

# Kapitel 12

## Spinorfelder

Elektronen, Myonen oder Quarks werden 4-komponentige Spinorfelder  $\psi(x) \in \mathbb{C}^4$  zugeordnet. Das Feld beschreibt neben Teilchen auch deren Antiteilchen mit gleicher Masse aber entgegengesetzter Ladung. Ohne Wechselwirkung gehorcht  $\psi$  der Diracgleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}, \quad (12.1)$$

wobei  $(\eta^{\mu\nu})$  den metrischen Tensor  $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$  bezeichnet. Die Eigenschaften dieser relativistischen Bewegungsgleichung für Teilchen mit Spin 1/2 und insbesondere ihre Lösungen, die Transformationen der Spinoren bei einem Wechsel des Inertialsystems oder die Ankopplung von  $\psi$  an das elektromagnetische Feld sollen hier nicht wiederholt werden.

Beim Übergang zur euklidischen Theorie werden die  $\gamma^\mu$  durch die euklidischen Gamma-Matrizen  $\gamma_E^0 = \gamma^0$  und  $\gamma_E^i = i\gamma^i$ , welche die algebraischen Relationen

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \quad (12.2)$$

erfüllen, ersetzt. Da im Folgenden nur die euklidische Theorie behandelt wird, lassen wir den Index  $E$  wieder weg. Die euklidischen Gamma-Matrizen sind hermitesch,

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu = \gamma^\mu \quad (12.3)$$

und die Diracgleichung für das Euklidische Feld lautet

$$D\psi(x) \equiv (\not{\partial} + m)\psi(x) = 0, \quad \not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (12.4)$$

In der euklidischen Raumzeit transformieren Spinoren mit unitären Spinmatrizen  $S$  unter Lorentz-Transformationen, d.h.  $\psi(x') = S\psi(x)$  mit  $S^\dagger S = \mathbb{1}$ . Deshalb ist  $\bar{\psi}\psi$  nicht invariant unter „euklidischen Lorentz-Transformationen“ wenn wir an der im Minkowski-Raum geltenden Beziehung  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  festhalten. Im euklidischen Raum identifizieren wir  $\bar{\psi}$  mit

$\psi^\dagger$ . Nur wenn  $\bar{\psi}$  wie  $\psi^\dagger$  transformiert ist  $\bar{\psi}\psi$  ein skalares Feld.

Der Operator  $\not{\partial}$  ist anti-hermitesch, im Gegensatz zu  $m$ . Der Dirac-Operator  $D$  im euklidischen Raum ist noch „ $\gamma_5$ -hermitesch“

$$\gamma_5 D \gamma_5 = D^\dagger. \quad (12.5)$$

Mit dieser Bedingung erscheinen alle nicht-reellen Eigenwerte von  $D$  in komplex konjugierten Paaren. Man findet denselben nicht-hermiteschen Dirac-Operator auch bei einer sorgfältigen Ableitung der Pfadintegral-Darstellung für die thermische Zustandssumme [24]. Die obige Diracgleichung ist die Euler-Lagrange-Gleichung zur Wirkung

$$S_F = \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) + m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right), \quad (12.6)$$

und bis auf einen Oberflächenterm ist diese gleich

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(x) D \psi(x). \quad (12.7)$$

In dieser Form findet man die fermionische Wirkung auch in den meisten Lehrbüchern. Die Wirkung ist invariant unter den globalen  $U(1)$ -Transformationen

$$\psi(x) \longrightarrow U \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x) U^{-1}, \quad U = e^{i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (12.8)$$

und diese Symmetrie kann durch Einführung eines Eichfeldes lokal gemacht werden. Im chiralen Limes  $m = 0$  hat sie zusätzlich eine *chirale Symmetrie*,

$$\psi(x) \longrightarrow e^{\gamma_5 \alpha} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x) e^{\alpha \gamma_5}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (12.9)$$

Hier ist  $\gamma_5$  die mit allen  $\gamma^\mu$  antivertauschende und hermitesche Matrix

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5^\dagger, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (12.10)$$

Man beachte, dass im euklidischen Raum die chiralen Transformationen die *nicht-kompakte* Gruppe  $\mathbb{R}$  bilden, im Gegensatz zur Situation in der Minkowski-Raumzeit, wo sie die kompakte Gruppe  $U(1)$  bilden.

## 12.1 Grassmann Variablen

Wir kehren nochmals kurz zu den Skalarfeldern zurück. Klassische bosonische Felder sind gewöhnliche kommutierende Funktionen,

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad (12.11)$$

und diese Eigenschaft kann als  $\hbar \rightarrow 0$  Grenzfall der Kommutationsregeln für die Quantenfelder angesehen werden. Die Fermi-Statistik impliziert, dass fermionische Quantenfelder zu gleichen Zeiten antikommutieren,

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})\} = 0.$$

Dies motiviert die Betrachtung eines klassischen Grenzfalles, in dem die Fermi-Felder antikommutieren,

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0, \quad \forall x, y. \quad (12.12)$$

Es ist deshalb naheliegend, „klassische Fermi-Felder“ als antikommutierende Variablen, sogenannte Grassmann-Variablen, anzusehen. Dieses heuristische Argument kann im Rahmen der Pfadintegral-Darstellung für fermionischen Systeme gezeigt werden. Hier verweise ich auf die Literatur [17, 24].

Ein komplexe Grassmann-Algebra wird von Elementen  $\eta_i$  und  $\bar{\eta}_i$  aufgespannt, die

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\} = \{\eta_i, \bar{\eta}_j\} = 0 \quad (12.13)$$

erfüllen. Eine Integration über Grassmann Variablen hat die Eigenschaft

$$\int d\eta_i (a + b\eta_i) = b \quad (12.14)$$

für beliebige komplexe Zahlen  $a, b$ . In der Quantenfeldtheorie treten oft Gauß'sche Integrale der Form

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\bar{\eta} A \eta}, \quad \bar{\eta} A \eta = \sum_{ij} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \quad (12.15)$$

auf, wobei über alle Grassmann-Variablen integriert wird

$$\mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta = \prod d\bar{\eta}_i d\eta_i. \quad (12.16)$$

Zur Berechnung des Integrals (12.15) entwickeln wir die Exponentialfunktion. Der einzige

nichtverschwindende Beitrag ist

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n!} \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta (\bar{\eta} A \eta)^n &= (-1)^n \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \sum_{i_1, \dots, i_n} (\bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1}) \cdots (\bar{\eta}_n A_{ni_n} \eta_{i_n}) \\
&= (-1)^n \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \prod_i (\bar{\eta}_i \eta_i) \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} A_{1i_1} \cdots A_{ni_n} \\
&= \int \prod_i (d\bar{\eta}_i \bar{\eta}_i d\eta_i \eta_i) \det A = \det A
\end{aligned}$$

und wir finden die einfache Formel

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\bar{\eta} A \eta} = \det A \quad (12.17)$$

Nun betrachten wir ein allgemeines Gauß'sches Integral der Form

$$Z(\bar{\alpha}, \alpha) = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\bar{\eta} A \eta + \bar{\alpha} \eta + \bar{\eta} \alpha}, \quad (12.18)$$

wobei die Quellen  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$  zwei Tupel von Grassmannwertigen Variablen sind und  $\bar{\eta} \alpha = \sum \bar{\alpha}_i \eta_i$  bezeichnet. Verschieben wir die Integrationsvariablen  $\bar{\eta}_i$  und  $\eta_i$  gemäß

$$\eta \rightarrow \eta + A^{-1} \alpha \quad \text{und} \quad \bar{\eta} \rightarrow \bar{\eta} + \bar{\alpha} A^{-1}$$

und berücksichtigen die Translationsinvarianz der Grassmann-Integration, dann finden wir folgende Verallgemeinerung von (12.17)

$$Z(\bar{\alpha}, \alpha) = \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\bar{\eta} A \eta + \bar{\alpha} \eta + \bar{\eta} \alpha} = e^{\bar{\alpha} A^{-1} \alpha} \det A. \quad (12.19)$$

Entwickelt man beide Seiten in Potenzen von  $\bar{\alpha}$  und  $\alpha$  dann gewinnen wir insbesondere die nützliche Formel

$$\langle \bar{\eta}_i \eta_j \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta e^{-\bar{\eta} A \eta} \bar{\eta}_i \eta_j = (A^{-1})_{ij}. \quad (12.20)$$

Die Erwartungswerte von Produkten mit einer ungleichen Anzahl  $\bar{\eta}$  und  $\eta$  verschwinden,

$$\langle \bar{\eta}_{i_1} \cdots \bar{\eta}_{i_n} \eta_{j_1} \cdots \eta_{j_m} \rangle = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n. \quad (12.21)$$

Nach diesen algebraischen Vorbetrachtungen kehren wir zur Feldtheorie zurück. Fermionische Felder ordnen jedem Raumzeit-Punkt Grassmann-Variablen zu. Für ein Dirac-

