einer lokalen Symmetrie erweitert werden kann, wenn man das geladene Feld an ein Eichpotential  $A_\mu$  koppelt. In der Schrödinger, Dirac oder Klein-Gordon-Theorie bedeutet dies, dass die partielle Ableitung nach  $x^\mu$  durch die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu(A) = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (13.5)$$

ersetzt wird. Im Gegensatz zu  $\partial_\mu \phi$  soll  $D_\mu(A)\phi$  genauso transformieren wie  $\phi$ ,

$$D_\mu(A')\phi'(x) = \Omega(x) D_\mu(A)\phi(x) \quad \text{bzw.} \quad D_\mu(A') = \Omega D_\mu(A)\Omega^{-1}, \quad (13.6)$$

und diese Forderung impliziert folgende Transformation des Potentials

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{e} \partial_\mu \Omega \Omega^{-1} = \Omega \left( A_\mu + \frac{i}{e} \partial_\mu \right) \Omega^{-1} \stackrel{(13.3)}{=} A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (13.7)$$

Aus dem *Eichpotential*  $A_\mu$  berechnet sich der (eich)invariante und antisymmetrische *Feldstärketensor*,

$$F_{\mu\nu}(A) = \frac{i}{e} [D_\mu(A), D_\nu(A)] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}(A'), \quad (13.8)$$

dessen Quadrat in die *eichinvariante* Lagrangedichte für das System aus wechselwirkenden

Photonen- und geladenen Spin-0 Teilchen eingeht,

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi = \mathcal{L}(\phi', A'_\mu). \quad (13.9)$$

Wir wiederholen nun diese sogenannte *minimale Kopplung* an ein Eichpotential für ein mehr-komponentiges Skalarfeld mit Werten in einem Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt. Nach Wahl einer Basis hat  $\phi$  die Komponentendarstellung

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \phi^\dagger = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_n). \quad (13.10)$$

Die reelle Lagrangefunktion für das freie Feld ist die Verallgemeinerung von (13.1) auf  $V$ -wertige Felder,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi) - m(\phi, \phi), \quad (13.11)$$

wobei  $(.,.)$  das Skalarprodukt in  $V$  bezeichnet. Jede Komponente von  $\phi(x)$  erfüllt dann die Klein-Gordon-Gleichung (13.2).

Das Feld transformiere nach einer irreduziblen Darstellung  $R$  einer noch nicht weiter spezifizierten halbeinfachen kompakten Gruppe  $\mathcal{G}$ ,

$$\phi(x) \longrightarrow R(\Omega)\phi(x), \quad \Omega \in \mathcal{G}. \quad (13.12)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die linearen Abbildungen  $R(\Omega)$  unitär sind und das Skalarprodukt auf  $V$  invariant lassen,  $(R\phi, R\chi) = (\phi, \chi)$ . Im *Weinberg-Salam-Modell* der elektroschwachen Wechselwirkung ist  $\phi$  ein komplexes Dublett in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe  $SU(2)$ .

Wir wollen nun eine neue Lagrange-Funktion konstruieren, die unter lokalen Eichtransformationen

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = R(\Omega(x))\phi(x) \quad (13.13)$$

invariant ist. Dies gelingt wiederum durch *minimale Kopplung* des Multipletts  $\phi$  an ein Eichpotential, d.h. durch die Ersetzung von gewöhnlichen durch kovariante Ableitungen. Für ein Skalarfeld in der definierenden Darstellung lautet die Ersetzung

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi, \quad (13.14)$$

wobei  $e$  die Stärke der Kopplung parametrisiert. Für ein  $n$ -komponentiges Feld  $\phi$  wird das

Vektorpotential  $A_\mu$  eine  $n \times n$  Matrix sein. Die Forderung (13.6) impliziert das folgende Transformationsverhalten für das Eichpotential.

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{e} \partial_\mu \Omega \Omega^{-1}. \tag{13.15}$$

Für nicht-Abelsche Gruppen werden  $A_\mu$  und  $\Omega$  nicht vertauschen, und wir können diese Formel für die Eichtransformationen des Eichpotentials nicht weiter vereinfachen. Wir sehen aber, dass  $A_\mu$  in der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $\mathcal{G}$  liegen sollte. Dann liegen beide Terme auf der rechten Seite von (13.15) in dieser Algebra und Eichtransformationen wirken im Raum der  $\mathfrak{g}$ -wertigen Eichpotentiale. Die  $\mathfrak{g}$ -wertige *Feldstärke*

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu] \tag{13.16}$$

ist nicht mehr eichinvariant,

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Omega(x) F_{\mu\nu}(x) \Omega^{-1}(x). \tag{13.17}$$

Sie transformiert nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe  $\mathcal{G}$ .

Für Skalarfelder, die nach einer beliebigen irreduziblen Darstellung transformieren,  $\phi' = R(\Omega)\phi$ , ist die Kovarianzbedingung (13.6) automatisch erfüllt, wenn wir als kovariante Ableitung

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieR_*(A_\mu)\phi \tag{13.18}$$

wählen. Hier ist  $R_*$  die von der Darstellung  $R$  induzierte Darstellung der Lie-Algebrawertigen  $\mathfrak{g}$ . Der Kommutator von kovarianten Ableitungen in der Darstellung  $R$  ist dann

$$[D_\mu, D_\nu] = \frac{e}{i} R_*(F_{\mu\nu}).$$

Gerade in neueren Arbeiten über reine Eichtheorien spielt die Frage der Abhängigkeit der Erwartungswerte von der Darstellung der Eichgruppe eine wichtige Rolle. Zum Beispiel könnte man fragen, ob die reine  $SO(3)$ -Eichtheorie die gleiche Phasenstruktur aufweist wie die  $SU(2)$ -Eichtheorie [78].

Wie man leicht einsieht, ändert sich der Term

$$\text{tr } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{13.19}$$

nicht bei einer Eichtransformation (13.15,13.17), da die Spur unter zyklischer Vertauschung der Argumente nicht ändert. Dieser eichinvariante Term ist der wichtige *Yang-Mills* Term. In Anlehnung an die Maxwell-Theorie wählt man als eichinvariante Lagrangedichte

für das wechselwirkende System  $A, \phi$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi, D^\mu \phi) - m^2(\phi, \phi). \quad (13.20)$$

Nach Konstruktion ist sie invariant unter den lokalen Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \Omega(x)\phi(x) \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - \frac{i}{e} \partial_\mu \Omega(x) \Omega^{-1}(x). \end{aligned} \quad (13.21)$$

Wir fassen zusammen. Eine Eichtheorie ist bestimmt durch:

- Angabe der Eichgruppe  $\mathcal{G}$ . Für die Quantenchromodynamik, ist  $\mathcal{G} = SU(3)$  und für die elektroschwache Theorie  $\mathcal{G} = SU_L(2) \times U_Y(1)$ .
- Festlegung der Darstellungen, nach denen die Materiefelder  $\phi$  transformieren.
- Als Parameter enthalten Eichtheorien eine *universelle* Kopplungskonstante  $e$ . Daneben sind noch die Massen und eventuell Selbstkopplungen anzugeben. Die Weinberg-Salam Theorie enthält allerdings noch weitere Parameter: die Elemente der KMS-Matrix und die Yukawa Kopplungskonstanten.

