

Kapitel 11

Renormierungsgruppe

Die Monte-Carlo-Simulationen zeigen charakteristische Konfigurationen mit unterschiedlichem Verhalten in den Hoch- und Tieftemperaturphasen und am kritischen Punkt. Man sieht Domänen, deren mittlerer Durchmesser gleich der Korrelationslänge ξ ist.

Für $T > T_c$ findet man typisch *Domänen* gleicher Ausrichtung der Spins mit endlichem Durchmesser, bei T_c mit beliebig großer und kleiner Ausdehnung und für $T < T_c$ mit makroskopischer Ausdehnung und wenigen, endlichen Inseln entgegengesetzter Ausrichtung. Da am kritischen Punkt Domänen beliebiger Größe existieren, sieht jedes Bild auf beliebigen Längenskalen ähnlich aus. Führen wir für typische Konfigurationen eine Skalenänderung durch, im einfachsten Fall durch extremes Dezimieren der Spins, so erhalten wir für $T > T_c$ Bilder mit kleineren Domänen, ähnlich wie wenn wir die Temperatur erhöhen. Betrachten wir dagegen eine typische Konfiguration bei $T < T_c$, so führt die Dezimierung auf ein Bild mit makroskopischen Domänen mit nur noch halb so großen Inseln entgegengesetzter Ausrichtung, ähnlich wie bei Erniedrigung der Temperatur.

In jedem Fall führt eine Skalenänderung mit linearem Dezimierungsfaktor $b > 1$ weg vom kritischen Punkt, außer man startet exakt bei T_c . Die gemachten Beobachtungen legen folgende Frage nahe: Kann eine Skalenänderung exakt äquivalent zu einer Änderung der Temperatur und weiterer Kopplungskonstanten sein. Mit äquivalent meinen wir, dass Zustandssumme und Korrelationsfunktionen (soweit sie für die mikroskopischen und die dezimierten Spins gleichzeitig definiert werden können) übereinstimmen. Wir besprechen zuerst ein einfaches Beispiel für welches dies möglich ist.

Im Jahre 1982 erhielt K.G. WILSON den Nobelpreis für Physik als Würdigung seiner Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Renormierungsgruppe. Dieser nichtstörungstheoretische Zugang zur Theorie der kritischen Phänomene entwickelte sich seither zu einem mächtigen Werkzeug in der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie. Wesentliche Beiträge stammen von STUECKELBERG, PETERMAN, GELL-MAN, LOW und BREZIN in der Quantenfeldtheorie und Teilchenphysik [50] sowie KADANOV, FISHER [49] und WILSON [51] in der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie. Ich verweise auf die Darstellungen

in den empfehlenswerten Büchern [52] für eine eingehende Darstellung der Methode.

11.1 Ising-Modelle

Für die Isingkette kann die Dezimierung des System exakt durchgeführt werden. Das verdünnte System ist gleich dem ursprünglichen System mit veränderten Kopplungskonstanten. In $d \geq 2$ Dimensionen werden dagegen bei jeder Verdünnung neue Kopplungen erzeugt und die iterierte Verdünnung kann nicht mehr analytisch berechnet werden.

11.1.1 Ising-Kette

Wir betrachten zuerst die Zustandssumme für N Spins und periodische Randbedingungen. Die Energie ist proportional zu

$$-\beta H = K \sum_{\langle xy \rangle} s_x s_y + h \sum_x s_x \quad \text{mit} \quad K = \beta J, \quad h = \beta \tilde{h}.$$

Man beachte, dass h in dieser Formel das mit der inversen Temperatur multiplizierte und damit dimensionslose „Magnetfeld“ ist. Wir wollen annehmen, dass N gerade ist. Im Ausdruck für die Zustandssumme summieren wir über jeden zweiten Spin ($b = 2$), d.h. über die Spins auf den geraden Gitterpunkten, und erhalten

$$\begin{aligned} Z(N, K, h) &= \sum_{s_1, s_2, \dots} e^{K s_1 s_2 + \frac{1}{2} h (s_1 + s_2)} e^{K s_2 s_3 + \frac{1}{2} h (s_2 + s_3)} \times \dots \\ &= \sum_{s_1, s_2, \dots} e^{K (s_1 s_2 + s_2 s_3) + \frac{1}{2} h (s_1 + 2s_2 + s_3)} \times \dots \\ &= \sum_{s_1, s_3, \dots} \left(e^{(K + \frac{1}{2} h)(s_1 + s_3) + h} + e^{-(K - \frac{1}{2} h)(s_1 + s_3) - h} \right) \dots \end{aligned} \quad (11.1)$$

Nach der Summation über jeden zweiten Spin erhalten wir ein Ising-artiges System auf den ungeraden Gitterpunkten. Die interessante Beobachtung ist, dass man neue Kopplungskonstanten K', h' und eine Funktion $g(K, h)$ einführen kann, so dass gilt

$$e^{(K + \frac{1}{2} h)(s_1 + s_3) + h} + e^{-(K - \frac{1}{2} h)(s_1 + s_3) - h} = e^{2g(K, h)} e^{K' s_1 s_3 + \frac{1}{2} h' (s_1 + s_3)}. \quad (11.2)$$

Wir werden die neuen Kopplungen und g weiter unten berechnen. Diese Ersetzung machen wir nun für jeden Faktor in (11.1). Es ergibt sich wieder die Zustandssumme einer Isingkette auf dem ausgedünnten Gitter mit Kopplungen K', h' ,

$$Z(N, K, h) = e^{Ng} \sum_{s_1, s_3, \dots} e^{K' s_1 s_3 + \frac{1}{2} h' (s_1 + s_3)} e^{K' s_3 s_5 + \frac{1}{2} h' (s_3 + s_5)} \times \dots$$

$$= e^{Ng} Z\left(\frac{N}{2}, K', h'\right). \quad (11.3)$$

Wir fassen dieses bemerkenswerte Resultat zusammen: auf dem verdünnten Gitter mit doppeltem Gitterabstand finden wir die gleiche funktionale Form für die Energie,

$$\beta H \longrightarrow \beta H' - g(K, h)N, \quad -\beta H' = K' \sum_{\langle x'y' \rangle} s_{x'} s_{y'} + h' \sum_{x'} s_{x'}, \quad (11.4)$$

wobei x' und y' ungerade Gitterpunkte sind. Die soeben vorgenommene „Ausintegration“ von Freiheitsgraden nennt man *Dezimierungsprozedur*. Weiter unten werden wir noch andere Dezimierungsprozeduren besprechen bei denen die Freiheitsgrade nach der Dezimierung nicht mehr eine Teilmenge der ursprünglichen Freiheitsgrade ist.

Um die neuen Konstanten zu berechnen, werten wir die Gleichung (11.2) für drei Werte der beiden Spins (s_1, s_3) aus. Man findet folgende drei unabhängigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} (s_1, s_3) = (1, 1) : & \quad 2e^h \cosh(2K + h) = e^{2g} e^{K'+h'} \\ (s_1, s_3) = (-1, -1) : & \quad 2e^{-h} \cosh(2K - h) = e^{2g} e^{K'-h'} \\ (s_1, s_3) = (1, -1) : & \quad 2 \cosh(h) = e^{2g} e^{-K'}. \end{aligned}$$

Aufgelöst nach den drei Funktionen $K'(K, h)$, $h'(K, h)$ und $g(K, h)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} K \xrightarrow{R_2} K' &= \frac{1}{4} \log \frac{\cosh(2K + h) \cosh(2K - h)}{\cosh^2 h} \\ h \xrightarrow{R_2} h' &= h + \frac{1}{2} \log \frac{\cosh(2K + h)}{\cosh(2K - h)} \\ g(K, h) &= \frac{1}{8} \log (16 \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \cosh^2 h). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Die folgenden Abbildung zeigt Trajektorien der Kopplungskonstanten in der (K, h) -Ebene bei mehrfacher Anwendung der Transformation (11.5). Als Startpunkte für die Iterationen wurden $K = 2$ und $h \in \{\pm 2/10, \pm 5/100, 0\}$ gewählt. Rechts neben der Abbildung findet sich ein kurzes C-Programm zur Berechnung von Trajektorien. Es wird nach den Startwerten für K und H gefragt. Die Ausgabe in den File `renorm1d` ist in `ps-tricks`-Format und kann in Latex eingebunden werden. Die Folge von Punkten

$$(K, h) \xrightarrow{R_2} (K', h') \xrightarrow{R_2} (K'', h'') \xrightarrow{R_2} (K''', h''') \xrightarrow{R_2} \dots$$

in der 2-dimensionalen Ebene der Kopplungskonstanten K und h hat die Achse $K = 0$ als *Attraktor*. Bei jeder Dezimierung oder Ausdünnung des System wird die Kopplung K zwischen nächsten Nachbarn schwächer, $K' \leq K$.