Feld in 4 Dimensionen sind dies die 8 antikommutierende Variablen  $\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x)$ , da der Spinorindex  $\alpha$  die Werte 1, 2, 3, 4 annimmt. Das „klassische“ Dirac-Feld erfüllt

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0. \quad (12.22)$$

Im fermionischen Pfadintegral wird über fermionische und anti-fermionische Feldkonfigurationen integriert. Wir schreiben kurz

$$\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \equiv \prod_x \prod_\alpha d\psi_\alpha(x) d\bar{\psi}_\alpha(x). \quad (12.23)$$

Eine fermionische Greenfunktion ist durch ein Funktionalintegral gegeben,

$$\langle 0|\hat{A}|0\rangle = \frac{1}{Z_F} \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} A e^{S_F}, \quad \text{mit} \quad Z_F = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} e^{S_F}, \quad (12.24)$$

und Wirkung  $S_F$  für die Fermionen. Für das freie Dirac-Feld ist

$$S_F = \int d^d x \bar{\psi}(x) D\psi(x). \quad (12.25)$$

In fast allen physikalisch interessanten Theorien ist  $S_F$  bilinear in den fermionischen Feldern<sup>1</sup>. Mit den Regeln für Grassmann-Integrale folgt, dass für bilineare Wirkungen das Funktionalintegral formal einfach zu berechnen ist,

$$Z_F = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\int d^d x \bar{\psi}(x) D\psi(x)\right) = \det D. \quad (12.26)$$

Dies ist die allgegenwärtige fermionische Determinante in Feldtheorien mit Fermionen, zum Beispiel im Standardmodell der Teilchenphysik oder vielen supersymmetrischen Feldtheorien. Die entsprechende Formel für komplexe Skalarfelder lautet

$$\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\int d^d x \bar{\phi}(x) A\phi(x)} = \frac{1}{\det A}. \quad (12.27)$$

Man erhält die inverse Determinante. Formuliert man die Theorie auf einem Raumzeitgitter, dann ist man mit der Berechnung der Determinante oder dem Inversen der typisch riesigen Matrix  $D$  konfrontiert.

<sup>1</sup>Ausnahmen sind *Thirring-, Gross-Neveu- oder Supergravitations-Modelle*.

## 12.2 Spinorfelder auf dem Gitter

Im Folgenden sollen Gitterversionen für Theorien der Spin-1/2 Felder konstruiert werden. Man findet auf natürliche Art eine Gitterversion der Kontinuumswirkung, wenn man Differentiale durch Differenzen ersetzt. Alle Längen und Parameter werden in Einheiten der Gitterlänge  $a$  gemessen. Es bezeichne  $e_\mu$  den Vektor in Richtung  $\mu$ .

### 12.2.1 Gitterableitungen

Die Wahl der Diskretisierung von Differentialoperatoren ist für Theorien mit Fermionen ein delikates Problem, da die Feldgleichungen Differentialoperatoren erster Ordnung enthalten. Für einen Operator  $D$  erster Ordnung  $D$  hängt die Greenfunktion

$$S_D(x-y) = \langle x | \frac{1}{D} | y \rangle \quad (12.28)$$

auch für sehr grosse Gitter von der gewählten Diskretisierung ab.

#### Vorwärts- und Rückwärtsableitung

Die oft gebrauchten nächste-Nachbarn Vorwärts- und Rückwärtsableitungen

$$(\partial_\mu f)(x) = f(x + e_\mu) - f(x) \quad , \quad (\partial_\mu^* f)(x) = f(x) - f(x - e_\mu) \quad (12.29)$$

auf dem Gitter mit Gitterkonstanten  $a$  sind zwar nicht hermitesch bezüglich des Skalarproduktes  $(f, g) = \sum_{x \in \Lambda} \bar{f}(x)g(x)$ , aber es gilt für periodische Randbedingungen

$$(f, \partial_\mu g) = -(\partial_\mu^* f, g). \quad (12.30)$$

Die Ableitungen definieren *zirkulante Matrizen*, d.h. spezielle Toeplitz-Matrizen, bei denen jeder Zeilenvektor relativ zum darüberliegenden Zeilenvektor um einen Eintrag nach rechts verschoben ist, und zirkulante Matrizen vertauschen miteinander,

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = [\partial_\mu^*, \partial_\nu^*] = [\partial_\mu, \partial_\nu^*] = 0. \quad (12.31)$$

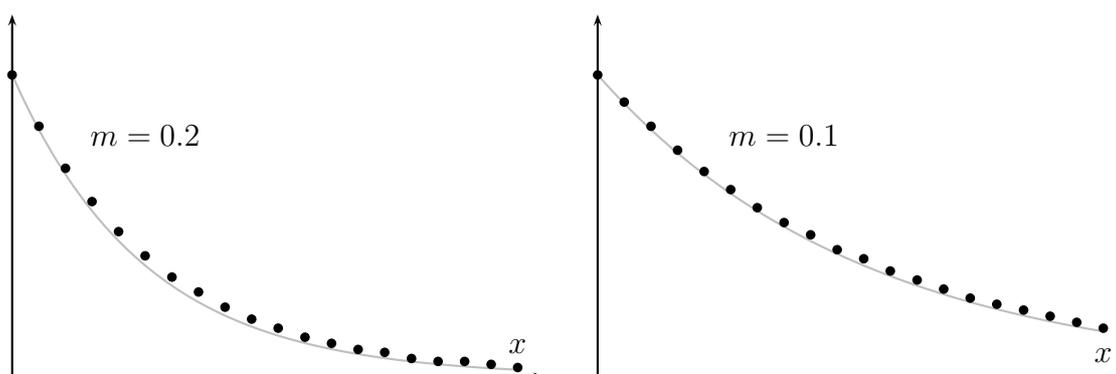
Die  $\varphi_p$  in (5.69) sind gleichzeitig Eigenfunktionen aller Ableitungsoperatoren,

$$\partial_\mu \varphi_p = i\hat{p}_\mu e^{ip_\mu/2} \varphi_p \quad \text{und} \quad \partial_\mu^* \varphi_p = i\hat{p}_\mu e^{-ip_\mu/2} \varphi_p, \quad \hat{p}_\mu = 2 \sin \frac{p_\mu}{2}. \quad (12.32)$$

Deshalb hat die Greenfunktion von  $\partial + m$  auf dem *eindimensionalen* Gitter die Form

$$\langle x | \frac{1}{\partial + m} | 0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_p \frac{e^{ipx}}{m + ie^{ip/2} \hat{p}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp \frac{e^{ipx}}{m + ie^{ip/2} \hat{p}}. \quad (12.33)$$

Der reelle Propagator wird für Korrelationslängen  $\xi > 5$  oder Massen  $m < 0.2$  auf dem ganzen Gitter durch die Exponentialfunktion gut gefittet. In der folgenden Abbildung ist er für 20 Gitterpunkte geplottet.



### Antisymmetrische Ableitung

Anstelle der Links- und Rechtsableitungen wird auch die *antisymmetrische* Diskretisierung von  $\partial_\mu$  benutzt,

$$\partial_\mu^A = \frac{1}{2} (\partial_\mu + \partial_\mu^*) \implies (\partial_\mu^A f)(x) = \frac{1}{2} (f(x + e_\mu) - f(x - e_\mu)). \quad (12.34)$$

Diese *naive Gitterableitung* ist antisymmetrisch und ihre Komponenten kommutieren,

$$(f, \partial_\mu^A g) = -(\partial_\mu^A f, g) \quad \text{und} \quad [\partial_\mu^A, \partial_\nu^A] = 0. \quad (12.35)$$

Die  $\partial_\mu^A$  können also gleichzeitig diagonalisiert werden und die ebenen Wellen

$$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ipx}, \quad p_\mu = \frac{2\pi}{N} n_\mu, \quad n_\mu \in \mathbb{Z}_N \quad (12.36)$$

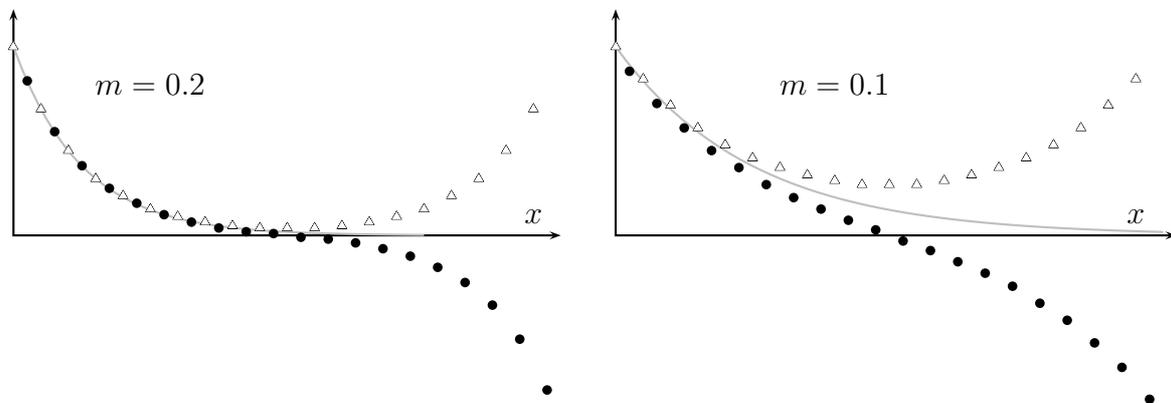
sind ihre Eigenfunktionen,

$$\partial_\mu^A \varphi_p(x) = i \hat{p}_\mu \varphi_p(x), \quad \hat{p}_\mu = \sin p_\mu. \quad (12.37)$$