### 13.1.1 Paralleltransport

Ein Skalarfeld ist kovariant konstant, wenn

$$D_\mu \phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_\mu \phi = ieR_*(A_\mu)\phi \quad (13.22)$$

gilt. Die Integrabilitätsbedingung für die Existenz einer (lokal) eindeutigen Lösung führt in diesem Fall auf

$$\begin{aligned} 0 &= [\partial_\mu, \partial_\nu] \phi \stackrel{(13.22)}{=} ieR_*(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi + ie(R_*(A_\nu)\partial_\mu \phi - R_*(A_\mu)\partial_\nu \phi) \\ &= ieR_*(F_{\mu\nu})\phi, \end{aligned}$$

wobei wir die Linearität und die Darstellungseigenschaft  $R_*([X, Y]) = [R_*(X), R_*(Y)]$  der induzierten Darstellung benutzten. Nur für verschwindende Feldstärke können wir (lokal) die  $d$  Gleichungen (13.22) simultan lösen.

Die Lösung der Gleichung kovarianter Konstanz *entlang eines Weges*  $\mathcal{C}$  von  $x$  nach  $y$  ist nicht ganz einfach, da die Eichpotentiale zu verschiedenen Raumzeit-Punkten nicht kommutieren müssen. Wir parametrisieren den Weg mit  $x(s)$ , wobei

$$x(0) = x \quad \text{und} \quad x(1) = y$$

gelten soll. Die kovariante Ableitung von  $\phi$  längs  $\mathcal{C}$  soll verschwinden,

$$\dot{x}^\mu D_\mu \phi = \frac{d\phi(s)}{ds} - ie A_\mu(x(s)) \dot{x}^\mu(s) \phi(s) = 0. \quad (13.23)$$

Wir haben  $\phi(x(s)) = \phi(s)$  geschrieben und  $R(\Omega) = \Omega$  angenommen. Wäre  $s$  eine Zeitvariable, so hätte diese Gleichung die Form der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung mit  $\mathbf{g}$ -wertigem Hamilton-Operator  $\sim A(x(s)) \cdot \dot{x}(s)$ . Also lautet die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (13.23) wie folgt,

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \mathcal{P} \left( \exp ie \int_0^1 ds A_\mu(x(s)) \dot{x}^\mu(s) \right) \phi(0), \quad \text{bzw.} \\ \phi(y) &= U(\mathcal{C}; A) \phi(x), \quad U(\mathcal{C}; A) = \mathcal{P} \left( \exp ie \int_{\mathcal{C}} A \right). \end{aligned} \quad (13.24)$$

Nur für Abelsche Theorien kommutieren die Eichpotentiale zu verschiedenen Raumzeitpunkten. In diesem Spezialfall ist keine Ordnung („Zeitordnung“)  $\mathcal{P}$  längs des Weges  $\mathcal{C}$  nötig.

Ist  $\mathcal{C}_1$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  und  $\mathcal{C}_2$  von  $y$  nach  $z$ , dann verbindet der zusammengesetzte Weg  $\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$  (zuerst  $\mathcal{C}_1$  und dann  $\mathcal{C}_2$ ) den Punkt  $x$  mit  $z$  und es gilt die Kompositionsregel

$$U(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1; A) = U(\mathcal{C}_2; A) U(\mathcal{C}_1; A). \quad (13.25)$$

Der Paralleltransporter  $U$  hängt vom Weg ab, entlang dem  $\phi$  parallel transportiert wird. Sind  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  zwei Wege von  $x$  nach  $y$ , dann ist  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2^{-1} \circ \mathcal{C}_1$  eine Schleife von  $x$  nach  $x$ . Für eine Abelsche Theorie ist nach dem Satz von Stokes

$$U(\mathcal{C}; A) = \exp \left( ie \oint_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{G}} A \right) = \exp \left( ie \int_{\mathcal{G}} F \right). \quad (13.26)$$

Darin ist  $\mathcal{G}$  das von  $\mathcal{C}$  eingeschlossene Gebiet und  $F$  die 2-Form der Feldstärke,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dA, \quad \text{mit} \quad A = A_\mu dx^\mu. \quad (13.27)$$

Leider gibt es keine ähnlich einfache Formel für nicht-Abelsche Eichtheorien. Es existiert zwar ein nicht-Abelsches Stokes-Theorem [79], aber es scheint keine interessante Anwendung für dieses komplizierte Theorem in der Physik zu geben. Es impliziert aber, dass für  $F = 0$  der Paralleltransport wegunabhängig ist, solange die Wege ineinander deformierbar sind.

Der Paralleltransport mit dem eichtransformierten Feld  $A'$  in (13.15) steht in einfacher

Beziehung zu demjenigen mit  $A$ . Ist  $\mathcal{C}$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ , dann gilt nämlich

$$U(\mathcal{C}; A') = \Omega(y)U(\mathcal{C}; A)\Omega^{-1}(x). \quad (13.28)$$

Diese Eigenschaft folgt aus der Definition des weggeordneten Integrals,

$$\mathcal{P} \left( \exp ie \int_{\mathcal{C}} A \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i; x_i \in \mathcal{C}}^N \left( \mathbb{1} + ie A_{\mu}(x_i) \dot{x}^{\mu} \Big|_{x_i} \Delta s \right), \quad (13.29)$$

worin  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) eine Unterteilung des Weges  $\mathcal{C}$  in  $N-1$  Abschnitte ist. Für jede Schleife ist deshalb die Variable

$$\text{tr } U(\mathcal{C}, A) \quad (13.30)$$

eichinvariant. Weiterhin ist das Produkt

$$\phi^{\dagger}(y)U(\mathcal{C}_{yx}; A)\phi(x), \quad (13.31)$$

mit einem von  $x$  nach  $y$  führenden Weg  $\mathcal{C}_{yx}$ , eichinvariant. Dieses Produkt hängt für  $F \neq 0$  von der Wahl des verbindenden Weges  $\mathcal{C}$  ab, nicht aber von der Wahl der Eichung.

Im folgenden werden wir ausnahmslos die euklidische Version von Eichtheorien untersuchen. Den formalen Übergang von der Lorentz- zur Euklidischen Signatur haben wir bereits besprochen. Im vorliegenden Fall führt die Wickrotation auf folgende Lagrange-dichte für eine Euklidische Eichtheorie mit einem geladenen Skalarfeld,

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} \text{tr } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi, D^{\mu}\phi) + m^2(\phi, \phi), \quad (13.32)$$

wobei der Zusammenhang zwischen Eichpotential und Feldstärke und die Definition der kovarianten Ableitung nicht ändern. Natürlich werden in einer Euklidischen Feldtheorie die Indizes mit der Euklidischen Metrik  $\delta_{\mu\nu}$  hoch- und runtergezogen. Zum Beispiel gelten  $F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$  und  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sum F_{\mu\nu}^2$ .