Nach zweimaliger Anwendung der Gleichung (11.3) folgt nun unmittelbar, dass

$$Z(N, K, h) = e^{Ng(K,h)} e^{\frac{1}{2}Ng(K',h')} Z\left(\frac{N}{4}, K'', h''\right) \quad (11.8)$$

gilt. Setzen wir die Iteration fort, so ergibt sich folgende Formel für die freie Energiedichte der Isingkette,

$$f(K, h) = -\frac{1}{\beta} \left(g(K, h) + \frac{1}{2}g(K', h') + \frac{1}{2^2}g(K'', h'') + \frac{1}{2^3}g(K''', h''') + \dots \right). \quad (11.9)$$

In jeder Stufe der Iteration ist die Form der Funktion g gleich, da die renormierte Energie (11.4) immer die gleiche Form hat.

Für ein System mit Magnetfeld Null hat das ausgedünnte System ebenfalls Magnetfeld Null. Die Gerade $h = 0$ ist eine Trajektorie der Renormierungsgruppe. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass das ursprüngliche System für $h = 0$ eine \mathbb{Z}_2 Symmetrie aufweist und diese Symmetrie vom ausgedünnten System geerbt wird. Die Abbildung R_2 kann kein \mathbb{Z}_2 -brechendes Magnetfeld erzeugen. Um die Gleichungen etwas zu vereinfachen, schalten wir nun das Magnetfeld ab und betrachten den Renormierungsgruppenfluss für $h = 0$:

$$K' = R_2(K) = \frac{1}{2} \log \cosh(2K) \quad \text{und} \quad g = \frac{1}{4} \log (4 \cosh(2K)). \quad (11.10)$$

Nur wenn die Kopplungskonstante K einer der beiden Werte 0 oder ∞ annimmt, bleibt sie inert bei einer Transformation. Die beiden Punkte $K = 0, \infty$ sind also *Fixpunkte* der RG-Transformation R_2 . Der Punkt $K = 0$ heisst *Hochtemperatur-Fixpunkt* und der Punkt $K = \infty$ *Tieftemperatur-Fixpunkt*.

Bei der Transformation R_2 verdoppelt sich der Abstand zwischen nächsten Nachbarn. Die Korrelation zwischen zwei Spins auf dem verdünnten Gitter ist nach Konstruktion auf dem feineren oder größeren Gitter gleich,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z(N, K)} \sum_{\Omega} s_{x'} s_{y'} \exp \left(K \sum_{\langle uv \rangle} s_u s_v \right) \\ &= \frac{1}{Z(\frac{1}{2}N, K')} \sum_{\Omega'} s_{x'} s_{y'} \exp \left(K' \sum_{\langle u'v' \rangle} s_{u'} s_{v'} \right) \end{aligned}$$

Hier liegen die gestrichenen Punkte auf dem groben Gitter. Haben x' und y' auf dem feinen Gitter den Abstand $2n$, dann haben sie auf dem groben Gitter den Abstand n . Für Abstände groß verglichen mit der Korrelationslänge ξ gilt

$$\langle s_x s_y \rangle \sim e^{-|x-y|/\xi}, \quad |x-y| \gg \xi, \quad (11.11)$$

und wir schliessen, dass bei jeder Transformation R_2 die Korrelationslänge halbiert wird,

$$\xi' = \frac{\xi}{2}. \tag{11.12}$$

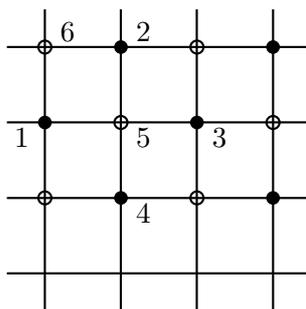
Bei der Lösung des $1d$ Ising-Modells haben wir gezeigt, dass die Korrelationslänge am Tieftemperatur-Fixpunkt divergiert und am Hochtemperatur-Fixpunkt verschwindet. Der Tieftemperatur-Fixpunkt ist ein kritischer Punkt des Systems und am Hochtemperatur-Fixpunkt verschwindet die Wechselwirkung. Die Trajektorien der Renormierungsgruppe enden im trivialen Fixpunktes mit $\xi = 0$. Die Kopplungskonstante K und die Korrelationslänge ξ werden bei jedem Renormierungsschritt verringert.

11.1.2 Das zweidimensionale Modell

Wir betrachten als weiteres, weniger einfaches Beispiel das zweidimensionale feldfreie Ising-Modell mit

$$\beta H = -K \sum_{\langle xy \rangle} s_x s_y. \tag{11.13}$$

Hier sind die Nachbarschaftsverhältnisse etwas komplizierter als in einer Dimension. Die Energiefunktion des ausgedünnten Systems enthält neben der nächsten-Nachbarn Wechselwirkung auch Kopplungen zwischen übernächsten Nachbarn. In der Zustandssumme betrachten wir nun den Beitrag aller Spins auf den offenen Gitterpunkten der folgenden Abbildung. Wir erhalten dann ein effektives Spinmodell für die Spins auf den vollen Gitterpunkten.



Zum Beispiel erhalten wir vom Beitrag des Spins auf dem Punkt 5

$$\begin{aligned} & \sum_{s_5 = \pm 1} e^{K s_5 (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)} \\ &= e^{K(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)} + e^{-K(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)}. \end{aligned}$$

Das allgemeinste, mit den Symmetrien verträgliche Boltzmann-Gewicht von 4 Spins hat die Form

$$e^{2g} \exp \left(\frac{1}{2} K'_1 \underbrace{(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_4 + s_4 s_1)}_{\text{NN}} + K'_2 \underbrace{(s_1 s_3 + s_2 s_4)}_{\text{üNN}} + K'_3 \underbrace{(s_1 s_2 s_3 s_4)}_{\text{Q}} \right),$$

wobei (NN) für nächste Nachbarn, (üNN) für übernächste Nachbarn und (Q) für Quadrate steht. Wir finden folgende unabhängige Gleichungen für die Kopplungskonstanten K'_i :

$$\begin{aligned} (s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 1, 1, 1) : & \quad 2 \cosh(4K) = e^{2g} e^{2K'_1 + 2K'_2 + K'_3} \\ (s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, -1, -1, -1) : & \quad 2 \cosh(2K) = e^{2g} e^{-K'_3} \\ (s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 1, -1, -1) : & \quad 2 = e^{2g} e^{-2K'_2 + K'_3} \\ (s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, -1, 1, -1) : & \quad 2 = e^{2g} e^{-2K'_1 + 2K'_2 + K'_3}. \end{aligned}$$