Auf dem eindimensionalen Gitter findet man die Greenfunktion

$$\langle x | \frac{1}{\partial^A + m} | 0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_p \frac{e^{ipx}}{m + i\hat{p}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx}}{m + i\hat{p}} \quad (12.38)$$

Für ein Gitter mit 40 Punkten ist der Propagator für zwei Massen in den beiden folgenden Abbildungen gezeigt. Eingeschränkt auf die (un)geraden Gitterpunkte definiert er eine (un)gerade Gitterfunktion. Für  $x \rightarrow 0$  nähern sich die beiden Funktionen, während sie für  $x \rightarrow N$  entgegengesetztes Vorzeichen haben. Als Folge oszilliert der Propagator für  $x \rightarrow N$  mit grosser Amplitude um den Wert 0.



Für  $x \ll N$  und  $5 \ll \xi \ll N/2$  approximiert die ebenfalls geplottete Exponentialfunktion  $\exp(-mx)$  die Greenfunktion sehr gut.

### Slac-Ableitung

Die Einführung dieser interessanten Gitterableitung benötigt etwas mehr Vorarbeit. Wir führen äquidistanten Stützstellen auf einem eindimensionalen Gitter mit  $N$  Gitterpunkten<sup>2</sup>

$$x_k = x_0 + k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (12.39)$$

ein und wählen periodische Randbedingungen, d.h.  $x_k$  und  $x_{N+k}$  werden identifiziert. Die Menge der Gitterfunktionen  $x_k \rightarrow \psi_k \in \mathbb{C}$ , versehen mit dem Skalarprodukt,

$$(\phi, \psi) = \sum_{k=1}^N \bar{\phi}_k \psi_k, \quad (12.40)$$

<sup>2</sup>Wir folgen hier teilweise der Vorlesung *Computational Physics I* von U. Wolf.

definieren den Hilbertraum  $\mathbb{C}^N$ . Eine Gitterfunktion kann als Wellenfunktion eines Partikels auf dem Gitter aufgefasst werden. Für ein auf Eins normiertes  $\psi$  interpretieren wir  $|\psi_k|^2$  als Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen am Gitterpunkt  $x_k$  zu finden. Entsprechend ist der Erwartungswert des Ortsoperators

$$\langle \hat{x} \rangle_\psi = \langle \bar{\psi} | \hat{x} | \psi \rangle = \sum x_k |\psi_k|^2 \equiv \sum_{kk'} \bar{\psi}_k x_{kk'} \psi_{k'}. \quad (12.41)$$

Wie erwartet ist der Ortsoperator in der Ortsdarstellung diagonal,

$$x_{kk'} = x_k \delta_{kk'}, \quad (12.42)$$

und die Matrixelemente von  $\hat{x}$  verschwinden für  $k \neq k'$ . Um zu einer Darstellung des Impulsoperators zu gelangen, wechseln mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation in den Impulsraum mit Wellenfunktionen  $\tilde{\psi}(p_\ell) \equiv \tilde{\psi}_\ell$  wie folgt

$$\tilde{\psi}_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-ip_\ell x_k} \psi_k, \quad p_\ell = \frac{2\pi}{N} (\ell - \alpha), \quad \ell = 1, 2, \dots, N. \quad (12.43)$$

Die Verschiebung  $\alpha$  wird später so gewählt, dass die Eigenwerte des Impulsoperators in Paaren  $(p, -p)$  auftreten. Für periodische Felder muss  $\alpha$  eine ganze Zahl sein. Die Rücktransformation lautet

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N e^{ip_\ell x_k} \tilde{\psi}_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (12.44)$$

Mit  $\psi$  ist auch  $\tilde{\psi}$  auf Eins normiert und wir können  $|\tilde{\psi}_\ell|^2$  als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Impulses  $p_\ell$  interpretieren. Dann ergibt sich für den Mittelwert von  $f(p)$

$$\begin{aligned} \langle f(\hat{p}) \rangle_\psi &= \sum_\ell f(p_\ell) |\tilde{\psi}_\ell|^2 = \frac{1}{N} \sum_\ell \sum_{kk'} e^{ip_\ell (x_k - x_{k'})} f(p_\ell) \bar{\psi}_k \psi_{k'} \\ &= \sum_{kk'} \bar{\psi}_k f(p)_{kk'} \psi_{k'}, \quad f(p)_{kk'} = \frac{1}{N} \sum_\ell e^{ip_\ell (x_k - x_{k'})} f(p_\ell). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Wie erwartet hat der Operator  $f(p)$  in der Ortsdarstellung nicht-diagonale Matrixelemente  $f(p)_{kk'}$ . Mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$Z(x) = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N e^{iNp_\ell x} = e^{i\pi\beta x} \frac{\sin \pi N x}{N \sin \pi x}, \quad \beta = 1 + N - 2\alpha, \quad (12.46)$$

erhält man die Matrixelemente von  $f(\hat{p})$  durch Ableiten nach  $x$ ,

$$f(p)_{kk'} = f\left(\frac{1}{iN} \frac{d}{dx}\right) Z(x) \Big|_{x=(k-k')/N} \quad (12.47)$$

Man findet für den Impulsoperator

$$p_{kk} = \frac{\pi\beta}{N}, \quad p_{k \neq k'} = \frac{\pi}{iN} (-)^{k-k'} \frac{e^{i\beta t_{kk'}}}{\sin t_{kk'}}, \quad t_{kk'} = \pi \frac{(k-k')}{N}. \quad (12.48)$$

Wählen wir  $2\alpha = 1 + N$ , dann verschwindet  $\beta$  und das Impulsspektrum liegt symmetrisch zum Ursprung. Für eine ungerade Anzahl Gitterpunkte entspricht dies *periodischen* und für ein gerade Anzahl Gitterpunkten *antiperiodischen Randbedingungen*. Die Matrixelemente des Impulsoperators sind reell und haben die einfache Form

$$p_{kk} = 0, \quad p_{k \neq k'} = \frac{\pi}{iN} (-)^{k-k'} \frac{1}{\sin t_{kk'}} \quad (\beta = 0), \quad (12.49)$$

Die Wahl  $2\alpha = N$  oder  $\beta = 1$  entspricht periodischen Randbedingungen für gerades  $N$  und antiperiodischen Randbedingungen für ungerades  $N$ . Das Spektrum des Impulses ist nicht symmetrisch zum Ursprung und die Matrixelemente sind komplex

$$p_{kk} = \frac{\pi}{N}, \quad p_{k \neq k'} = \frac{\pi}{iN} (-)^{k-k'} \frac{e^{it_{kk'}}}{\sin t_{kk'}} \quad (\beta = 1). \quad (12.50)$$

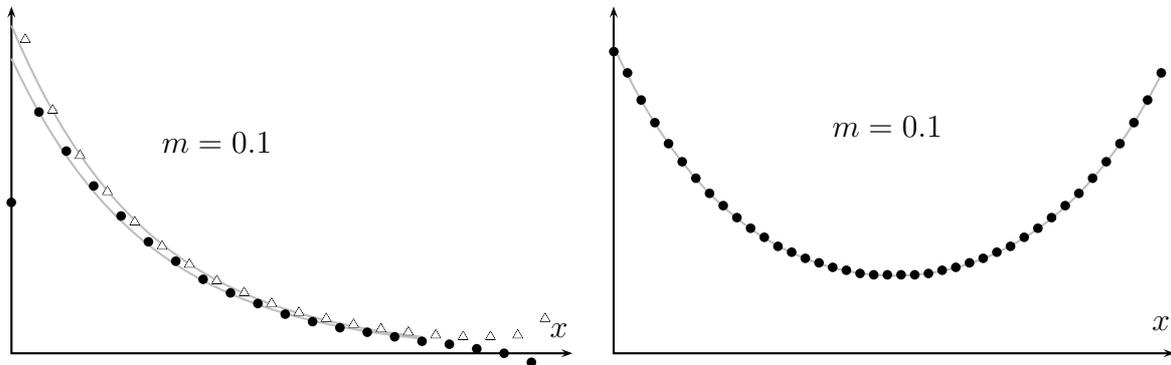
In der folgenden Abbildung sind die Greenfunktionen

$$\langle x | \frac{1}{m + \partial_{\text{slac}}} | 0 \rangle \quad \text{und} \quad \langle x | \frac{1}{m^2 - \partial_{\text{slac}}^2} | 0 \rangle, \quad (\partial_{\text{slac}})_{kk'} = ip_{kk'}, \quad (12.51)$$

geplottet. Wir beobachten hier das bekannte *Gibbs-Phenomen*, da in der Nähe der Sprungstelle bei  $x = 0$  die Amplitude der Greenfunktion ausschlägt. Deshalb wurden die beiden exponentiellen Fitfunktionen mit Masse  $m$  so normiert, dass sie für  $x = 2$  beziehungsweise für  $x = 3$  mit dem Propagator übereinstimmen. Der Propagator von  $m^2 + \partial_{\text{slac}}^2$  wird mit

$$\langle x | \frac{1}{m^2 - \partial_{\text{slac}}^2} | 0 \rangle \sim \text{const} (e^{-mx} + e^{-m(N-x)})$$

sehr gut gefittet. Die Werte sind für ein Gitter mit 41 Punkten berechnet.