## 13.2 Eichtheorien auf dem Gitter

Es sei nun  $\phi(x)$  ein Skalarfeld auf dem Gitter. Verlangt man *lokale Invarianz* unter Symmetrietransformationen

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \Omega(x)\phi(x), \quad \Omega(x) \in \mathcal{G} \quad (13.33)$$

auf dem Gitter  $\Lambda$ , so sind es Terme der Art

$$(\phi(x + e_\mu), \phi(x)), \tag{13.34}$$

welche diese Invarianz nicht respektieren. Die Tatsache, dass man in diesem Wechselwirkungsterm zwischen nächsten Nachbarn das Skalarprodukt des Feldes an der Stelle  $x \in \Lambda$  mit dem Feld an der benachbarten Stelle  $x + e_\mu$  bildet, legt nahe, das Feld „parallel zu verschieben“, bevor das Skalarprodukt gebildet wird. Wir ersetzen also den Ausdruck (13.34) durch

$$(\phi(x + e_\mu), U(x + e_\mu, x)\phi(x)), \tag{13.35}$$

mit *Paralleltransporter*  $U(x + e_\mu, x)$  von  $x$  nach  $x + e_\mu$ . Dieser Ausdruck ist invariant unter lokalen Transformationen (13.33) des Materiefeldes wenn die Transporter unter lokalen Eichtransformationen durch Konjugation am Anfangs- und Endpunkt transformieren,

$$U(x + e_\mu, x) \longrightarrow U'(x + e_\mu, x) = \Omega(x + e_\mu)U(x + e_\mu, x)\Omega^{-1}(x). \tag{13.36}$$

Im Allgemeinen hängt der Paralleltransport nicht nur von Anfangs- und Endpunkt, sondern auch vom gewählten Weg ab. Auf dem Gitter kann man sich unter  $U(x + e_\mu, x)$  den Paralleltransport entlang der Gitterkante vorstellen, obwohl diese Interpretation bedeutungslos ist.

Diese Überlegungen legen nahe, als dynamische Variablen nicht etwa Lie-Algebrawertige Eichpotentiale  $A_\mu(x)$ , sondern die elementaren gruppenwertigen Paralleltransporter zwischen benachbarten Gitterpunkten zu wählen. Die  $U$ -Variablen nennt man *kompakte Variablen*, da alle relevanten (und wahrscheinlich konsistenten) Eichgruppen kompakt sind.

### 13.2.1 Eine Wirkung für reine Eichtheorien

Die gerichtete Gitterkante von  $x$  nach  $x \pm e_\mu$  wird kurz mit  $(x, \pm\mu)$  bezeichnet. Die dynamischen Variablen sind Elemente einer kompakten Gruppe  $\mathcal{G}$  und „leben“ auf den Gitterkanten. Eine Gitterkonfiguration  $U$  ist eine Abbildung von der Menge der (gerichteten) Kanten  $E$  in  $\mathcal{G}$ :

$$U : E = \{(x, \mu)\} \longrightarrow \mathcal{G} \tag{13.37}$$

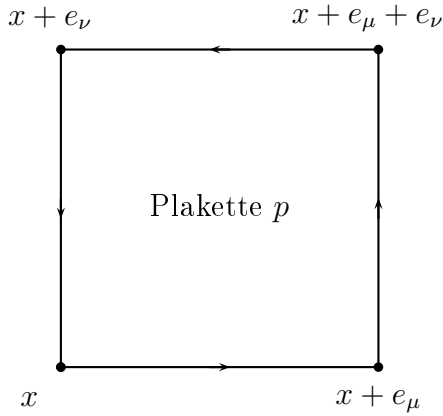
Der Paralleltransporter längs eines Weges  $\mathcal{C}$  auf dem Gitter ist das geordnete Produkt der Transporter der Kanten des Weges und  $U(\mathcal{C}^{-1}) = U^{-1}(\mathcal{C})$ .

In einer Yang-Mills-Theorie ist die Wirkung durch das Quadrat der Feldstärke oder



*Krümmung* gegeben. Diese gibt an, um wieviel ein Feld sich (pro Flächeninhalt) verändert, wenn man es infinitesimal um einen geschlossenen Weg parallel-verschiebt. Es bezeichne  $\mu$  und  $\nu$  die durch  $e_\mu$  und  $e_\nu$  aufgespannte Ebene, in welcher die Verschiebung stattfindet. Auf dem Gitter gibt es keine infinitesimale Verschiebung. Die elementarste Verschiebung entlang eines geschlossenen Weges ergibt sich aus dem Produkt der Transporter längs des Randes einer elementaren Plakette. Wir definieren

$$\begin{aligned} U(x, \mu\nu) &\equiv U(x + e_\nu, -\nu)U(x + e_\mu + e_\nu, -\mu)U(x + e_\mu, \nu)U(x, \mu) \\ &= U(x, \nu)^{-1}U(x + e_\nu, \mu)^{-1}U(x + e_\mu, \nu)U(x, \mu). \end{aligned} \quad (13.38)$$



wobei wir (13.37) benutzen. Das Gruppenelement  $U_p \equiv U(x, \mu\nu)$  bezeichnet also den Paralleltransporter um eine elementare Plakette  $p$ , definiert durch die vier Eckpunkte  $x, x + e_\mu, x + e_\mu + e_\nu, x + e_\nu$ . Man schreibt oft etwas kürzer

$$U_p = \prod_{\ell \in \partial p} U_\ell. \quad (13.39)$$

Die Abhängigkeit von  $x$  ist bei dieser Notation aber nicht offensichtlich. Unter einer Eichtransformation (13.36) transformiert die Plakettenvariable wie folgt,

$$U(x, \mu\nu) \longrightarrow \Omega(x)U(x, \mu\nu)\Omega^{-1}(x). \quad (13.40)$$

Um die Wahl für die eichinvariante und reelle Wirkung zu motivieren, führen wir formal einen Gitterabstand  $a$  ein und schreiben

$$U(x, \mu) = e^{ieaA_\mu(x)} \quad (13.41)$$

mit dem Lie-Algebra wertigen Feld  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a$ . Bilden wir das Produkt der Gruppenelemente um eine elementare Plakette, so erhalten wir

$$\begin{aligned} U_p = U(x, \mu\nu) &= e^{-ieaA_\nu(x)} e^{-ieaA_\mu(x+ae_\nu)} e^{ieaA_\nu(x+ae_\mu)} e^{ieaA_\mu(x)} \\ &= e^{-ieaA_\nu(x)} e^{-ieaA_\mu(x) - ie a^2 \partial_\nu A_\mu(x) + O(a^3)} \\ &\quad e^{ieaA_\nu(x) + ie a^2 \partial_\mu A_\nu(x) + O(a^3)} e^{ieaA_\mu(x)} \end{aligned} \quad (13.42)$$

$$= e^{iea^2 (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ie[A_\mu(x), A_\nu(x)]) + O(a^3)} \quad (13.43)$$

$$= e^{iea^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)},$$

wobei wir im Schritt von (13.42) zu (13.43) von der *Baker-Hausdorff-Formel*

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \tag{13.44}$$

Gebrauch machten und im Exponenten Terme bis zur Ordnung  $a^2$  berücksichtigten. Es folgt

$$U(x, \mu\nu) + U^\dagger(x, \mu\nu) \approx 2 - e^2 a^4 F_{\mu\nu}^2(x) + O(a^5). \tag{13.45}$$

Da der führende Term nach der konstanten Matrix von der Ordnung  $a^4$  ist, könnte man meinen, dass wir von Beginn an die Entwicklung bis zu dieser Ordnung hätten ausführen müssen. Für die unitäre Matrix  $U = \exp(iT)$  mit hermitescher Matrix  $T = ea^2 F_{\mu\nu} + O(a^3)$  gilt jedoch

$$U + U^\dagger = 2 - T^2 + O(T^4).$$

Zur Ordnung  $a^4$  in  $U + U^\dagger$  trägt also tatsächlich nur der führende Term der Ordnung  $a^2$  in  $T$  bei. Das Ergebnis dieses *naiven Kontinuumslikes* legt folgende Definition für die Wirkung einer Euklidischen Eichtheorie nahe:

$$S_{\text{eich}} = \frac{1}{e^2 N} \sum_p \text{tr} \left( \mathbb{1} - \frac{1}{2} (U_p + U_p^\dagger) \right). \tag{13.46}$$