Die Auflösung führt auf die RG-Transformation

$$\begin{aligned} K'_1 &= 2K'_2 = \frac{1}{4} \log \cosh(4K) \\ K'_3 &= \frac{1}{8} \log \cosh(4K) - \frac{1}{2} \log \cosh(2K) \\ g &= \frac{1}{16} (\log \cosh(4K) + \log \cosh(2K) + 8 \log 2). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Wir erhalten $V/2$ derartige Beträge von den offenen Punkten. Dabei kommt zum Beispiel der Term $\exp(K'_1 s_1 s_2 / 2)$ auch bei der Summation über s_6 vor. Bezeichnen wir mit w' die Spinkonfigurationen auf dem verdünnten Gitter mit den vollen Gitterpunkten, dann ergibt sich für die Zustandssumme des verdünnten Systems,

$$Z(V, K) = Z' \left(\frac{V}{2}, K' \right) = \sum_{w'} e^{-(\beta H)'(w')} \quad (11.15)$$

mit der *Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) Energiefunktion*

$$-(\beta H)' = Vg + K'_1 \sum_{\text{NN}} s_x s_y + K'_2 \sum_{\text{üNN}} s_x s_y + K'_3 \sum_{\text{Q}} s_x s_y s_u s_v, \quad (11.16)$$

wobei x, y, u, v Punkte auf dem verdünnten Gitter sind. Man sieht, dass der LGW-Hamiltonian H' nicht mehr die Form von H hat wie beim eindimensionalen Modell. Die Näherung $K'_2 = K'_3 = 0$ zu setzen ist zu grob. In dieser Näherung gibt es wie im eindimensionalen Modell nur die Fixpunkte $K_1 = 0$ und $K_1 = \infty$ und entsprechend keinen Phasenübergang. Eine akzeptable Näherung ist es, nur $K_3 = 0$ zu setzen und übernächste Nachbarn als nächste Nachbarn zu zählen,

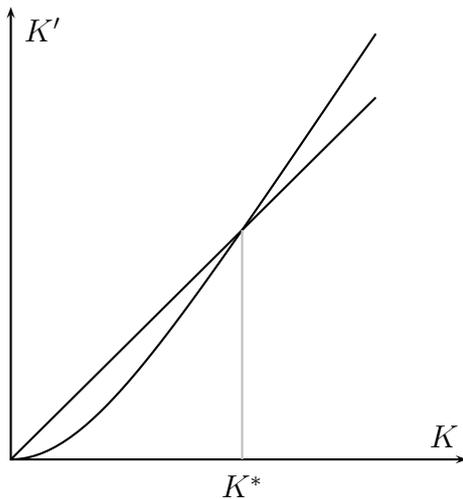
$$Z(V, K) = e^{Vg} \sum_{w'} \exp \left(K' \sum_{\text{NN}} s_{x'} s_{y'} \right), \quad K' = K'_1 + K'_2. \quad (11.17)$$

Die Transformation

$$K \longrightarrow K'(K) = \frac{3}{8} \log \cosh 4K \quad (11.18)$$

hat Fixpunkte bei $0, \infty$ und bei

$$K^* = 0.50698. \quad (11.19)$$



Dies ist nicht weit weg von exakten Wert $K_c = 0.4407$. Der Fixpunkt K^* ist *instabil*. Startet man die Iteration für $K \neq K^*$, dann strebt K gegen den Hochtemperaturfixpunkt bei $K = 0$ oder den Tieftemperaturfixpunkt bei $K = \infty$. Es gibt verschiedene Näherungsverfahren der Konstruktion der RG-Transformation. Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, dass mit einer endlichen Anzahl von Kopplungen gearbeitet wird. Beispiele von Ortsraum-RGT sind

- Kumulanten-Verfahren
- Finite-Cluster-Verfahren
- Migdal-Kadanov-Transformation
- Monte-Carlo-Renormierung.

Insbesondere die letzte Methode ergibt sehr präzise Werte für die kritischen Exponenten und soll weiter unten besprochen werden.

Anstelle der Spin-Variablen im Ortsraum kann man die Variablen im Impulsraum benutzen. Der Vorteil dieser Methode ist, dass für eine unendliches Rauggitter die Impulse kontinuierlich sind. Ist Λ ein reguläres Gitter, so liegen die Impulse in der kompakten Brillouin-Zone. Die Ausdünnung wird nun geschickterweise über die Freiheitsgrade zu den größten Impulswerten durchgeführt. Die entsprechenden Verfahren heissen Impulsraum-RGT, beziehungsweise feldtheoretische Verfahren. Der Dezimierungsparameter b kann kontinuierlich sein und beliebig dicht an 1 liegen. Beispiele von Impulsraum-RGT sind

- ϵ -Entwicklung
- Callan-Symanzik-Gleichung.

Noch vielfältiger als die Implementierung der Renormierungsgruppenidee ist die Literatur über diese Methode und ihre Anwendung auf eine Vielzahl physikalischer Systeme. In [49]

und [50] findet man eine Auswahl von Originalarbeiten, übersichtsartikel und Monographien über diese mächtige Methode in der statistischen Physik, Quantenfeldtheorie und Teilchenphysik.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, welche Eigenschaften des physikalischen Systems aus welcher Information der RG folgen.

11.2 Fixpunkte

Wir wenden uns nun der allgemeineren Diskussion der RG-Methoden zu. Wir betrachten ein d -dimensionales Gittermodell mit Kopplungskonstanten

$$K = \{K_A | A \subset \Lambda\} = (K_1, K_2, \dots), \quad (11.20)$$

wobei wir die Teilmengen des Gitters (worin ein $x \in A$ mehrmals auftreten darf) durchnummerierten. Diese Menge von Kopplungskonstanten sei vollständig in folgendem Sinne: Bei einer RG-Transformation, welche b^d Freiheitsgrade durch einen Freiheitsgrad ersetzt, habe die Energiefunktion für die reduzierten Freiheitsgrade dieselbe Art von Wechselwirkungen wie die Energiefunktion des ursprünglichen Systems. Für eine Energie der Form

$$H(w) = - \sum_{A \subset \Lambda} K_A s_A, \quad s_A = \prod_{x \in A} s_x, \quad (11.21)$$

soll der renormierte Energie bis auf eine extensive additive Konstante $-Vg(K)$ die gleiche funktionale Form haben,

$$H(w) \longrightarrow H'(w') - Vg(K), \quad H'(w') = - \sum_{A \subset \Lambda'} K'_A s_A \quad (11.22)$$

mit denselben Mengen A haben. Es wird dabei stillschweigend angenommen, dass die Mengen $\{A\}$ sowohl auf dem ursprünglichen wie auch auf dem verdünnten Gitter existieren und dass die reduzierten Freiheitsgrade $s_{x'}$ dieselben algebraischen Eigenschaften wie die s_x haben. Steht $\{A\}$ zum Beispiel für die Paare nächster Nachbarn, dann soll gelten

$$\sum_{\langle xy \rangle} K_{xy} s_x s_y \longrightarrow \sum_{\langle x'y' \rangle} K'_{x'y'} s_{x'} s_{y'}. \quad (11.23)$$

Der konstante Beitrag $Vg(K)$ in (11.22) entsteht in allen RG-Transformationen. Leider kommt man nur für einfache Systeme wie das eindimensionale Ising-Modell mit einer endlichen Anzahl Kopplungskonstanten aus. Aber die berechnete Annahme ist, dass die K_A zu langreichweitigen Wechselwirkungen (großen Mengen A) sehr klein sind und vernachlässigt werden können. In der Praxis arbeitet man mit einer endlichen Anzahl Konstanten

$\{K_1, \dots, K_n\}$.