### 12.2.2 Naive Fermionen auf dem Gitter

Im Folgenden diskutieren wir mehrere Vorschläge, wie man Fermionen auf ein Raumzeit-Gitter „setzen“ kann. Ersetzen wir die Kontinuumsableitung  $\partial_\mu$  (12.6) durch die Vorwärts- oder Rückwärtsableitung auf dem Gitter, dann finden wir folgende Wirkung für *Dirac-Spinoren* auf dem endlichen Raumzeitgitter,

$$S_{n,F} = \sum_x \bar{\psi}(x)(\overset{\circ}{D}\psi)(x), \quad \overset{\circ}{D} = \gamma^\mu \partial_\mu^A + m. \tag{12.52}$$

Mit der antisymmetrischen Ableitung (12.34) hat man allerdings ein Verdopplungsproblem. Um dies einzusehen, berechnen wir das Spektrum und die Eigenfunktionen von  $\gamma^\mu \partial_\mu^A$  und die Zweipunktsfunktion

$$\langle \psi(x)\bar{\psi}(y) \rangle = S(x,y) = \langle x | \frac{1}{\overset{\circ}{D}} | y \rangle. \tag{12.53}$$

Der nicht-negative Laplace-Operator  $\overset{\circ}{\Delta} = \partial_\mu^A \partial_\mu^A$  in

$$\overset{\circ}{D}\overset{\circ}{D}^\dagger = (\gamma^\mu \partial_\mu^A + m)(-\gamma^\mu \partial_\mu^A + m) = \left(-\overset{\circ}{\Delta} + m^2\right) \mathbb{1} \tag{12.54}$$

verbindet nur übernächste Nachbarn,

$$(\overset{\circ}{\Delta}f)(x) = \frac{1}{4} \sum_\mu (f(x + 2e_\mu) - 2f(x) + f(x - 2e_\mu)) \tag{12.55}$$

und hat die Eigenwerte

$$\overset{\circ}{p}^2 \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{p}_\mu = \sin(p_\mu). \tag{12.56}$$

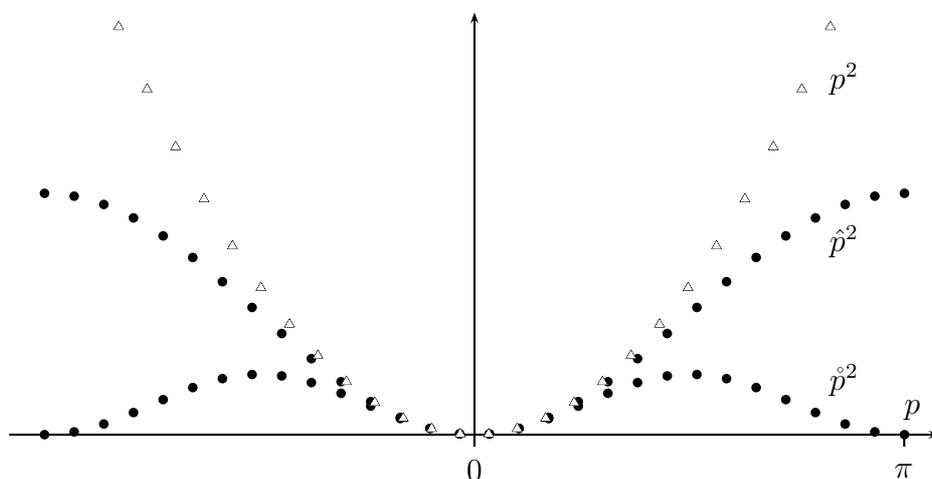
Genau diese Eigenschaft ist aber für das *Verdopplungsproblem* verantwortlich. Um dies zu sehen, sollte man mit der üblichen Diskretisierung des Laplace-Operators,

$$(\Delta f)(x) = (\partial_\mu^* \partial_\mu f)(x) = \sum_\mu (f(x + e_\mu) - 2f(x) + f(x - e_\mu)), \quad (12.57)$$

die nur nächste Nachbarn verbindet, vergleichen. Der Operator  $-\Delta$  hat die Eigenwerte

$$\hat{p}^2 \quad \text{mit} \quad \hat{p}_\mu = 2 \sin\left(\frac{p_\mu}{2}\right). \quad (12.58)$$

In der folgenden Abbildung werden die Dispersionsrelationen (12.56,12.58) verglichen.



Ebenfalls gezeigt ist die Dispersionsrelation

$$p \longrightarrow p^2, \quad p \in \frac{2\pi}{N} \mathbb{Z}_N$$

des eindimensionalen Kontinuum-Operators auf dem Intervall der „Länge“  $N$ . Für kleine  $p$  streben die Eigenwerte beider Gitteroperatoren gegen die Kontinuumswerte  $p^2$ . Aber während  $\Delta$  genauso wie der Kontinuumsoperator nur die konstante Nullmode hat, besitzt  $\hat{\Delta}$  für gerades  $N$  genau  $2^d$  Nullmoden. Diese haben die Form (5.69) mit

$$p = (p_1, \dots, p_d) \quad \text{und} \quad p_\mu \in \{0, \pi\}. \quad (12.59)$$

Für ungerades  $N$  gibt es streng genommen nur eine Nullmode. Aber im thermodynamischen Limes hat die Dispersionsrelation (12.56) genau  $2^d$  verschiedene Nullstellen in der ersten *Brilloinzone*  $[0, 2\pi)^d$ .

Jede Eigenfunktion  $\varphi_p$  von  $\mathring{\Delta}$  definiert (in 4 Dimensionen) je zwei Eigenfunktionen des naiven Dirac-Operators  $\mathring{D}$  mit Eigenwerten

$$\mathring{\lambda}_p = m + i|\mathring{p}| \quad \text{und} \quad \mathring{\lambda}_p = m - i|\mathring{p}|. \quad (12.60)$$

Sind  $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(4)}$  konstante Elemente im  $\mathbb{C}^4$ , dann haben diese (unnormierten) Eigenfunktionen die Form

$$\psi_p^{(\alpha)} = (i|\mathring{p}| \pm \gamma^\mu \mathring{\partial}_\mu^A) \varphi_p(x) \chi^{(\alpha)} = i(|\mathring{p}| \pm \gamma^\mu \mathring{p}_\mu) \varphi_p(x) \chi^{(\alpha)}. \quad (12.61)$$

Hat  $\psi_p^{(\alpha)}$  den Eigenwert  $\mathring{\lambda}_p$ , dann hat  $\gamma_5 \psi_p^{(\alpha)}$  den komplex konjugierten Eigenwert. Die Eigenwerte des naiven Dirac-Operators  $\mathring{D}$  in (12.52) haben alle den gleichen Realteil,

$$\sigma(\mathring{D}) = \{m \pm i|\mathring{p}|\}. \quad (12.62)$$

Die Greenfunktion von  $\mathring{D}\mathring{D}^\dagger$  hat die endliche Reihendarstellung

$$\langle x | \frac{1}{\mathring{D}\mathring{D}^\dagger} | y \rangle = \frac{\mathbb{1}_4}{V} \sum_p \frac{e^{ip(x-y)}}{\mathring{p}^2 + m^2}, \quad (12.63)$$

und entsprechend lautet die Zweipunktfunktion (12.53)

$$\langle x | \frac{1}{\mathring{D}} | y \rangle = \mathring{D}_x^\dagger \langle x | \frac{1}{\mathring{D}\mathring{D}^\dagger} | y \rangle = \frac{1}{V} \sum_p \frac{-i\gamma^\mu \mathring{p}_\mu + m}{\mathring{p}^2 + m^2} e^{ip(x-y)}. \quad (12.64)$$

Im thermodynamischen Limes wird die Summe über  $p$  zu einem Riemann-Integral über die erste Brillouinzone,

$$\langle x | \frac{1}{\mathring{D}} | y \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B d^4 p \frac{\gamma^\mu \mathring{p}_\mu + m}{\mathring{p}^2 + m^2} e^{ip(x-y)} \quad (12.65)$$

Die naive Diskretisierung der Kontinuumstheorie führt zu einer Gittertheorie mit überzähligen Freiheitsgraden bei niedrigen Energien.