Die Summe erstreckt sich über alle Plaketten im Gitter, d.h. wir erhalten eine Summe über alle Gitterpunkte  $x$  (im Kontinuumslikes wird diese Summe zur Raumzeit-Integration) sowie über alle Flächenelemente  $\mu, \nu$ . Der Normierungsfaktor  $1/N$  berücksichtigt, dass die Variablen  $U_\ell$  zu einer  $N$ -dimensionalen unitären Darstellung der Eichgruppe gehören. Sind alle  $U_p = \mathbb{1}$ , dann verschwindet wegen  $\text{tr} \mathbb{1} = N$  die Eichwirkung. Für allen anderen Konfigurationen ist  $S_{\text{eich}}$  positiv. Für  $SU(2)$  ist  $\text{tr} U$  reell und in der fundamentalen Darstellung wird

$$S_{\text{eich}} = \frac{1}{2e^2} \sum_p \text{tr} (\mathbb{1} - U_p), \quad SU(2) \text{ fundamentale Darstellung.} \tag{13.47}$$

### 13.2.2 Invariantes Maß und irreduzible Darstellungen

Zur Berechnung der Zustandssumme oder von Erwartungswerten benötigen wir eine Integration über alle dynamischen Freiheitsgrade. In der Kontinuumstheorie sind dies die Eichpotentiale  $A_\mu(x)$  (siehe die Lehrbücher über Eichtheorien oder meine Vorlesung *Path Integrals*). Auf dem Gitter werden die Eichpotentiale durch die Paralleltransporter  $U(x, \mu) \in \mathcal{G}$  entlang der elementaren Kanten ersetzt. Deshalb ist es naheliegend, die formale Inte-

gration über alle Eichpotentiale durch die *invariante Integration* über die Eichgruppe  $\mathcal{G}$  zu ersetzen,

$$\int \mathcal{D}A_\mu(x) \longrightarrow \int \prod_{(x,\mu)} dU(x,\mu). \quad (13.48)$$

Dabei  $dU$  das bis auf eine multiplikative Konstante eindeutige links- und rechtsinvariante *Haar-Maß* auf der kompakten Gruppe,

$$dU = d(\Omega U) = d(U\Omega), \quad \Omega \in \mathcal{G}. \quad (13.49)$$

Wir normieren das invariante Maß, so dass  $\int dU = 1$  gilt. Jede kompakte Gruppe besitzt ein derartiges Haar-Maß. Die Bedingungen (13.49) sind gleichbedeutend mit der Links- und Rechtsinvarianz der *Mittelbildung*,

$$\mathcal{M}(f) \equiv \int_{\mathcal{G}} dU f(U) = \int_{\mathcal{G}} dU f(\Omega U) = \int_{\mathcal{G}} dU f(U\Omega) \quad (13.50)$$

für alle Gruppenelemente  $\Omega$  und Funktionen  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ . Für eine *endliche Gruppe* ist die Mittelbildung gleich dem Mittelwert von  $f$ ,

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{U \in \mathcal{G}} f(U). \quad (13.51)$$

Die Mittelbildung  $\mathcal{M}$  trägt ihren Namen zurecht: sie ist linear, positiv, normiert und invariant. Die Invarianzeigenschaft (13.50) ist evident.

Die Elemente der einfachsten kompakten Liegruppe  $U(1)$  der komplexen, unimodularen Zahlen haben die Form  $U = e^{i\alpha}$  mit  $\alpha \in [-\pi, \pi)$ . Eine Funktion  $f : U(1) \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion des Parameters  $\alpha$ . Die Mittelbildung ist dann gegeben durch folgendes Integral über den Parameterraum:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(e^{i\alpha}). \quad (13.52)$$

Die Invarianz bezüglich Linkstranslationen beweist man wie folgt,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(\Omega e^{i\alpha}) \stackrel{\Omega = e^{i\tilde{\alpha}}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(e^{i\tilde{\alpha} + i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha f(e^{i\alpha}).$$

Die Zustandssumme einer  $U(1)$ -Gittereichtheorie hat damit die Form

$$Z_\Lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\ell \in E} \frac{d\alpha_\ell}{2\pi} \exp \left( \frac{1}{e^2} \sum_p (1 - \cos \sum_{\ell \in \partial p} \alpha_\ell) \right). \quad (13.53)$$

Das Argument der Kosinus-Funktion enthält die Summe über die 4 orientierten Kanten die zum Rand der Plakette  $p$  gehören.

Wie sieht nun das invariante Haarmaß von  $SU(2)$  aus? Dazu überlegen wir uns, was die Linkstranslation  $U \rightarrow \Omega U$  auf  $SU(2)$  geometrisch bedeutet. Die Gruppenelemente können wie folgt ein-eindeutig parametrisiert werden,

$$\alpha \longrightarrow U(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ -\alpha_3 + i\alpha_4 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in S^3. \quad (13.54)$$

Als Mannigfaltigkeit ist die Gruppe  $SU(2)$  gleich der Sphäre  $S^3$ . Die Linkstranslation  $U \rightarrow \Omega U$  mit dem Gruppenelement  $\Omega = U(\beta)$  ist dann im Parameterraum gegeben durch

$$U(\beta)U(\alpha) = U(O(\beta)\alpha) \quad \text{mit} \quad O(\beta)\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ \beta_2 & \beta_1 & -\beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & -\beta_2 \\ \beta_4 & -\beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}. \quad (13.55)$$

Wegen  $\beta \in S^3$  ist  $O(\beta)$  eine orthogonale  $4 \times 4$ -Matrix,  $O^T O = 1$ , und damit ist  $O(\beta)\alpha$  eine Drehung von  $\alpha$ . Nun ist aber die von  $\mathbb{R}^4$  auf  $S^3$  induzierte Volumenform dreihinvariant und damit invariant unter Linkstranslationen (und Rechtstranslationen). Normieren wir die Volumenform, dann erhalten wir das *eindeutige Haarmaß* auf  $SU(2)$ ,

$$dU = \delta(\alpha^2 - 1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4. \quad (13.56)$$

Alternativ können wir für die Punkte auf  $\sim S^3$  „Kugelkoordinaten“ einführen,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \psi \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (13.57)$$

Dies führt auf folgende Parametrisierung der Gruppenelemente,

$$U(\theta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta + i \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi e^{i\varphi} \\ -\sin \theta \sin \psi e^{-i\varphi} & \cos \theta - i \sin \theta \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (13.58)$$

wobei die auftretenden Winkel eingeschränkte Wertebereiche haben,

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < \pi \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (13.59)$$

In diesen Koordinaten lautet das Haar-Maß von  $SU(2)$

$$dU = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \theta \cdot \sin \psi \, d\theta d\psi d\varphi. \quad (13.60)$$

Es definiert ein *invariantes Skalarprodukt* auf den Funktionen  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$(f, g) \equiv \int_{\mathcal{G}} \bar{f}(U)g(U)dU. \quad (13.61)$$

Man kann sich eine vollständige orthonormierte Basis des Hilbertraums  $L_2(\mathcal{G}, dU)$  beschaffen, wenn man *alle* irreduziblen Darstellungen der Gruppe betrachtet. Eine *Darstellung*  $R$  der Gruppe  $\mathcal{G}$  ist eine strukturhaltende Abbildung der Gruppe in die Menge der linearen Abbildungen eines Vektorraums  $V$ ,

$$R : \mathcal{G} \longrightarrow L(V), \quad R(U_1U_2) = R(U_1)R(U_2), \quad R(\mathbb{1}) = \mathbb{1}. \quad (13.62)$$

Die Dimension  $d_R$  der Darstellung  $R$  ist gleich der Dimension des Darstellungsraumes  $V$ . Wir wollen im Folgenden annehmen, dass die Gruppe eine Mittelbildung besitzt. Dann ist jede Darstellung äquivalent zu einer unitären Darstellung. Endliche und kompakte Gruppen besitzen eine Mittelbildung.