Bei der Ausdünnung des Systems ändern sich die Kopplungskonstanten gemäß der Renormierungsgruppenabbildung

$$K'_i = R_i(K_1, K_2, \dots). \quad (11.24)$$

Dabei bleibt die Zustandssumme unverändert,

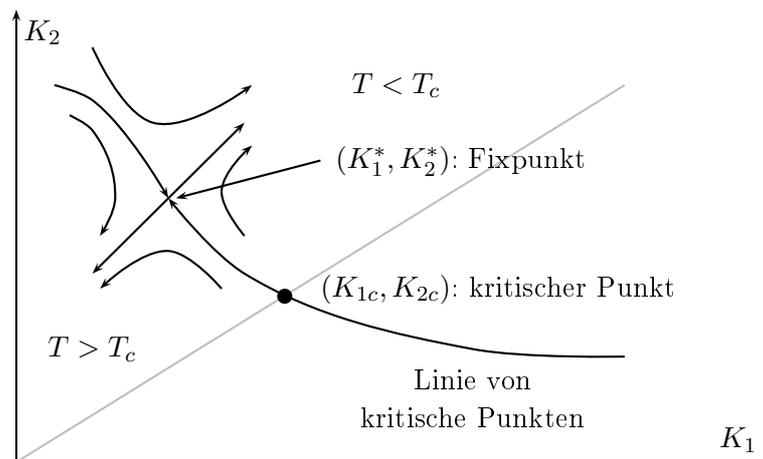
$$e^{-F(V,K)} = \sum_{w \in \Omega} e^{-H(w)} = e^{Vg(K)} \sum_{w' \in \Omega'} e^{-H'(w')} = e^{Vg(K) - F(V',K')}. \quad (11.25)$$

Wir wollen wieder annehmen, dass der thermodynamische Grenzfall $V \rightarrow \infty$ existiert. Für die freien Energiedichten der beiden Systeme im thermodynamischen Grenzfall ergibt sich dann folgende Rekursionsrelation

$$f(K) = b^{-d} f(K') - g(K) \quad (11.26)$$

die uns schon einmal im eindimensionalen Ising-Modell in (11.4) begegnete.

Wir argumentierten bereits, dass *Fixpunkte* der Rekursionsrelation entweder zu kritischen Systemen mit $\xi_c = \infty$ oder zu nicht-wechselwirkenden Systemen mit $\xi = 0$ gehören. Die Umkehrung gilt nicht. Es kann kritische Punkte geben, die keine Fixpunkte sind. Wir betrachten einen 2-dimensionalen Raum von Kopplungskonstanten (K_1, K_2) mit einem kritischen Punkt $K_c = (K_{1c}, K_{2c})$. Im generischen Fall liegt dieser kritische Punkt auf einer Kurve von kritischen Punkten, wie in der folgenden Abbildung skizziert.



Zur Begründung betrachten wir Systeme mit verschiedenen Verhältnissen K_2/K_1 von übernächsten- zu nächsten-Nachbarn Wechselwirkungen. Die kritische Temperatur T_c

wird von diesem Verhältnis abhängen. Wenn das Verhältnis K_2/K_1 verändert wird, beschreibt der Punkt

$$(K_{1c}, K_{2c}) = \left(\frac{J_1}{T_c}, \frac{J_2}{T_c} \right)$$

eine Kurve in der (K_1, K_2) -Ebene. Jeder Punkt auf der Kurve gehört zu einem kritischen Punkt eines speziellen Modells in der Familie von Energiefunktionen.

Nun wollen wir versuchen, die Eigenschaften des System mit dem RG-Fluss in Verbindung zu bringen. Der RG-Fluss hat einige einfache Eigenschaften:

- RG-Trajektorien werden sich der kritischen Fläche nicht nähern, da einerseits auf der Fläche $\xi = \infty$ ist, sich andererseits bei jeder RG-Iteration ξ verkleinert.
- Bei einer RG-Transformation kann das System die Phase nicht wechseln, da bei einer Verdünnung Ordnung nicht in Unordnung übergehen kann und umgekehrt.
- Startet man bei $T > T_c$ so strebt die Temperatur bei wiederholter Iteration gegen den (freien) Fixpunkt bei $T = \infty$, startet man bei $T < T_c$ so endet man im (Grundzustands-) Fixpunkt $T = 0$.
- Startet man dagegen auf der kritischen Fläche, so bleibt man auf dieser Fläche, da $\xi' = \xi/b$ unendlich ist für $\xi = \infty$.
- Nur in Ausnahmefällen sind alle kritischen Punkte stationäre Punkte des RG-Flusses, also Fixpunkte. In fast allen Systemen gibt es eine endliche Menge von isolierten Fixpunkten.

Es sei nun $K^* = (K_1^*, K_2^*, \dots)$ ein Fixpunkt der RG-Transformation,

$$K^* = R(K^*). \quad (11.27)$$

Wir betrachten den Renormierungsgruppen-Fluss in der Umgebung von K^* und schreiben $K = K^* + \delta K$. In der ersten Ordnung in der Abweichung vom Fixpunkt lautet die RG-Transformation

$$K'_i = K_i^* + \delta K'_i = R_i(K_j^* + \delta K_j) = K_i^* + \left. \frac{\partial R_i}{\partial K_j} \right|_{K^*} \delta K_j + O(\delta K^2),$$

und wir finden die linearisierte Transformation

$$\delta K'_i = \sum_j M_i^j \delta K_j, \quad M_i^j = \left. \frac{\partial R_i}{\partial K_j} \right|_{K^*}. \quad (11.28)$$

Nun suchen wir die Eigenwerte und Links-Eigenvektoren der linearisierten Abbildung,

$$\sum_j \Phi_\alpha^j M_j^i = \lambda_\alpha \Phi_\alpha^i = b^{y_\alpha} \Phi_\alpha^i. \quad (11.29)$$

In der letzten Formel haben wir den Eigenwert λ_α durch b^{y_α} ersetzt. Dies ist angezeigt, da wegen der Halbgruppeneigenschaft der RG-Transformation

$$\lambda_\alpha(b)\lambda_\alpha(b) = \lambda_\alpha(b^2)$$

gelten muss. Nun betrachten wir die neuen Variablen

$$g_\alpha = \sum_i \Phi_\alpha^i \delta K_i. \quad (11.30)$$

Es sind die Projektionen von δK auf die Eigenvektoren Φ_α . Es gilt

$$g'_\alpha = \sum_i \Phi_\alpha^i \delta K'_i = \sum_{ij} \Phi_\alpha^i M_i^j \delta K_j = \sum_j b^{y_\alpha} \Phi_{\alpha j} \delta K_j = b^{y_\alpha} g_\alpha. \quad (11.31)$$

Beim zwei-dimensionalen System muss ein Eigenvektor, zum Beispiel Φ_2 , tangential zur kritischen Kurve sein. Der andere Eigenvektor Φ_1 ist dann transvers zur Kurve.

Wir kehren zur Rekursionsrelation (11.26) für die freie Energiedichte zurück. Der Anteil $g(K)$ kommt von der Ausintegration der kurzwelligen Fluktuationen und ist eine *glatte Funktion*. Damit erfüllt der singuläre Anteil der freien Energiedichte die homogene Relation

$$f_s(K) = b^{-d} f_s(K'). \quad (11.32)$$

In der Nähe des Fixpunktes linearisieren wir und erhalten folgendes Skalenverhalten für die freie Energiedichte,

$$f_s(K^* + \delta K) = b^{-d} f_s(K^* + \delta K'). \quad (11.33)$$

Im Folgenden schreiben wir nicht immer das Argument K^* und setzen

$$f_s(K^* + \delta K) \equiv f_s(g_1, g_2, \dots), \quad \delta K \stackrel{(11.30)}{=} \delta K(g).$$

Nach ℓ -maliger Iteration der RG-Transformation finden wir

$$f_s(g_1, g_2, \dots) = b^{-d\ell} f_s(b^{\ell y_1} g_1, b^{\ell y_2} g_2, \dots). \quad (11.34)$$

Je nach Vorzeichen des Exponenten y_α finden wir ein unterschiedliches Verhalten:

- Für $y_\alpha > 0$ wächst die Abweichung g_α beständig und der RG-Fluß trägt den Punkt $K^* + g_\alpha$ vom Fixpunkt weg. Es handelt sich hier um eine *relevante Störung*.
- Für $y_\alpha < 0$ schrumpft die Abweichung g_α und der RG-Fluß führt den Punkt $K^* + g_\alpha$ zum Fixpunkt hin. Es handelt sich um eine *irrelevante Störung*.
- Die Störungen mit $y_\alpha = 0$ nennt man *marginale Störungen*.