Eine zweite naive Diskretisierung beruht auf der Vorwärtsableitung

$$\hat{D} = \gamma^\mu \partial_\mu + m. \quad (12.66)$$

Diese Implementierung verletzt aber die hyperkubische Symmetrie. Diese Symmetrie wird aber gebraucht, um im Infraroten die  $O(4)$ -Symmetrie wiederherzustellen. Weiterhin wird die Reflektions-Hermizität (das euklidische Gegenstück zur Hermizität in der Minkowski-Raumzeit) verletzt und die Theorie in der Minkowski-Raumzeit wird nicht unitär sein.

### 12.2.3 Wilson-Fermionen

Es gibt mehrere Auswege, diese Verdopplung der Fermionen zu verhindern. Die Vorschläge in [64] vermeiden die Verdopplung, verletzen aber die chirale Symmetrie für masselose Fermionen. Die auf der Slac-Ableitung beruhende Methode in [66] vermeidet ebenfalls das Verdopplungsproblem und respektiert darüberhinaus die chirale Symmetrie. Sie hat allerdings für an Eichfelder koppelnde Fermionen Probleme mit den Ward-Identitäten im schwachen Kopplungslimes und für kleine Gitterkonstanten [67].

Das Verdopplungsproblem war WILSON bereits in den Anfangsjahren der Gittereichtheorien bekannt. Er schlug eine modifizierte Wirkung für Fermionen vor, um die Verdopplung im Kontinuumsimes loszuwerden. Er addierte einen Term<sup>3</sup> zur naiven Wirkung

$$S_{w,F} = S_{n,F} - \frac{r}{2} \sum_x \bar{\psi}(x)(a\Delta\psi)(x) = \sum_x \bar{\psi}(x) (D_w\psi)(x), \quad (12.67)$$

wobei der *Wilson-Parameter*  $r$  in

$$D_w = \mathring{D} - \frac{ar}{2}\Delta \quad (12.68)$$

im Intervall  $(0, 1]$  liegt. Der Operator  $D_w$  ist *normal*,  $[D_w, D_w^\dagger] = 0$  und hat die Eigenwerte

$$\lambda_{w,p} = \left(m + \frac{ar}{2}\hat{p}^2\right) \pm i|\hat{p}| \quad \text{mit} \quad \hat{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right), \quad \mathring{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu) \quad (12.69)$$

Dabei treten jeweils beide Vorzeichen beim Wurzel ziehen auf. Wir nehmen vorerst an, die Gitterkonstante sei  $a = 1$ .

Um die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene zu berechnen, setzen wir

$$t_i = -\cos p_i \in [-1, 1]. \quad (12.70)$$

Die Kanten des von den Koordinaten  $t_i$  aufgespannten Würfels werden auf  $d$  sich auf der reellen Achse berührende Ellipsen mit Halbachsen  $A = r$ ,  $B = 1$  und den Mittelpunkten

$$(m+r, 0), (m+3r, 0), \dots, (m+2d-1, 0) \quad (12.71)$$

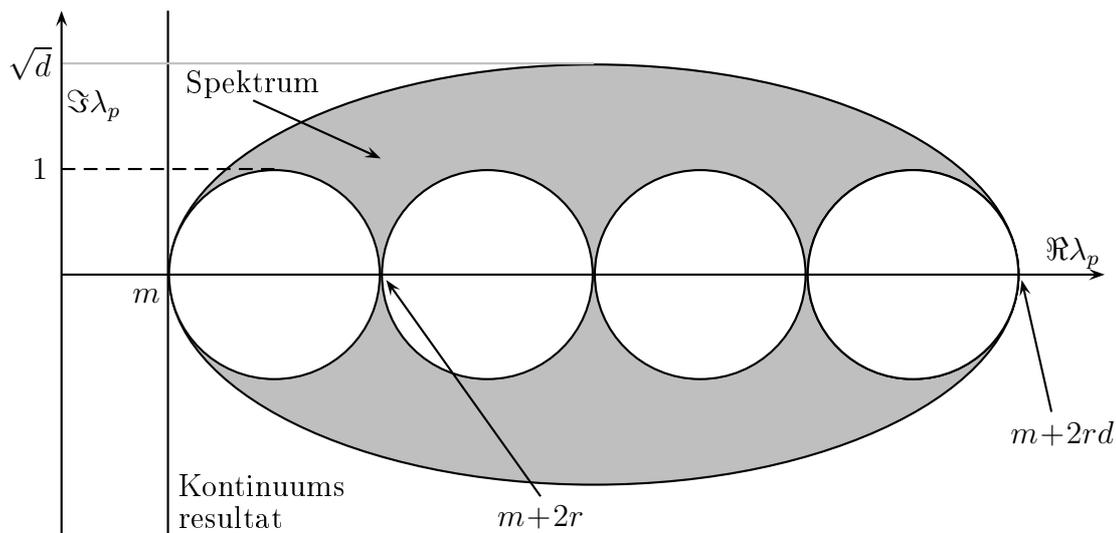
abgebildet. Diese Schleifen bilden den inneren Rand des Spektrums von  $D_w$ . Alle Punkte des Würfels mit gleichen Koordinaten  $t_1 = \dots = t_d = t$  werden auf eine diese  $d$  Ellipsen *umschliessende* Ellipse mit Halbachsen  $A = rd$ ,  $B = \sqrt{d}$  und dem Mittelpunkt  $(0, m+rd)$  abgebildet. Die grosse Ellipse schliesst das Spektrum ein. Alle Ellipsen liegen spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

In der folgenden Abbildung findet man die Eigenwerte des 4-dimensionalen Dirac-

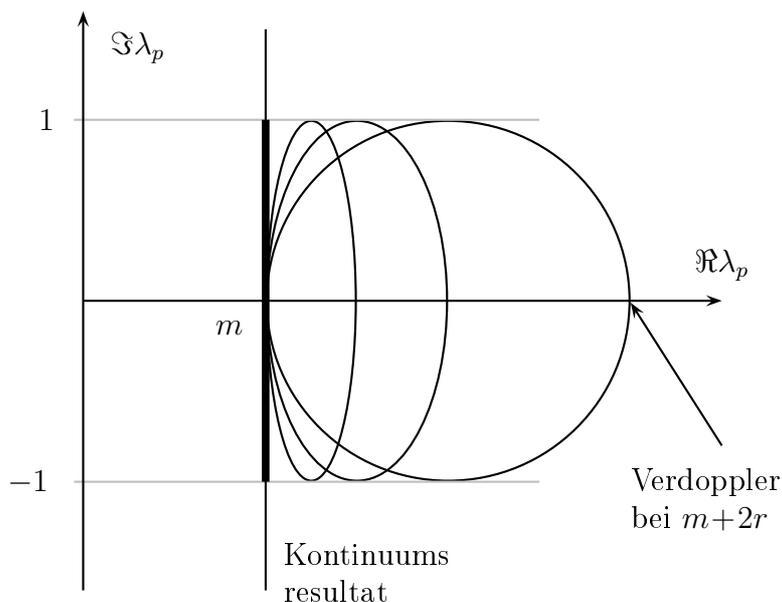
---

<sup>3</sup>Er wird heute *Wilson-Term* genannt.

Operators für Wilson-Fermionen mit  $r = 1$  und für  $N = \infty$ . Für  $r \rightarrow 0$  geht die Menge der Eigenwerte (das graue Gebiet) über in die Gerade mit Realteil  $m$ , also in das Spektrum des Kontinuums-Operators im thermodynamischen Grenzfall. Für  $m = 0$  und  $r \rightarrow 0$  streben die Eigenwerte bei  $0, 2r, 4r, \dots$  alle gegen den Eigenwert Null und wir finden wieder die ungeliebten Verdoppler des naiven Operators  $\hat{D}$ .



In *einer Dimension* gibt es nur eine innere Ellipse, die mit der äusseren zusammenfällt. Alle Eigenwerte liegen dann auf der Ellipse  $m + r(1 + t) \pm i\sqrt{1 - t^2}$ ,  $t \in [-1, 1]$  mit den Halbachsen  $r$  und  $1$ ,



Für  $r = 1$  findet man den Rückwärtsableitung, für  $r = -1$  die Vorwärtsableitung und für  $r = 0$  die antisymmetrische Gitterableitung. Strebt  $r$  gegen Null, dann wandern alle Eigenwerte auf das Intervall  $m + i[-1, 1]$ . Der Zustand mit Eigenwert  $m + 2r$  „verdoppelt“ denjenigen mit Eigenwert  $m$ . Für  $r > 0$  wirkt der Wilson-Term in (12.68) wie eine impulsabhängige Masse und selbst für  $m = 0$  anti-vertauscht  $D_w$  nicht mit  $\gamma_5$ . Die *Chiralität* wird durch den Wilson-Term explizit *gebrochen*. Für das freie Dirac-Feld wird die Symmetrie im Kontinuumslimit wieder hergestellt.