Eine Darstellung heisst *irreduzibel*, wenn die linearen Abbildungen  $\{R(U)|U \in \mathcal{G}\}$  keinen gemeinsamen invarianten echten Unterraum von  $V$  haben. Es sei nun  $\{R(U)\}$  die Menge aller irreduziblen Darstellungen. Es gilt der wichtige

**Satz von Peter-Weyl:** *Die Funktionen  $\{R(U)^{ab}\}$  definieren ein vollständiges Orthogonalsystem von  $L_2(dU)$ , und*

$$(R^{ab}, R'^{cd}) \equiv \int \bar{R}^{ab}(U)R'^{cd}(U) dU = \frac{\delta_{RR'}}{d_R} \delta_{ac}\delta_{bd}, \quad (13.63)$$

wobei  $d_R = \text{tr} R(\mathbb{1})$  die Dimension der Darstellung  $R$  ist.

Dieses Theorem hat als wichtige Konsequenz das

**Lemma:** *Die Charakteren  $\chi_R(U) = \text{tr} R(U)$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für den Raum der invarianten Funktionen,  $f(\Omega U \Omega^{-1}) = f(U) \subset L_2(dU)$ . Insbesondere*

$$(\chi_R, \chi_{R'}) = \delta_{RR'}. \quad (13.64)$$

Dieses Lemma ist nützlich bei der Zerlegung einer reduziblen Darstellung in irreduzible Anteile. Weitere hilfreiche Identitäten liefert das

**Lemma:** *Es gelten die folgenden Formeln*

$$\begin{aligned} (R^{ab}, \chi_{R'}) &= (\chi_{R'}, R^{ab}) = \frac{\delta_{RR'}}{d_R} \delta_{ab} \\ \int \chi_R(\Omega U^{-1}) \chi_{R'}(U) dU &= \frac{\delta_{RR'}}{d_R} \chi_R(\Omega) \\ \sum_R d_R \chi_R(U) &= \delta(\mathbb{1}, U). \end{aligned} \tag{13.65}$$

Diese werden zum Beispiel bei der Entwicklung für starke Kopplungen benötigt. Für einen Beweis dieser (und weiterer) Formeln verweise ich auf die reichhaltige Literatur über Gruppen und Darstellungen.

### 13.2.3 Zustandssummen von zweidimensionalen Modellen

Wir berechnen die Zustandssummen von 2-dimensionalen Eichtheorien auf dem quadratischen Gitter mit periodischen Randbedingungen. Wir beginnen mit Abelschen Eichtheorien, deren Zustandssumme ähnlich einfach berechnet werden kann wie für eindimensionale Spinmodelle. Für nicht-Abelsche Eichtheorien ist die Berechnung komplizierter und macht wesentlichen Gebrauch von den Eigenschaften des Haar-Maßes.

#### $\mathbb{Z}_2$ -Eichtheorie

Die dynamischen Variablen sind die  $|E| = 2V$  Linkvariablen  $U_\ell \in \{-1, 1\}$  und die invariante Integration ist die Mittelbildung  $\frac{1}{2} \sum_{U_\ell}$  auf der Eichgruppe  $\mathbb{Z}_2$ . Zur Umformung der Zustandssumme benutzen wir denselben Trick wie bei der Hochtemperaturentwicklung für das Ising-Modell (siehe 9.2),

$$Z = \frac{1}{2^{|E|}} \sum_{\{U\}} e^{-\sum_p \beta(1-U_p)} = \frac{1}{2^{|E|}} \left( \frac{\cosh \beta}{e^\beta} \right)^V \sum_{\{U\}} \prod_p (1 + vU_p), \tag{13.66}$$

wobei  $\tanh \beta = v$  gesetzt wurde. Für die  $\mathbb{Z}_2$ -Eichtheorie ist dies eine Entwicklung in  $\tan \beta$  mit  $\beta \sim 1/e^2$ , also eine Entwicklung für starke Kopplung. Wegen

$$\sum_{U_\ell} U_\ell^k = \begin{cases} 2 & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade,} \end{cases} \tag{13.67}$$

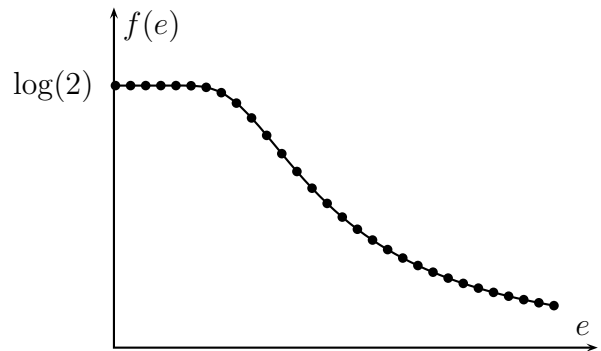
tragen nach Ausmultiplikation des Produktes auf der rechten Seite in (13.66) nur die Terme 1 und  $v^V \prod_p U_p$  bei. Es folgt

$$Z = \left( \frac{\cosh \beta}{e^\beta} \right)^V (1 + (\tanh \beta)^V) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + e^{-\beta}}{2} \right)^V. \tag{13.68}$$

Im thermodynamischen Grenzfall  $V \rightarrow \infty$  strebt die freie Energiedichte  $f = -\log(Z)/V$  gegen

$$\log 2 - \log(1 + e^{-2\beta}).$$

Für schwache Kopplung oder grosse  $\beta$  ist sie gleich  $\log(2)$ . Im starken Kopplungslimes strebt sie gegen 0.

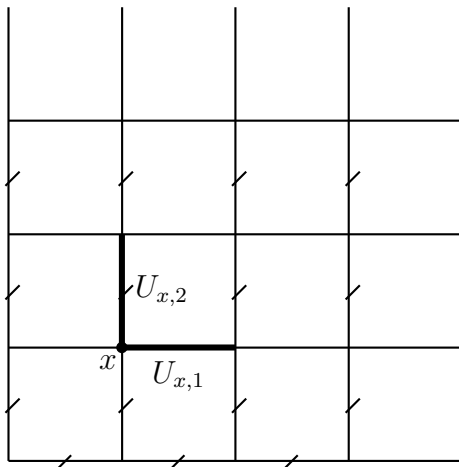


**U(1)-Eichtheorie**

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn wir die Link-Variablen  $U_\ell = e^{i\alpha_\ell}$  in der Zustandssumme

$$Z = e^{-\beta V} \int \prod_\ell dU_\ell \prod_p e^{\frac{1}{2}\beta U_p + \frac{1}{2}\beta \bar{U}_p}, \quad U_p = \prod_{\ell \in \partial p} U_\ell \tag{13.69}$$

geschickt transformieren.