Relevante Störungen sind üblicherweise die Temperatur und das Magnetfeld, bzw. die dimensionslosen Größen

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \equiv g_1 \quad \text{und} \quad \beta h = g_2. \quad (11.35)$$

Wir wollen die Resultate noch etwas umdeuten. Die Renormierungsgruppentransformation wirkt auf dem Raum der Kopplungskonstanten oder äquivalent dazu auf dem Raum \mathcal{H} der Wechselwirkungen bzw. Energiefunktionen,

$$R_b : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Dies ist im Allgemeinen ein ∞ -dimensionaler Raum. Wir betrachten wieder die allgemeine Klasse von Energiefunktionen in (11.21),

$$H = - \sum_{A \subset \Lambda} K_A s_A \equiv - \sum K_i O_i. \quad (11.36)$$

In der Nähe des Fixpunktes kann sie entwickelt werden, $H = H^* + \delta H$, mit

$$H^* = - \sum K_i^* O_i \quad \text{und} \quad \delta H = - \sum \delta K_i O_i = - \sum_\alpha g_\alpha Q_\alpha. \quad (11.37)$$

Nach ℓ -maliger Iteration der RG-Transformation ändert $H \in \mathcal{H}$ wie folgt,

$$\begin{aligned} H^* + \delta H &\longrightarrow H^* - \sum g'_\alpha Q_\alpha \longrightarrow H^* - \sum g''_\alpha Q_\alpha \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow H^* - \sum_\alpha b^{\ell y_\alpha} g_\alpha Q_\alpha. \end{aligned}$$

Die Q_α heissen *Skalen-'Operatoren'* und die g_α *Skalenfelder*. Entsprechend heissen die Operatoren mit positiven y_α relevant, mit $y_\alpha < 0$ irrelevant und mit $y_\alpha = 0$ marginal. Im Ising-Modell sind das mittlere Feld $\sum s_i$ und die Energie H relevante Operatoren.

11.2.1 Herleitung der Skalengesetze

Wir wollen hier annehmen, dass $g_1 = t$ und $g_2 = \beta h$ relevant und g_3, g_4, \dots irrelevant sind und wählen ℓ derart, dass

$$b^{y_1 \ell} = \frac{1}{t}, \quad \text{d.h.} \quad b^\ell = t^{-1/y_1} \quad (11.38)$$

ist. Wir folgern, dass

$$f_s(K^* + \delta K) \equiv f_s(t, h, g_3, \dots) = t^{d/y_1} f_s \left(1, \frac{h}{t^{y_2/y_1}}, \frac{g_3}{t^{y_3/y_1}}, \dots \right) \quad (11.39)$$

gelten muss. Ganz analog schliesst man auf die Beziehung

$$f_s(t, h, g_3, \dots) = h^{d/y_2} f_s \left(\frac{t}{h^{y_1/y_2}}, 1, \frac{g_3}{h^{y_3/y_2}}, \dots \right). \quad (11.40)$$

Man beachte, dass in der Nähe des Fixpunktes die letzten Argumente der freien Energie auf den rechten Seiten gegen Null streben,

$$\frac{g_i}{t^{y_i/y_1}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad \frac{g_i}{h^{y_i/y_2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad i = 3, 4, \dots \quad (11.41)$$

Durch mehrmaliges Ableiten nach den relevanten Kopplungen t und h erhält man den Zusammenhang zwischen kritischen Exponenten und den Eigenwerten der linearisierten RG-Transformation (11.28).

Wir erinnern an die wichtigsten thermodynamischen Größen aus dem dritten Kapitel:

$$\text{Magnetisierung:} \quad m(t, h) = \langle s_x \rangle = -\frac{\partial f}{\partial h} \quad (11.42)$$

$$\text{Suszeptibilität:} \quad \chi(t, h) = \beta \sum_x \langle s_0 s_x \rangle_c = -\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \quad (11.43)$$

$$\text{innere Energiedichte:} \quad u(t, h) = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{V} \langle H \rangle = \frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta} \quad (11.44)$$

$$\text{spezifische Wärme:} \quad c(t, h) = \frac{\partial u}{\partial T} = -\beta^2 \frac{\partial u}{\partial \beta} = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}. \quad (11.45)$$

Diese im Bereich der makroskopischen Thermodynamik definierbaren Größen haben folgende kritische Exponenten:

$$c(t, 0) \sim E_\pm |t|^{-\alpha}, \quad m(t, 0) \sim B t^\beta \quad (11.46)$$

$$\chi(t, 0) \sim A_\pm |t|^{-\gamma}, \quad \chi(0, h) \sim |h|^{-1/\delta} \text{sign}(h). \quad (11.47)$$

Daneben gibt es noch zwei weitere kritische Exponenten η und ν , die mit der Korrelationslänge und Zweipunktsfunktion verknüpft sind,

$$\text{Korrelationslänge: } \xi^{-1} = - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \log \langle s_0 s_x \rangle_c \sim |t|^\nu \quad (11.48)$$

$$\text{Greensfunktion: } \langle s_0 s_x \rangle \sim \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} \quad (11.49)$$

Jede Korrelationsfunktion, die am kritischen Punkt langreichweitiges Verhalten zeigt, erlaubt die Definition weiterer kritischer Exponenten. Der Exponent ν beschreibt das Divergieren der Korrelationslänge bei Annäherung an T_c . Das Potenzverhalten der Korrelationsfunktion ist durch η charakterisiert.

Die folgende Tabelle enthält für einige Phasenübergänge die wichtigsten kritischen Exponenten [53]:

	β – Messing	Fe	Ni	$3d$ – Ising
α	0.05 ± 0.06	-0.03 ± 0.12	0.04 ± 0.12	0.11
β	0.305 ± 0.005	0.37 ± 0.01	0.358 ± 0.003	0.32
γ	1.25 ± 0.02	1.37 ± 0.015	1.33 ± 0.02	1.24
δ		4.3 ± 1	4.29 ± 0.05	4.8
η	0.08 ± 0.07	0.07 ± 0.04	0.041 ± 0.01	0.05
ν	0.65 ± 0.02	0.69 ± 0.02	0.64 ± 0.1	0.63

Mit dem Skalierungsverhalten (11.39,11.40) der freien Energie können wir nun einen Zusammenhang zwischen den kritischen Exponenten und den Eigenwerten der linearisierten RG-Transformation finden. So ist die spezifische Wärme proportional zur zweiten Ableitung von f bezüglich t , also

$$f_s \sim |t|^{2-\alpha}. \quad (11.50)$$

Der Vergleich mit (11.39) führt dann auf $2 - \alpha = d/y_1$. Ganz ähnlich argumentiert man für die kritischen Exponenten β, γ und δ . Um die kritischen Exponenten der Korrelationsfunktionen zu finden, muss man die RGT auf Modelle mit räumlich inhomogenen Magnetfeld $h(r)$ anwenden. Man findet die wichtigen Relationen

$$\begin{aligned} 2 - \alpha &= \frac{d}{y_1}, & \beta &= \frac{d - y_2}{y_1} \\ \gamma &= \frac{2y_2 - d}{y_1}, & \frac{1}{\delta} &= \frac{d - y_2}{y_2} \end{aligned} \quad (11.51)$$

$$\nu = \frac{1}{y_1} \quad , \quad d - 2 + \eta = 2(d - y_2)$$

Damit haben wir die *Skalenrelationen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu, \eta \longleftrightarrow y_1, y_2$ gefunden. Die Exponenten beschreiben das Verhalten des Systems bei Abweichungen vom kritischen Punkt und die y_α sind die Eigenwerte der linearisierten RG-Transformation am Fixpunkt. Da alle kritischen Exponenten nur von y_1 und y_2 abhängen, gibt es sogenannte *Skalenrelationen im engeren Sinne*,

$$\begin{aligned} \gamma &= \nu(2 - \eta) && \text{(Fisher)} \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 && \text{(Rushbrooke)} \\ \gamma &= \beta(\delta - 1) && \text{(Widom)} \\ \nu d &= 2 - \alpha && \text{(Josephson, 'Hyperskalen-Relation').} \end{aligned} \tag{11.52}$$

Für einige wichtige Modelle gilt

	α	β	γ	δ	η	ν
Ising $d = 2$	0	1/8	7/4	15	1/4	1
Ising $d = 3$	0.11	0.32	1.24	4.8	0.05	0.63
klass. Heisenberg $d = 3$	-0.12	0.36	1.37	4.6	0.04	0.7
MFA, beliebiges d	0	1/2	1	3	0	1/2

(11.53)

Wir bemerken, dass die Skalenrelationen für alle aufgelisteten Modelle erfüllt sind, bis auf die Molekularfeldapproximation. Wir schliessen daraus, dass diese Approximation zur Beschreibung des kritischen Verhaltens für $d < 4$ Dimensionen ungeeignet ist.