Wir studieren den naiven Kontinuumslimit des Wilson-Operators. Dazu werden Impulse und die Masse mit der Gitterkonstante  $a$  reskaliert. Insbesondere sind  $\hat{p}_\mu$  und  $\hat{p}_\mu$  die in (12.69) definierten Gitterfunktionen. Die Eigenwerte von  $D_w$  sind dann

$$\lambda_{w,p} = m + \frac{ar}{2} \hat{p}^2 \pm i|\hat{p}| = m \pm i|p| + \frac{1}{2} ar p^2 + O(a^2). \quad (12.72)$$

Sie liegen zwischen der äusseren Ellipse mit Mittelpunkt und Halbachsen

$$x_0 = m + \frac{1}{a} rd, \quad \text{und} \quad (A, B) = \frac{1}{a} (rd, \sqrt{d})$$

und den  $d$  inneren Ellipsen mit

$$x_{0k} = m + \frac{1}{a} rk \quad \text{und} \quad (A, B) = \frac{1}{a} (r, 1), \quad k = 1, \dots, d.$$

Wie erwartet geht im Limes  $a \rightarrow 0$  das Spektrum in das Kontinuumspektrum über.

## 12.3 Das Nielsen-Ninomiya Theorem

Keine der vorgeschlagenen Fermionen auf dem Gitter, weder naive, staggered oder Wilson-Fermionen sind ohne Probleme. Die ersten beiden haben das Veropplungsproblem, und die letzten brechen die chirale Symmetrie. Eine beliebige bilineare Wirkung für Spin- $\frac{1}{2}$  Fermionen auf dem Raumzeit-Gitter hat die Form

$$S = \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) M(x,y) \psi(y), \quad (12.73)$$

wobei wegen der Translationsinvarianz der Dirac-Operator nur von  $x - y$  abhängt,

$$M(x,y) = D(x-y), \quad (12.74)$$

Es stellt sich nun die Frage, warum die Diskretisierung von Fermionen ohne Verdoppler und ohne Brechung der chiralen Symmetrie so schwierig ist. Die Antwort gibt das bekannte

No-go Theorem von NIELSEN und NINOMIYA welches besagt, dass es keine lokale, chiral invariante, verdopplungsfreie und translationsinvariante bilineare Fermionwirkung auf dem Gitter gibt [68]. Man findet die gleiche Anzahl rechts- und linkshändiger Fermionen. Etwas präziser besagt das Theorem:

**Satz (Nielsen-Ninomyia)** *Es gibt keinen translationsinvarianten Dirac-Operator der folgende vier Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:*

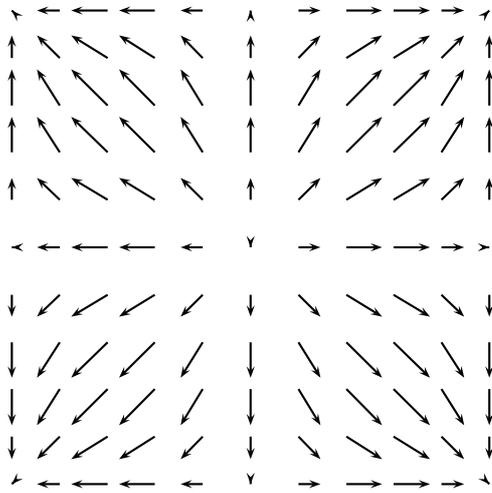
- *Lokalität:*  $D(x - y) \sim e^{-\gamma|x-y|}$ ,
- *Kontinuumsliches:*  $\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{D}(p) = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} p_{\mu}$ ,
- *Keine Verdoppler:*  $\tilde{D}(p)$  ist invertierbar für  $p \neq 0$ ,
- *Chiral:*  $\{\gamma_5, D\} = 0$ .

Die Lokalität bedeutet, dass die Fourier-Transformierte  $\tilde{D}$  von  $D$  eine analytische und periodische Funktion der Impulse  $p_{\mu}$  mit Periode  $2\pi/a$  ist. Die zweite und dritte Forderung sorgen dafür, dass  $D$  den korrekten Kontinuumsliches hat.

In [68] wurde das Theorem mit Argumenten aus der Homotopietheorie und Differentialtopologie bewiesen. Ein eleganter differentialgeometrischer Beweis findet sich in [69]. Wir beweisen das Theorem unter der zusätzlichen und vereinfachenden Annahme [70], dass im Impulsraum

$$\tilde{D}(p) = \sum \gamma^{\mu} \tilde{D}_{\mu}(p) \quad \text{mit} \quad \tilde{D}_{\mu}(p) \in \mathbb{R}. \quad (12.75)$$

Die Funktionen  $\tilde{D}_{\mu}$  sind analytisch und streben für kleine Impulse gegen  $p_{\mu}$ . Da die Brillouinzone die Topologie eines Torus in  $d$  Dimensionen hat, definiert  $\tilde{D}_{\mu}$  ein Vektorfeld auf  $T^d$ . Nun können wir jeder Nullstelle des Vektorfeldes den Index zuordnen. Die Anzahl Nullstellen sei endlich. Nach dem Indextheorem von HOPF und POINCARÉ ist die Summe der Indizes aller Nullstellen auf einer kompakten und orientierten Mannigfaltigkeit gleich der Euler-Charakteristik der Mannigfaltigkeit. Für den  $d$ -dimensionalen Torus verschwindet diese Charakteristik und die Nullstellen von  $\tilde{D}_{\mu}$  treten in Paaren mit entgegengesetztem Index auf. Dies ist der Ursprung der Verdoppler. Anstelle von  $\gamma^{\mu} \tilde{D}_{\mu}$  hätte man in (12.75) auch den Operator  $\frac{1}{2} \gamma^{\mu} (1 + \gamma_*) \tilde{D}_{\mu}$  für Fermionen mit Chiralität  $+1$ , zum Beispiel Neutrinos, wählen können [70].



In der Abbildung links ist das Vektorfeld  $\tilde{D}_\mu(p)$  für den naiven Diracoperator in zwei Dimensionen in der ersten Brillouin-Zone gezeigt. An den Nullstellen  $\mathbf{p} = (0,0)$  und  $(\pi, \pi)$  hat  $\tilde{D}$  den Index 1 und an den Nullstellen  $\mathbf{p} = (0, \pi)$  und  $(\pi, 0)$  den Index  $-1$ . Die Summe der Indexe verschwindet, in Einklang mit dem Theorem von HOPF und POINCARÉ. Man sieht hier sehr schön die Verdopplung bei den Impulsen  $(\pi, 0), (0, \pi)$  und  $(\pi, \pi)$ .

Allgemein ist in der Nähe einer Nullstelle  $p_0$  von  $\tilde{D}_\mu$

$$\tilde{D}_\mu(p) = A_{\mu\nu} (p - p_0)^\nu + \dots, \quad A_{\mu\nu} = \left. \frac{\partial \tilde{D}_\mu}{\partial p_\nu} \right|_{p_0}.$$

Der Index des Vektorfeldes  $\tilde{D}$  bei  $p_0$  ist gleich dem Vorzeichen von  $\det A$ . Ist zum Beispiel  $A$  diagonal bei der Nullstelle  $p_0 = 0$ , dann ist  $\tilde{D}_\mu(p) = A_{\mu} p_\mu + O(p^2)$ . Für  $A = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$  ist der Index 1 und in der Umgebung der Nullstelle ist

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu(p) \psi \approx \bar{\psi} \gamma^\mu p_\mu \psi. \tag{12.76}$$

Das Dirac-Feld  $\psi$  transformiert unter einer chiralen Transformation in  $\exp(\alpha \gamma_5) \psi$ . Ist dagegen  $A = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , so hat das Vektorfeld den Index  $-1$  und die Lagrangedichte in der Nähe der Nullstelle (die wieder bei 0 liege) die Form

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu(p) \psi \approx \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^0 (\gamma^\mu p_\mu) \gamma^0 \gamma_5 \psi \equiv \bar{\chi} \not{p} \chi. \tag{12.77}$$

Jetzt interpretieren wir  $\chi = \gamma^0 \gamma_5 \psi$  als Dirac-Feld, und dieses Feld transformiert unter chiralen Transformationen in  $\exp(-\alpha \gamma_5) \chi$ , also mit der zu  $\psi$  entgegengesetzten Chiralität. Jedem Pol des masselosen Propagators entspricht ein fermionischer Einteilchenzustand. Wir folgern, dass es zu jedem Fermion mit Chiralität  $+1$  ein Fermion mit Chiralität  $-1$  geben muss. Es scheint daher unmöglich, linkshändige Neutrinos auf ein Gitter zu setzen.