Als eichinvariante Variablen könnten wir alle Plakettenvariablen  $U_p$  und die *Polyakov-Schleifen* wählen.

$$P(x_2) = \prod_{n=1}^{N_1} U_{x+ne_1,1}$$

$$P(x_1) = \prod_{n=1}^{N_2} U_{x+ne_2,2}. \tag{13.70}$$

Aber diese Variablen sind nicht unabhängig. Da wir periodische Randbedingungen fordern, ist  $\prod_p U_p = 1$ .

Nur  $V - 1$  Plakettenvariablen sind unabhängig und wir wählen diese als ein Teil der

neuen Variablen. Nun kann man sich leicht überzeugen, dass  $P(x_1 + m)P^{-1}(x_1)$  gleich dem Produkt derjenigen Plakettenvariablen ist, die durch die beiden zu  $P(x_1 + m)$  und  $P(x_1)$  gehörigen Schleifen eingeschlossen werden. Als weitere unabhängige eichinvariante Variablen wählen wir also nur jeweils eine Polyakovschleife in die Zeit- und eine in die Raumrichtung. Damit ergeben sich  $V + 1$  unabhängige eichinvariante Variablen. Zusammen mit den  $N_1(N_2 - 1) + (N_1 - 1) = V - 1$  *eichvarianten* Linkvariablen auf den durch einen Schrägstrich gekennzeichneten Links  $E'$  ergibt sich der vollständige Satz von  $V$  Variablen,

$$\{U_p | p = 1, \dots, V - 1\}, \quad P_1, P_2, \quad \{U_\ell | \ell \in E'\} \quad (13.71)$$

Wegen der Links- und Rechtsinvarianz des Haar-Maßes folgt

$$Z = e^{-\beta V} \int \prod_{p=1}^{V-1} dU_p \prod_{p=1}^V e^{\frac{1}{2}\beta(U_p + \bar{U}_p)} \int dP_1 dP_2 \int \prod_{\ell \in E'} dU_\ell. \quad (13.72)$$

Darin ist die Plakettenvariable  $U_V$  wegen  $\prod U_p = 1$  von den anderen Plakettenvariablen abhängig. Also erhalten wir

$$Z = e^{-\beta V} \prod_{p=1}^V \int dU_p e^{\frac{1}{2}\beta(U_p + \bar{U}_p)} \delta(1, U_1 U_2 \cdots U_V). \quad (13.73)$$

Für die Gruppe  $U(1)$  sind alle irreduziblen Darstellungen eindimensional und mit  $U = e^{i\alpha}$  ist die Formel  $\delta(1, U) = \sum U^n$  in (13.65) äquivalent zur Fourierdarstellung der  $\delta$ -Distribution. Dies führt auf folgende explizite Formel für die Zustandssumme einer 2-dimensionalen  $U(1)$  Gittereichtheorie mit periodischen Randbedingungen,

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta V} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{p=1}^V \int (dU_p e^{\beta \cos \alpha U_p^n}) \\ &= e^{-\beta V} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{\beta \cos \alpha + i n \alpha} \right)^V = e^{-\beta V} \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n(\beta)^V. \end{aligned} \quad (13.74)$$

Die zugehörige freie Energiedichte hat die Form

$$f(\beta, V) = \beta - \frac{1}{V} \log \left( \sum I_n(\beta)^V \right). \quad (13.75)$$



**$\mathbb{Z}_N$ -Eichtheorien**

Dieselbe Variablenänderung führt für die Zustandssumme einer  $\mathbb{Z}_N$ -Theorie

$$Z = \sum_{\{U\}} e^{-\beta(1-\frac{1}{2}U_p-\frac{1}{2}\bar{U}_p)}, \quad U_\ell, U_p \in \{z = e^{2\pi i/N}, z^2, \dots, z^N = 1\}, \quad (13.76)$$

mit Hilfe der Darstellung

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n k/N} = \delta_{(k \bmod N), 0} \quad (13.77)$$

für das  $N$ -periodische Kronecker-Symbol, auf folgende Reihendarstellung für die Zustandssumme

$$Z = e^{-\beta V} \sum_{n=1}^N F_N(n, \beta)^V, \quad F_N(n, \beta) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{\beta \cos(2\pi m/N) + 2\pi i m n/N}. \quad (13.78)$$

Für  $N = 2$  stimmt dies mit dem Resultat (13.68) für die  $\mathbb{Z}_2$ -Gittereichtheorie überein und für  $N \rightarrow \infty$  mit der Formel (13.74) für die  $U(1)$ -Theorie.

**Nicht-Abelsche Eichtheorien**

Wie für die  $U(1)$ -Theorie wählen wir als unabhängige Variablen die Plaketten-, Polyakovschleifen- und speziellen Linkvariablen in (13.71). Als Wirkung wählen wir (13.46), wobei die Linkvariablen und Plakettenvariablen in einer irreduziblen Darstellung  $R$  der Eichgruppe liegen. Es sei  $\chi_R(U) = \text{tr } R(U)$  der Charakter dieser Darstellung. Dann nimmt die Wirkung folgende Form an,

$$S_{\text{eich}} = \beta \sum_p \left( 1 - \frac{1}{2N} \chi_R(U_p) - \frac{1}{2N} \bar{\chi}_R(U_p) \right) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{e^2}. \quad (13.79)$$

Wie oben müssen wir die Nebenbedingung

$$\prod U_p = \mathbb{1}$$

berücksichtigen. Dabei ist es nützlich, die vollständige und orthonormierte Basis der Charakteren  $\chi_R$  für die Klassenfunktionen auf der Gruppe einzuführen,

$$\chi_R(U) = \text{tr } R(U), \quad \chi_R(\Omega U \Omega^{-1}) = \chi_R(U).$$

Hier ist  $U \rightarrow R(U)$  eine irreduzible Darstellung der kompakten Gruppe  $\mathcal{G}$ . Jede Klassenfunktion hat nach dem Lemma auf Seite 262 die Entwicklung

$$f = \sum_R (\chi_R, f) \chi_R, \tag{13.80}$$

wobei das Skalarprodukt mit dem Haarschen Maß definiert ist,

$$(f, g) = \int dU \bar{f}(U) g(U). \tag{13.81}$$

### 13.2.4 Observablen der reinen Eichtheorien

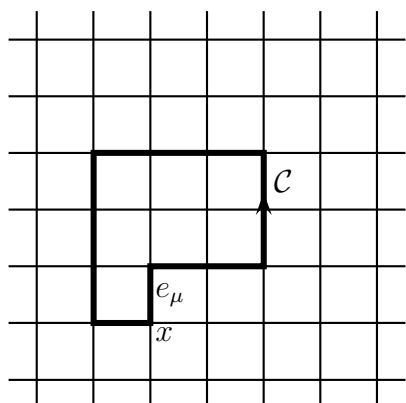
Da die Gitterwirkungen und das Haar-Maß eichinvariant sind, ist das normierte Maß im Funktionalintegral

$$d\mu[U] = \frac{1}{Z} e^{-S_{\text{eich}}[U]} \prod_{\ell \in E} dU_\ell, \quad Z = \int e^{-S_{\text{eich}}[U]} \prod_{\ell \in E} dU_\ell, \tag{13.82}$$

ebenfalls eichinvariant. Für ein endliches Gitter in  $d$  Dimensionen ist dies ein  $d|\Lambda||\mathcal{G}|$ -dimensionales Integral. Zum Beispiel, für eine 4-dimensionale  $SU(2)$ -Eichtheorie auf dem hyperkubischen  $16^4$  Gitter wäre es ein  $4 \cdot 16^4 \cdot 3 = 786\,432$ -dimensionales Integral. Wegen der Eichinvarianz des Maßes folgt für die Erwartungswerte von Funktionen der dynamischen Variablen

$$\begin{aligned} \langle F[U] \rangle &= \int d\mu[U] F[U] = \int d\mu[U] F[U^\Omega] = \langle F[U^\Omega] \rangle, \\ U &= \{U(x, \mu)\}, \quad U^\Omega = \{\Omega(x + e_\mu)U(x, \mu)\Omega^{-1}(x)\}, \end{aligned} \tag{13.83}$$

für beliebige lokale Eichtransformationen  $\{\Omega(x)\}$ . Es ist also nur sinnvoll, Erwartungswerte von eichinvarianten Größen zu betrachten.