Man beachte die *Universalität* des kritischen Verhaltens: kritische Exponenten hängen nicht von den mikroskopischen Details der Wechselwirkung ab, da am kritischen Punkt die Korrelationslänge divergiert. Die Universalität kommt davon, dass das asymptotische Verhalten der freien Energie unabhängig von den irrelevanten Kopplungen $g_i, i \geq 3$ ist, da z.B. t^{-y_3/y_1} am Fixpunkt verschwindet. In anderen Worten: Alle Systeme, deren Energiefunktion unter dem RG-Fluss zum gleichen kritischen Fixpunkt fließen haben identische kritische Exponenten.

Irrelevante Parameter sind die Reichweite der Wechselwirkung (solange endlich), Mehrspinwechselwirkungen (solange symmetrieehaltend) und Gitterstruktur. Relevant sind die Dimensionalität d des Raumes, die Anzahl n der Komponenten des lokalen Ordnungsparameters und Symmetrie der Wechselwirkung.

11.3 Blockspintransformation

Die Monte-Carlo-Renormierungsgruppenmethoden (MCRG-Methoden) wurden von MA, SWENDSEN und anderen entwickelt [54]. Für 2-dimensionale Ising-artige Modelle auf dem quadratischen Gitter mit Energiefunktion

$$\beta H = - \sum_{A \subset \Lambda} K_A s_A, \quad K_A = \beta J_A, \quad s_A = \prod_{x \in A} s_x, \quad (11.54)$$

wählt man eine etwas andere Transformation als wir sie für das 1-dimensionale Ising-Modell gewählt haben. Wir wollen wieder periodische Randbedingungen voraussetzen und der Einfachheit halber Ising-artige Modelle mit $s_x \in \{\pm 1\}$ untersuchen. Wir absorbieren die inverse Temperatur in den Kopplungskonstanten K_A und werden in diesem Abschnitt H anstelle von βH schreiben, d.h. wir setzen $\beta = 1$.

Nun unterteilen wir das Gitter Λ in Blocks der Größe b^2 und ordnen den Spins in jedem Block einen *Blockspin* auf einem verdünnten Gitter zu. Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Blockbildung mit linearem Verdünnungsfaktor $b = 2$. Die Punkte des

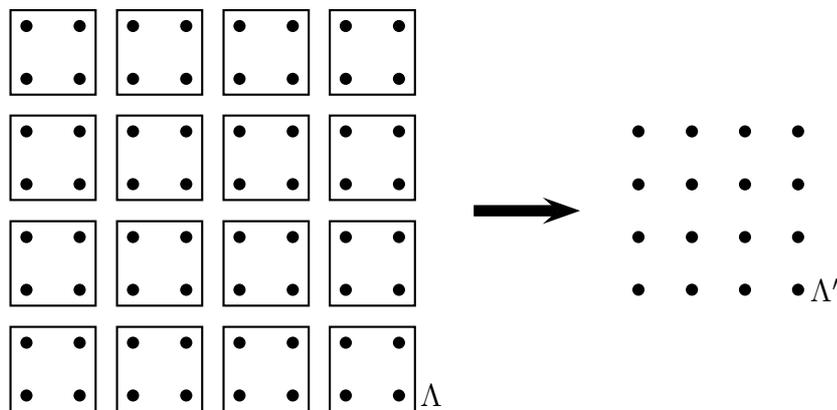


Abbildung 11.1: Jeweils vier Spins werden zu einem Blockspin zusammengefasst.

quadratischen Gitters Λ seien x mit $x_1, x_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$. Ein Block aus b^2 benachbarten Punkten wird dann ein Gitterpunkt x' des geblockten und größeren Gitters zugeordnet,

$$x'(x) = (x'_1(x_1), x'_2(x_2)) = (\text{ceil}(x_1/b), \text{ceil}(x_2/b)).$$

Für $b = 2$ werden beispielsweise die Punkte $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ und $(2, 2)$ in den Punkt $(1, 1)$ auf dem größeren Gitter Λ' abgebildet. Die Größe des geblockten Gitters ist N/b . Die Blockspintransformation, die jeder Spinkonfiguration $w = \{s_x\} \in \Omega$ auf Λ eine Konfiguration $w' = \{S_{x'}\} \in \Omega'$ auf dem geblockten Gitter Λ' zuordnet, ist durch den *Blockkern*

$T(w', w)$ in

$$w' = \sum_{w \in \Omega} T(w', w) \quad (11.55)$$

bestimmt. $T(w', w)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konfiguration w die Blockspinkonfiguration w' zugeordnet wird. Der Kern sollte folgende Bedingungen erfüllen,

$$0 \leq T(w', w) \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{w'} T(w', w) = 1. \quad (11.56)$$

Beim Übergang vom feinen zum groben Gitter definieren wir die Energie für die Blockspins wie folgt,

$$e^{-H'(w')} = \sum_{w \in \Omega} T(w', w) e^{-H(w)} \quad (11.57)$$

Für das 1-dimensionale Ising-Modell war

$$T(w', w) = \prod_{x'=1,3,\dots} \delta(s_{2x}, S_{x'}).$$

Zwei benachbarten Spins s_{2x-1} und s_{2x} wurde der Blockspin $S_{x'} = s_{2x-1}$ zugeordnet. Wir wollen nun annehmen, dass die Energiefunktion für die Blockspins wieder in der Form

$$H'(w') = - \sum_{A' \subset \Lambda'} K_{A'} S_{A'} \quad (11.58)$$

geschrieben werden kann. Unser Ziel ist es, eine Rekursionrelation für die Kopplungskonstanten K zu finden.

Die erste Bedingung in (11.56) sorgt dafür, dass die rechte Seite in (11.57) niemals negativ wird und deshalb als Exponent einer reellen Funktion der w' geschrieben werden kann. Wegen der zweiten Bedingung in (11.56) ändert sich die Zustandssumme bei dieser Transformation nicht,

$$Z'_{H'} = \sum_{w' \in \Omega'} e^{-H'(w')} = \sum_{w' \in \Omega'} \sum_{w \in \Omega} T(w', w) e^{-H(w)} = \sum_{w \in \Omega} e^{-H(w)} = Z_H. \quad (11.59)$$

Wir erinnern daran, dass die verbundenen Korrelationsfunktionen der s_A durch Ableiten von $\log Z$ nach den entsprechenden Kopplungen gewonnen werden können. Zum Beispiel die Einpunkt- und verbundenen Zweipunktfunktionen,

$$\langle s_A \rangle = \frac{\partial \log Z}{\partial K_A}$$

$$\langle s_a; s_B \rangle \equiv \langle s_A s_B \rangle - \langle s_A \rangle \langle s_B \rangle = \frac{\partial \langle s_A \rangle}{\partial K_B}. \quad (11.60)$$

Die Korrelationsfunktionen des geblockten Systems können im ursprünglichen oder im geblockten System berechnet werden,

$$\langle S_{A'} \rangle' \equiv \frac{\sum_{w'} S_{A'} e^{-H'(w')}}{\sum_{w'} e^{-H'(w')}} \quad (11.61)$$

$$= \frac{\sum_{w'} S_{A'} \sum_w T(w', w) e^{-H(w)}}{\sum_w e^{-H(w)}} \quad (11.62)$$

Bei Kenntnis der geblockten Energiefunktion H' könnten wir Erwartungswerte von Funktionen der geblockten Spins gemäß (11.61) berechnen. Ist nur die Energiefunktion H des ursprünglichen Systems und der Blockkern T bekannt, so wird man sie mit Hilfe der Formel (11.62) berechnen.