## 12.4 Ginsparg-Wilson Relation

Als Konsequenz des *Nielsen-Ninomiya-Theorems* scheint es unmöglich, einen chiral invarianten Dirac-Operator zu konstruieren. In einer in den letzten Jahren vielbeachteten Arbeit untersuchten GINSPARG und WILSON bereits 1982, wie nahe man auf dem Gitter einem chiralen Dirac-Operator kommen kann [71]. Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen war eine invariante Kontinuumtheorie, die sie mit Hilfe einer Blocktransformation mit einer Gittertheorie in Verbindung brachten. Dem Kontinuumsfeld  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^p$  wird über eine Blocktransformation

$$\psi(x) = \int d^4y \alpha(x-y)\phi(y), \quad x \in \Lambda \quad (12.78)$$

ein Gitterfeld zugeordnet. Die genaue Form der Gewichtsfunktion ist hier nicht wichtig. Die Frage war, wie nahe die für  $\psi$  induzierte Gitterwirkung einer chiral invarianten Wirkung kommen kann. GINSPARG und WILSON argumentierten, dass die optimale Wahl auf die sogenannte *Ginsparg-Wilson-Relation*

$$\gamma_5 D + D \gamma_5 = a D \gamma_5 D \quad (12.79)$$

führt. Die Gitterkonstante  $a$  auf der rechten Seite impliziert, dass für „infrarot-Felder“ (oder äquivalent dazu, für genügend kleine  $a$ ) die Relation in die gewünschte Kontinuumsrelation  $\gamma_5 D + D \gamma_5 = 0$  übergeht.

Wir multiplizieren die Relation (12.79) von beiden Seiten mit  $S = D^{-1}$  und finden

$$S \gamma_5 + S \gamma_5 = a \gamma_5 \implies S(x, y) \gamma_5 + S(x, y) \gamma_5 = a \gamma_5 \delta^d(x - y). \quad (12.80)$$

Die Verletzung der chiralen Symmetrie ist für den Propagator ultralokal. Für alle endlichen Abstände finden wir einen Propagator mit exakter chiralen Symmetrie. Es zeigt sich, dass diese Eigenschaft genügt um alle erwünschten Konsequenzen der chiralen Symmetrie, zum Beispiel die Abwesenheit einer additiven Massenrenormierung, auf dem Gitter zu erhalten.

M. LÜSCHER bemerkte, dass die fermionische Wirkung

$$S_F = a^d \sum_x \bar{\psi}(x) D(x - y) \psi(y) \quad (12.81)$$

für jeden Dirac-Operator, der die Ginsparg-Wilson-Relation (12.79) erfüllt, ein kontinuierliche Symmetrie hat, die als Gitterversion der chiralen Symmetrie interpretiert wird [72]. Diese deformierte chirale Symmetrie hat die Form

$$\psi \longrightarrow \psi_\alpha = e^{\alpha \gamma_5 (1 - \frac{a}{2} D)} \psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}_\alpha = \bar{\psi} e^{\alpha (1 - \frac{1}{2} a D) \gamma_5}. \quad (12.82)$$

Wir beweisen, dass  $\bar{\psi}_\alpha D\psi_\alpha$  unabhängig von  $\alpha$  ist,

$$\frac{d}{d\alpha} (\bar{\psi}_\alpha D\psi_\alpha) = \bar{\psi}_\alpha \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}aD\right)\gamma_5 D + D\gamma_5 \left(1 - \frac{1}{2}aD\right) \right\} \psi_\alpha \stackrel{(12.79)}{=} 0.$$

Allerdings ist das fermionische Integrationsmass  $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}$  ist im Allgemeinen nicht invariant unter der Transformation (12.82). Diese Eigenschaft sorgt dafür, dass in Anwesenheit von äusseren Eichfeldern die axiale Anomalie auftritt.

In der Vergangenheit wurden mehrere Familien von Dirac-Operatoren konstruiert, welche die Ginsparg-Wilson-Relation erfüllen. Die bekanntesten sind

- *Domain-Wall Fermionen* [73],
- *Überlapp-Operatoren (overlap-operators)* [74, 77],
- *Fixpunkt-Operatoren* [75],
- *Chiral-verbesserte Operatoren* [76].

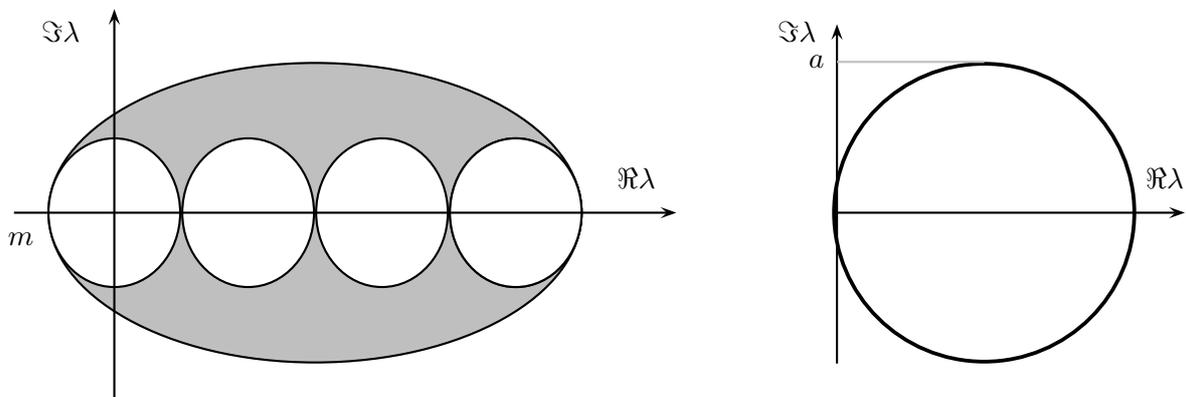
Für drei dieser Vorschläge verweise ich auf die angegebene Literatur. Im Folgenden besprechen wir die Überlapp-Operatoren. Deren Konstruktion geht auf NEUBERGER und NARAYANAN zurück.

### Überlapp-Fermionen

Ein erster Operator der die Ginsparg-Wilson-Bedingung erfüllt, wurde in [74, 77] vorgestellt. Dieser sogenannte „Überlapp-Operator“ hat die Form

$$D_o = \frac{1}{a}(\mathbb{1} + V) \quad \text{mit} \quad V = (D_w D_w^\dagger)^{-1/2} D_w, \quad m < 0, \tag{12.83}$$

wobei  $D_w$  der Wilson-Operator ist. Der Operator  $V$  ist unitär mit Spektrum auf dem Einheitskreis. Entsprechend hat der Überlapp-Operator seine Eigenwerte auf einem die imaginäre Achse am Ursprung berührenden Kreis.



Die linke Seite in der Ginsparg-Wilson-Relation (12.79) ist

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = 2\gamma_5 + \{\gamma_5, V\}.$$

Um die rechte Seite umzuformen, macht man Gebrauch von

$$[D_w, D_w^\dagger] = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_5 D_w = D_w^\dagger \gamma_5 \quad \text{und} \quad [D_w D_w^\dagger, \gamma_5] = 0, \quad (12.84)$$

woraus sich  $V\gamma_5 V = \gamma_5$  ergibt. Deshalb ist

$$D\gamma_5 D = \gamma_5 + \{\gamma_5, V\} + V\gamma_5 V = 2\gamma_5 + \{\gamma_5, V\},$$

was zu beweisen war.

Ein Nachteil des Vorschlags ist das Auftreten des inversen Operators von  $D_w D_w^\dagger$ . Es ist nicht offensichtlich, dass  $D_o$  ein lokaler Operator ist. Man unterscheidet zwischen *ultra-lokalen* Operatoren, für die  $D(x-y)$  für  $|x-y| > \ell$  verschwindet und *lokalen* Operatoren, für die  $D(x-y)$  mit dem Abstand der Gitterpunkte exponentiell schnell gegen Null strebt. Für  $a \rightarrow 0$  werden lokale Operatoren im Kontinuum zu exakt lokalen Operatoren. Um die Lokalität von  $D_o$  zu erkennen, betrachtet man seine Spektraldarstellung. Wegen

$$D_w D_w^\dagger = -\mathring{\Delta} + \left(m - \frac{ar}{2}\mathring{\Delta}\right)^2 \quad (12.85)$$

hat der Überlapp-Operator im Impulsraum die Form

$$a\tilde{D}_o(p) = 1 + \left\{i\gamma^\mu \mathring{p}_\mu + m + \frac{ar}{2}\mathring{p}^2\right\} \left\{\mathring{p}^2 + \left(m + \frac{ar}{2}\mathring{p}^2\right)^2\right\}^{-1/2}. \quad (12.86)$$

Er erfüllt die ersten drei Bedingungen im Satz von Nielsen und Ninomiya. Insbesondere ist  $\tilde{D}_o(p)$  analytisch und deshalb verschwindet  $D_o(x-y)$  exponentiell für grosse Distanzen. Wir fassen zusammen: Der Überlapp-Operator von NEUBERGER und NARAYANAN ist nicht hermitesch aber immer noch normal, er ist lokal und hat keine Verdoppler und er ist chiral im Sinne von LÜSCHER. In Simulationen ist er aber teuer, da in Gegenwart von Eichfeldern (siehe nächstes Kapitel) die Inversion von  $D_w D_w^\dagger$  relativ viel Zeit kostet. Für  $m = 0$  und nichtverschwindende Eichfelder können wieder unerwünschte Nullmoden auftreten.