Eichinvariante Funktionen der Variablen  $\{U(x, \mu)\}$  sind die Spuren von Produkten von  $U$ 's entlang geschlossener Wege (Schleifen). Wir definieren

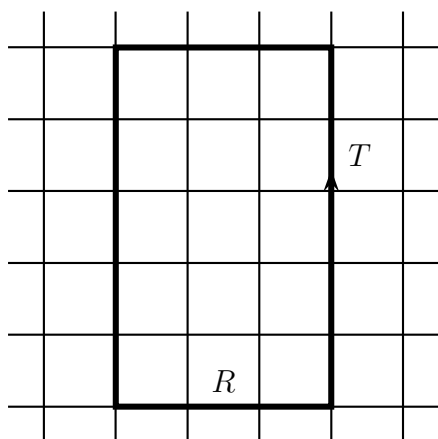
$$W[\mathcal{C}] = \text{tr} \prod_{i=1}^L U(x_i, \mu_i)|_{\mathcal{C}}. \tag{13.84}$$

Dabei beschreibt  $(x_i, \mu_i)$  mit  $n_{i+1} = n_i + e_{\mu_i}$  und  $n_{L+1} = n_1$  eine Folge von gerichteten Kanten zu der Schleife  $\mathcal{C}$ .

Die Größen  $W[\mathcal{C}]$  sind für geschlossene Wege (Schleifen)  $\mathcal{C}$  eichinvariant. Man kann sich überlegen, dass die allgemeinste eichinvariante Größe eine Funktion der Paralleltransporter entlang geschlossener Wege ist. Die Bezeichnung für  $W[\mathcal{C}]$  variiert leider in der Literatur. Oft heissen sie Wilson-Schleifen. Manchmal versteht man unter einer Wilson-Schleife auch nur das Produkt der  $U$ 's entlang einer Schleife, also das Argument der Spur in (13.84), manchmal auch den Erwartungswert von  $W$ . Wir werden im folgenden die eichinvarianten  $W$  in (13.84) als Wilson-Schleifen bezeichnen.

Wilson-Schleifen zu geschlossenen Wegen, die sich um ein periodisches Gitter herumwinden, heissen auch Polyakov-Schleifen. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Gittereichtheorien bei endlichen Temperaturen. Der Erwartungswert der Polyakovschleifen ist ein Ordnungsparameter für den Confinement-Deconfinement Phasenübergang in reinen Eichtheorien. Die Dynamik derartiger Schleifen wird zur Zeit am Lehrstuhl Quantentheorie untersucht [80].

### 13.2.5 Die Stringspannung



Es sei nun  $W[R, T]$  eine Wilson-Schleife zu einer ebenen und rechteckigen Schleife mit den Kantenlängen  $R$  und  $T$ . Die Funktion

$$V_{q\bar{q}}(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W[R, T] \rangle \quad (13.85)$$

wird als statisches  $q\bar{q}$ -Potential interpretiert. Die Größe

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V_{q\bar{q}}(R)}{R} \quad (13.86)$$

heisst *Stringspannung*. Sie ist ein Ordnungsparameter zur Unterscheidung zwischen Confinement bzw. Nicht-Confinement in einer reinen Eichtheorie.

Akzeptiert man für  $V_{q\bar{q}}(R)$  die Interpretation als Potential zwischen zwei von aussen eingebrachten statischen Ladungen, so bedeutet  $\sigma \neq 0$ , dass die potentielle Energie mit dem Abstand der Ladungen zunimmt, und für asymptotisch entfernte Ladungen unendlich groß würde, so



dass dieser Zustand in einer dynamischen Theorie nicht auftritt. Das lineare Anwachsen der Energie mit dem Abstand könnte erklärt werden, wenn sich zwischen den äußeren

Ladungen ein Flußschlauch mit konstanter Energiedichte bilden würde. Dann wäre die Energie des Schlauches proportional zu seiner Länge und entsprechend die Kraft zwischen den Ladungen konstant. Für eine verschwindende Stringspondung nimmt dagegen die potentielle Energie für sehr große Abstände kaum mehr zu. Es sollte also möglich sein, dem System genügend Energie zuzuführen, um eine Trennung der Ladungen zu erreichen.

Die Ladungen treten in dieser Betrachtung nur als „unendlich schwere“ Objekte ohne eigene Dynamik auf. In Wirklichkeit wird die Energie zwischen zwei sich entfernenden Ladungen nur solange zunehmen, bis die potentielle Energie ausreicht, um die Paarproduktion aus dem Vakuum zu zünden. Die erzeugten Teilchen schirmen die individuellen Ladungen ab und es entstehen zwei ladungsneutrale Zustände, die sich voneinander entfernen können.

WILSON schlug als Kriterium für Confinement oder Nicht-Confinement in einer reinen Eichtheorie das *Flächen-* oder *Umfangsgesetz* für den Erwartungswert der Wilson-Schleife vor,

$$\begin{aligned} \langle W[\mathcal{C}] \rangle &\sim e^{-TV_{q\bar{q}}(R)} \sim e^{-\text{Fläche}} && \text{Confinement} \\ \langle W[\mathcal{C}] \rangle &\sim e^{-TV_{q\bar{q}}(R)} \sim e^{-\text{Umfang}} && \text{kein Confinement.} \end{aligned} \tag{13.87}$$

SEILER und BORGS u.a. konnten beweisen, dass  $V_{q\bar{q}}(R)$  monoton anwächst,  $V'_{q\bar{q}} \geq 0$ , aber nicht stärker als linear ansteigen kann,  $V''_{q\bar{q}} \leq 0$ , siehe zum Beispiel [81]. Für große Abstände hat das statische Potential die Form

$$V_{q\bar{q}}(R) \sim \sigma R - \frac{c}{R} + \text{const} + o(L^{-1}) \tag{13.88}$$

mit einer universellen und positiven Konstanten  $c$ . Der Term  $\sim 1/R$  heisst Lüscher-Term. Er hat seinen Ursprung in den Quantenfluktuationen des Fluss-Schlauches zwischen den beiden statischen Ladungen [82].