Es sei nun $T_{A'B}$ die Ableitung des Erwartungswertes $\langle S_{A'} \rangle'$ im geblockten System nach den Kopplungskonstante K_B des ungeblockten Systems, also

$$\begin{aligned} T_{A'B} &= \frac{\partial \langle S_{A'} \rangle'}{\partial K_B} = \frac{\partial}{\partial K_B} \frac{\sum_{w'} S_{A'} \sum_w T(w', w) e^{-H(w)}}{\sum_w e^{-H(w)}} \\ &= \frac{\sum_w \{ \sum_{w'} S_{A'} T(w', w) \} s_B e^{-H(w)}}{\sum_w e^{-H(w)}} - \langle S_{A'} \rangle' \langle s_B \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt

$$T_{A'B} = \left\langle \left(\sum_{w'} S_{A'} T(w', w) \right) s_B \right\rangle - \langle S_{A'} \rangle \langle s_B \rangle. \quad (11.63)$$

Die Erwartungswerte auf der rechten Seite können nun in einer Monte-Carlo Simulation berechnet werden. Sie hängen ab von den Kopplungskonstanten auf dem feinen Gitter und vom Blockkern T . Nach der Kettenregel gilt auch

$$T_{A'B} = \frac{\partial \langle S_{A'} \rangle'}{\partial K_B} = \sum_{C'} \frac{\partial \langle S_{A'} \rangle'}{\partial K_{C'}} \frac{\partial K_{C'}}{\partial K_B} = \sum_{C'} \langle S_{A'}; S_{C'} \rangle \frac{\partial K_{C'}}{\partial K_B}. \quad (11.64)$$

Die verbundenen Korrelationsfunktionen auf der rechten Seite können nun ebenfalls mit Hilfe einer Simulation bestimmt werden. Mit $T_{A'B}$ aus (11.63) kann man nun (im Prinzip) die Ableitung der neuen nach den alten Kopplungskonstanten berechnen.

Um etwas konkreter zu werden, wollen wir die MCRG-Transformation für das $2d$ -Ising-Modell explizit durchführen. Wir fassen jeweils vier Spins zu einem Blockspin zusammen, wie in der Abbildung 11.1 angedeutet. Nun müssen wir den Blockkern festlegen. Wir

wählen die *Mehrheitsregel*: Für 4 Spins $\{s_x\}$ die zu einem Blockspin $S_{x'}$ zusammengefasst werden, wählen wir

$$T(w', w) = \prod_{x' \in \Lambda'} t\left(S_{x'}, \sum_{x \in x'} s_x\right), \quad (11.65)$$

mit

$$\begin{aligned} \sum s_x > 0 &\implies S_{x'} = 1 && \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 \\ \sum s_x < 0 &\implies S_{x'} = -1 && \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 \\ \sum s_x = 0 &\implies \begin{cases} S_{x'} = 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \\ S_{x'} = -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (11.66)$$

Weiter unten berechnen wir die Renormierung der Kopplungskonstanten für das $2d$ -Ising-Modell ohne Magnetfeld auf dem 4×4 Gitter. Die $2^{16} = 65536$ Konfigurationen w können auf dem Computer leicht erzeugt werden. Die Definition (11.57) gestattet dann eine direkte Berechnung der geblockten Energie H' . Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall können wir nicht mehr erwarten, dass H' die gleich funktionale Form wie H hat. In mehr als einer Raumdimension treffen wir auf die Komplikation, dass die RG-Prozedur schon für einfache Modelle mit nächsten-Nachbarn-Wechselwirkungen längerreichweitige Wechselwirkungen und Mehr-Spin-Wechselwirkungen erzeugt.

Auf dem geblockten 2×2 Gitter gibt es nur 3 unterschiedliche Wechselwirkungsterme: die Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn, zwischen übernächsten Nachbarn und die Wechselwirkung aller 4 Spins,

$$\begin{aligned} H' = & - K_1 \sum_{x'} S_{x'} (S_{x'+(1,0)} + S_{x'+(0,1)}) \\ & - K_2 \sum_{x'} S_{x'} (S_{x'+(1,1)} + S_{x'+(1,-1)}) \\ & - K_3 \sum_{x'} S_{x'} S_{x'+(1,0)} S_{x'+(0,1)} S_{x'+(1,1)} \\ & - K_4 \sum_{x'} 1. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Wir haben absichtlich überzählt, da auf größeren Gittern zum Beispiel die beiden Terme in der zweiten Zeile nicht mehr identisch sind. Auf größeren 2×2 -Gitter Λ' gibt es nur $2^4 = 16$ Konfigurationen und davon haben nur 4 Klassen verschiedene Boltzmann-Gewichte. Diese

sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Kl.	Konfigurationen								$-H'$
\mathcal{C}_1	++	--							$8K_1 + 8K_2 + 4K_3 + 4K_4$
	++	--							
\mathcal{C}_2	-+	+-	++	++	+-	-+	--	--	$-4K_3 + 4K_4$
	++	++	-+	+-	--	--	+-	-+	
\mathcal{C}_3	++	+-	--	-+					$-8K_2 + 4K_3 + 4K_4$
	--	+-	++	-+					
\mathcal{C}_4	+-	-+							$-8K_1 + 8K_2 + 4K_3 + 4K_4$
	-+	+-							

Damit haben wir 4 Gleichungen für die 4 Variablen K_1, K_2, K_3 und K_4 . Im folgenden Programm wählten wir aus jeder der 4 Klassen von Konfigurationen die erste aus. Die Gleichungen lauten dann

$$e^{-H'(w'_i)} = \sum_w T(w'_i, w) e^{-H(w)} \equiv e^{c_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die rechten Seiten werden numerisch berechnet und die linken Seiten können für $w'_i \in \mathcal{C}_i$ aus der obigen Tabelle abgelesen werden. Die Auflösung der Gleichungen ergibt (siehe HASENBUSCH)

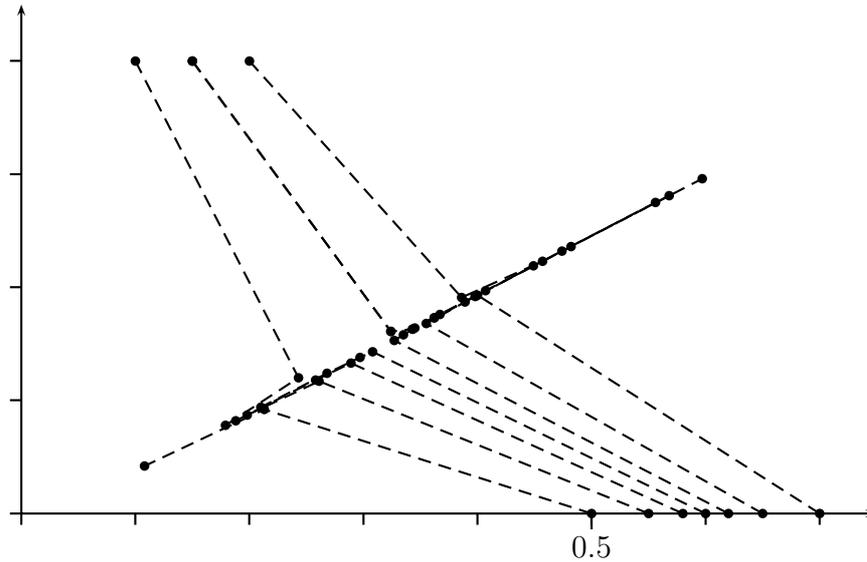
$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{16}(c_1 - c_4) \\ K_2 &= \frac{1}{32}(c_1 - 2c_3 + c_4) \\ K_3 &= \frac{1}{32}(c_1 - 4c_2 + 2c_3 + c_4) \\ K_4 &= \frac{1}{32}(c_1 + 4c_2 + 2c_3 + c_4) \end{aligned}$$

Zur Iteration der RG-Transformation benutzen wir die berechneten Kopplungen wieder auf dem 4×4 -Gitter.