### 12.4.1 Weitere Vorschläge

Neben den staggered Fermionen gibt es weitere Konstruktionen, für welche die Anzahl Verdoppler kleiner als für die naiven Fermionen ist und trotzdem die Chiralität erhalten

ist. Mit Hilfe der chiralen Projektoren  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_*)$  kann man den normalen Operator

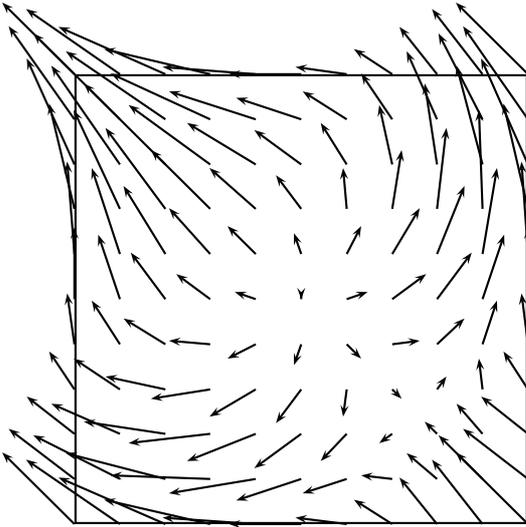
$$D = \gamma^{\mu} (P_{+}\partial_{\mu} + P_{-}\partial_{\mu}^{*}) + m = \mathring{D} + \gamma_{*}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{\text{S}}, \quad \partial_{\mu}^{\text{S}} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}^{*} - \partial_{\mu}) \quad (12.87)$$

definieren. Im chiralen Limes  $m \rightarrow 0$  ist  $D$  anti-hermitesch und antikommutiert mit  $\gamma_{*}$ . Im Impulsraum hat er die Form

$$\tilde{D}(p) = i\gamma^{\mu}\mathring{p}_{\mu} + m + \frac{1}{2}\gamma_{*}\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}^2. \quad (12.88)$$

Sein „Betragsquadrat“ vereinfacht sich zu

$$\tilde{D}\tilde{D}^{\dagger} = \hat{p}^2 + m^2 - i\gamma_{*}\gamma^{\mu\nu}\hat{p}_{\mu}\hat{p}_{\nu} \sin\left(\frac{p_{\mu} - p_{\nu}}{2}\right). \quad (12.89)$$



In zwei Dimensionen hat das Vektorfeld  $\tilde{D}_{\mu}$  für  $\gamma_{*} = -i\gamma^0\gamma^1$  die Form

$$\tilde{D}_{\mu}(p) = \left( \mathring{p}_0 - \frac{1}{2}\hat{p}_1^2, \mathring{p}_1 + \frac{1}{2}\hat{p}_0^2 \right)$$

In der Abbildung links ist es in der ersten Brillouin-Zone gezeigt. Die Nullstellen sind bei  $(0, 0)$  und  $(\pi/2, -\pi/2)$  und die zugehörigen Indexe sind 1 und  $-1$ . Man sieht hier explizit die Brechung der hyperkubischen Symmetrie.

Zum Berechnen der Nullstellen betrachtet man am Besten das „Betragsquadrat“ des zweidimensionalen Operators,

$$\tilde{D}\tilde{D}^{\dagger} = \hat{p}^2 + m^2 + 2\hat{p}_0\hat{p}_1 \sin\left(\frac{p_0 - p_1}{2}\right). \quad (12.90)$$

Die rechte Seite kann im chiralen Grenzfall nur Null werden, wenn der Sinus  $\pm 1$  ist. Wir wählen für den Wertebereich der Impulse das Intervall  $[-\pi, \pi]$ . Dann ist der letzte Sinus gleich 1 für  $p_0 - p_1 = \pi$  und er ist gleich  $-1$  für  $p_0 - p_1 = -\pi$ . Für beide Fälle vereinfacht sich der Ausdruck zwischen den Klammern zu

$$\left( \sin \frac{p_1}{2} + \cos \frac{p_1}{2} \right)^2 = 0 \implies p_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad p_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Damit hat in zwei Dimensionen der Operator  $DD^\dagger$  vier Nullmoden in der ersten Brillouinzone, zwei bei  $\mathbf{p} = (0, 0)$  und zwei bei  $\frac{1}{2}(\pi, -\pi)$ . Diese Verminderung der Nullmoden gegenüber dem naiven Dirac-Operator bezahlt man mit dem Verlust der hyperkubischen Symmetrie aufgrund des Sinus-Terms in (12.90). In zwei Dimensionen wird diese Symmetrie erzeugt durch

$$\mathbf{p} \longrightarrow i\sigma_2 \mathbf{p}. \quad (12.91)$$

## 12.5 Programme zu Kapitel 10

Das folgende octave-Programm `derinverse` berechnet die Zweifunktfunction (12.33) als Funktion von  $x$ . Sie ist für  $x = 1$  auf 1 normiert. Abgefragt wird die Masse. Das Resultat und der exponentielle Fit  $\exp(-mx)$  mit der Masse im Propagator werden angezeigt.

```
function derinverse;
# berechnet das Inverse von
# partial + m fuer die Linksableitung,
# antisymmetrische Ableitung und
# Slac-Ableitung.
wahl=input("links_=1, antisymmetrisch_=2, slac_=3_");
m=input("masse=_");
N=40;
a=eye(N);
x=[0:N-1]';
##### Linksableitung
if_(wahl==1)
#pa1=a-shift(a,1);
pa=a-shift(a,1)+m*a;
#pa=pa1*pa1'+m*m*a;
##### Antisymmetrische Ableitung
elseif_(wahl==2)
##pa=m*a+0.5*(shift(a,-1)-shift(a,1));
pa=m*a+0.5*(shift(a,-1)-shift(a,1));
#pa=m*m*a-pa1*pa1;
else
##### Slac-Ableitung
##if_(rem(N,2)==0)
## disp(' _N_ must_ be_ odd! ');
## break;
##endif;
ks=linspace(1,N-1,N-1);
hilf1=pi/N;
t=hilf1*ks;
t1=hilf1*(-1).^ks./sin(t);
#pa=toeplitz([0,t1],[0,-t1])+m*a;
```

```

pal=toeplitz ([0 , t1 ], [0 , -t1 ] );
pa=-pal*pal+m*m*a;
endif;
#####Ende Slac-Ableitung
painv=inv (pa);
prop=painv (: , 1) / painv (2 , 1);
data=[x , prop];
if (wahl==3)
#gplot [0:40] data , exp(-m*(x-1))*prop (2);
gplot [0:40] data , exp(-m*x);
#, prop (N/2)-1+cosh (m*(N/2-x));
else
gplot [0:40] data , exp(-m*x);
endif;
derinverse=fopen ("derinverse.dat" ,"w" ,"native");
for i=1:N
fprintf (derinverse , "(%4.2f,%4.2f)" , x(i) , 2*prop(i));
if (rem(i,5)==0) fprintf (derinverse , "\n");
endif;
endfor;
fclose (derinverse);
endfunction;

```

Mit der folgenden kurzen Routine wurden die Vektorfelder  $\tilde{D}_\mu$  für den zweidimensionalen Dirac-Operator berechnet und in einer für `pstricks` lesbaren Form abgespeichert.

```

function vectorfield;
# berechnet das Vektorfeld D_\mu(p) fuer
# den Diracoperaor im Impulsraum.
#
closeplot;
N=11;
Ns=N*N;
p=linspace (-pi , pi , N);
[a , b]=meshdom (p , p);
c=sin (a)-2*sin (b/2).*sin (b/2);
d=sin (b)+2*sin (a/2).*sin (a/2);
x=reshape (a , Ns , 1);
y=reshape (b , Ns , 1);
vx=reshape (c , Ns , 1) / 2;
vy=reshape (d , Ns , 1) / 2;
vectorfield=fopen ("vectorfield.dat" ,"w" ,"native");
for i=1:Ns
fprintf (vectorfield , "\\psline{->}" (%4.2f,%4.2f)...
(%4.2f,%4.2f)\n" , x(i) , y(i) , x(i)+vx(i) , y(i)+vy(i));
endfor;
fclose (vectorfield);
endfunction;

```