Wir kommen zu einer Begründung, warum  $V(R)$  als statisches  $q\bar{q}$ -Potential angesehen werden kann. In der Elektrodynamik ändert sich bei Anwesenheit einer äußeren 4-er Stromdichte  $j^\mu(x)$  der Gewichtsfaktor im Funktionalintegral gemäß

$$\exp(iS) \longrightarrow \exp\left(iS + i \int d^4x j^\mu A_\mu\right). \tag{13.89}$$

Nun parametrisiere  $z^\mu(\tau)$  die Weltlinie  $\mathcal{C}$  eines elektrisch geladenen Punktteilchens. In der klassischen Elektrodynamik ist die 4-er Geschwindigkeit  $\dot{z}^\mu$  zeitartig. Für die Stromdichte des bewegten Teilchens

$$j^\mu(x) = e \int_{\mathcal{C}} d\tau \dot{x}^\mu(\tau) \delta^4(x - z(\tau))$$

lautet dann der zusätzliche Phasenfaktor in (13.89) folgendermassen,

$$\exp\left(i \int d^4x j^\mu A_\mu\right) = \exp\left(ie \int_{\mathcal{C}} dz^\mu A_\mu(z)\right) = \exp\left(ie \int_{\mathcal{C}} A\right), \quad (13.90)$$

wobei längs des durch  $z(\tau)$  spezifizierten Weges  $\mathcal{C}$  zu integrieren ist. Die euklidische Form erhält man durch die Substitutionen  $j^0 = -ij_4$ ,  $dz^0 = -idz_4$  und  $A_0 = iA_4$ . Die Phase (13.90) bleibt beim Übergang zur euklidischen Theorie eine Phase. Wählt man für  $\mathcal{C}$  eine Schleife, so entspricht die Zustandssumme in Gegenwart eines stationären Stromes,

$$\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(-S_E[A] + ie \oint_{\mathcal{C}} A\right) = \left\langle \exp\left(ie \oint_{\mathcal{C}} A\right) \right\rangle = \langle W[\mathcal{C}] \rangle, \quad (13.91)$$

genau der Kontinuumsversion des Erwartungswertes der Wilson-Schleife.

### 13.3 Starke Kopplung

Die Wirkung einer reinen Eichtheorie auf dem Gitter

$$S_{\text{eich}} = -\beta \sum_p \text{tr} \left( \mathbb{1} - \frac{1}{2} (U_p + U_p^\dagger) \right), \quad \beta = \frac{2}{Ne^2}, \quad (13.92)$$

hat mit der nackten Kopplung  $e$  nur einen freien Parameter. Eine Gittereichtheorie kann als klassisches statistisches System mit inverser Temperatur  $\beta$  angesehen werden. Der Grenzfall starker Kopplung entspricht dann dem Hochtemperaturlimes. Wir werden nun sehen, dass das führende Verhalten des Erwartungswertes von Wilson-Schleifen,

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle = \frac{1}{Z} \int d\mu[U] W[\mathcal{C}], \quad Z = \int d\mu[U], \quad (13.93)$$

für starke Kopplung durch ein Flächengesetz bestimmt ist.

Wir brauchen folgende wesentlichen Eigenschaften des Haar-Maßes:

$$\int_{\mathcal{G}} dU = 1 \quad , \quad \int_{\mathcal{G}} dU U_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \int_{\mathcal{G}} dU U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta}^\dagger = c \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}. \quad (13.94)$$

Die erste Bedingung ist die Normierung des Haar-Maßes. Die zweite Bedingung gilt für jede nicht-triviale Darstellung der Gruppe, da wegen der Invarianz des Maßes

$$\int dU U_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} \left( \int dU U_{\gamma\delta} \right) g'_{\delta\beta}. \quad (13.95)$$

für alle Gruppenelemente  $g$  und  $g'$  gilt. Wenn  $U$  nicht-trivial transformiert, dann folgt sofort

die zweite Gleichung in (13.94) Die letzte Gleichung begründet man nun ganz analog.

ähnlich wie für Spinmodelle entwickeln wir das Boltzmann-Gewicht in (13.61) nach Potenzen von  $\beta \sim 1/g^2$ ,

$$\exp\left(-\beta \sum_p \operatorname{tr} \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{2}(U_p + U_p^\dagger) \right\}\right) = \prod_p \left(1 - \beta \operatorname{tr} \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{2}(U_p + U_p^\dagger) \right\} + O(\beta^2)\right).$$

Wegen (13.94) hat die Entwicklung der Zustandssumme für starke Kopplung die Form

$$Z = 1 + O(\beta^2) = 1 + O(1/g^4). \quad (13.96)$$

Für den Zähler im Erwartungswert (13.93) erhalten wir

$$\int \prod_{x,\mu} dU(x,\mu) \operatorname{tr} \{U(\ell_1)U(\ell_2)\cdots U(\ell_L)\} \cdot \prod_p \left(1 - \beta \operatorname{tr} \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{2}(U_p + U_p^\dagger) \right\} + O(\beta^2)\right). \quad (13.97)$$

Dabei bezeichnen  $\ell_i = (x_i, \mu_i)$   $i = 1, \dots, L$  die orientierten Gitterkanten der geschlossenen Schleife der Länge  $L$ . Wegen der zweiten Eigenschaft in (13.94) verschwindet der erste Term dieser Entwicklung, es sei denn,  $\mathcal{C}$  ist ein Schleife die einen Weg vorwärts und zurück durchläuft. Für eine Schleife, die eine nicht-verschwindende Fläche einschliesst, ist der führende Term dadurch gegeben, dass jedes  $U_\ell$  mindestens zweimal auftritt, und zwar zu entgegengesetzten Richtungen der Kante  $\ell$  gehörend. Dann muß von dem Boltzmann-Gewicht ein Produkt von Plakett-Variablen beitragen, welches gerade die Wilson-Schleife  $\mathcal{C}$  schliesst. In anderen Worten, es tragen in der Entwicklung des Gewichts nur Produkte bei, deren Plaketten eine 2-Kette mit Rand  $\mathcal{C}^{-1}$  bilden. Der führende Beitrag zum Zähler, und damit zu Erwartungswert (13.93) ist somit

$$\langle W[\mathcal{C}] \rangle \sim \left(c^2 \frac{2}{Ng^2}\right)^A = \exp\left(-A \log \frac{Ng^2}{2c^2}\right), \quad (13.98)$$

wobei  $A$  die Anzahl Plaketten ist, welche die Minimalfläche  $A$  mit  $\partial A = \mathcal{C}$  aufspannen. Für eine rechteckige Wilson-Schleife ist  $A = RT$ . Der Beitrag  $c^{2A}$  kommt von den  $U$ -Integrationen, da in führender Ordnung die Anzahl Gitterlinien innerhalb  $A$  gleich  $2A$  ist.

Man kann dieses Argument natürlich noch verbessern. Offensichtlich tragen zum Zähler in (13.93) genau diejenigen Flächen bei, deren Rand gleich  $\mathcal{C}^{-1}$  ist. Dabei können auch geschlossene Flächen ohne Rand beitragen. Der Beitrag dieser nicht-zusammenhängenden Flächen werden durch den Nenner aufgehoben. Die Flächen mit Rand  $\mathcal{C}^{-1}$  können Selbst-

überschneidungen haben oder von randlosen Flächen berührt werden. In jedem Fall erwartet man eine Darstellung der Form

$$\langle W[C] \rangle = \sum_{c_2; \partial c_2 = -C} e^{-\sigma A(c_2)}, \quad (13.99)$$

mit einer Stringspannung  $\sigma$ . Bisher ist es im Kontinuum leider noch nicht gelungen, eine vergleichbare Formel zu *beweisen*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>OSTERWALDER und SEILER konnten beweisen, dass die starke Kopplungsentwicklung konvergiert, ganz im Gegensatz zur schwachen Kopplungsentwicklung. Nach einem Argument von Dyson ist diese im besten Fall asymptotisch.