Die folgende Figur¹ zeigt die Projektion der RG-Flusses auf die K_1, K_2 -Ebene. Der Fluss wurde mit dem Programm in Abschnitt 11.6 berechnet. Die Menge aller Punkte im Raum der Kopplungskonstanten, die nach unendlich vielen Transformationen in den Fixpunkt streben heisst *kritische Fläche*. Der Schnittpunkt der kritischen Fläche mit der

¹Programm muss noch verbessert werden!

Linie $(K_1, 0, 0)$ ist die kritische Kopplung des $2d$ -Ising-Modells auf dem quadratischen Gitter mit NN-Wechselwirkung.



Der Fixpunkt der RG-Transformation bei

$$K^* = (K_1^*, K_2^*, K_3^*) = (0.29976, 0.08709, -0.00123).$$

Genauere Werte finden sie auf der Homepage von M. HASENBUSCH². Die kritische Kopplung des $2d$ -Ising-Modells mit NN-Wechselwirkung ist bei

$$K_{1,c} = 0.4182,$$

also nicht weit weg vom exakten Wert $\frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx 0.4407$. Um die kritischen Exponenten zu erhalten, muss man die linearisierten RG-Transformation in der Nähe des Fixpunktes K^* untersuchen, also die Matrix

$$T_{ab} = \left. \frac{\partial K'_a}{\partial K_b} \right|_{K^*}. \quad (11.68)$$

Die Berechnung des entsprechenden Differenzenquotienten bei Annäherung des Fixpunktes ergibt

$$T = \begin{pmatrix} 1.3590 & 1.5560 & 0.6020 \\ 0.4342 & 0.7490 & 0.1947 \\ -0.0045 & -0.0099 & 0.1314 \end{pmatrix}. \quad (11.69)$$

²<http://www-zeuthen.desy.de/~hasenbus/lecture.html>

Um die kritischen Exponenten zu finden, müssen wir diese nicht-symmetrische Matrix diagonalisieren,

$$\sum_a \Phi_a^i T_{ab} = \lambda^i \Phi_b^i.$$

Man findet

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.9281 \quad , \quad \Phi^1 = (0.6051, 0.7961, 0.2890) \\ \lambda_2 &= 0.1789 \quad , \quad \Phi^2 = (-0.4091, 1.1049, -0.6543) \\ \lambda_3 &= 0.1324 \quad , \quad \Phi^3 = (-0.1814, 0.6131, 9.7332). \end{aligned}$$

und damit für die Exponenten y_i in

$$\lambda_i = b^{y_i}, \quad b = 2,$$

die Werte

$$\frac{1}{\nu} = y_1 \approx 0.947, \quad y_2 \approx -2.483, \quad y_3 \approx -2.917. \quad (11.70)$$

Für das \mathbb{Z}_2 -symmetrische Modell ohne Magnetfeld gibt es nur eine relevante Kopplung $g_1 \propto t$. Das trunkierte Modell hat zwei irrelevante Kopplungen g_2, g_3 mit negativen Exponenten. Da die zweite relevante Kopplung $g_2 \propto h$ ausgeschaltet ist, können wir von den Relationen (11.51) nur die Beziehung $\nu = 1/y_1$ testen. Die Näherung (11.70) für ν kommt dem exakten Resultat $\nu = 1$ für das zwei-dimensionale Isingmodell nahe. Die Vorhersage der Molekularfeld-Näherung lautet dagegen $\nu_{\text{MF}} = 0.5$.

11.4 Kontinuumsliches für freies Feld

Wir kehren zum freien Skalarfeld zurück und führen explizit eine Gitterkonstante a ein (in früheren Kapiteln oft mit ϵ bezeichnet) und studieren den *Kontinuumsliches* $a \rightarrow 0$ für die 2-Punktfunktion. Es ist hier vorteilhaft die Gitterpunkte mit $n \in \mathbb{Z}^d$ (statt mit x), die Impulse mit k (statt mit p) und den Parameter m mit m_L zu bezeichnen. Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Fourierdarstellung (5.73)

$$G(n) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} d^d k \frac{e^{ikn}}{m_L^2 + \hat{k}^2}, \quad \hat{k}_\mu = 2 \sin \frac{k_\mu}{2}$$

in welcher wir nun $n = x/a$, $k = pa$ und $m_L = am$ setzen,

$$G(x) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d \frac{1}{a^2} \int_B d^d p \frac{e^{ipx}}{m^2 + \hat{p}^2}, \quad \hat{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin \frac{ap_\mu}{2}. \quad (11.71)$$

Die Impulsintegration erstreckt sich über die Brillouin-Zone $B = [-\pi/a, \pi/a]^d$, die im Kontinuumsliches gegen \mathbb{R}^d strebt. Diese Funktion erfüllt die lineare Differenzgleichung

$$-\sum_\mu (G(x + ae_\mu) - 2G(x) + G(x - ae_\mu)) + (am)^2 G(x) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d \int_B d^d p e^{ipx} = \delta_{x,0}.$$

Wir definieren nun die reskalierte 2-Punktfunktion

$$\tilde{G}_a(x) = \frac{1}{a^{d-2}} G(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B d^d p \frac{e^{ipx}}{m^2 + \hat{p}^2}, \quad (11.72)$$

welche folgender Gleichung gehorcht,

$$-\sum_\mu \frac{1}{a^2} \left(\tilde{G}_a(x + ae_\mu) - 2\tilde{G}_a(x) + \tilde{G}_a(x - ae_\mu) \right) + m^2 \tilde{G}_a(x) = \frac{1}{a^d} \delta_{x,0}.$$

Die rechte Seite strebt im Kontinuumsliches gegen die Dirac-Distribution,

$$\frac{1}{a^d} \delta_{x,0} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(x), \quad (11.73)$$

und damit strebt diese Differenzgleichung gegen die lineare Differenzialgleichung

$$(-\Delta + m^2)\tilde{G}(x) = \delta^d(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{G}_a = \tilde{G}. \quad (11.74)$$

Es ist die Bewegungsgleichung für die Zweipunktfunktion des freien Euklidischen Feldes mit Masse m . Dass das Integral (11.72) für die Zweipunktfunktion \tilde{G} für $a \rightarrow 0$ gegen

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} d^d p \frac{e^{ipx}}{m^2 + p^2} \quad (11.75)$$

strebt, ist allerdings nicht offensichtlich. Bei Grenzübergang werden die Integrationsgrenzen zunehmend größer und man darf die Sinus-Funktion nicht einfach entwickeln. Man kann aber zeigen, dass für $x \neq 0$ die großen p -Werte zum Integral wegen der raschen Oszillation der Exponentialfunktion nicht beitragen. Abschließend einige Bemerkungen zu unserem Ergebnis:

- Die Reskalierung (11.72) der Greenschen Funktion entspricht einer *Feldrenormie-*

runge. In der Euklidischen Wirkung auf \mathbb{Z}^d ,

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\langle nm \rangle} (\phi(m) - \phi(n))^2 + \frac{m_L^2}{2} \sum_n \phi^2(n) \quad (11.76)$$

sind sowohl der Massenparameter m_L als auch das Gitterfeld ϕ dimensionslos. Beim Kontinuumsliches geht die Summe über alle Gitterpunkte in ein Integral über \mathbb{R}^d und die Differenz $\phi(m) - \phi(n)$ in eine Ableitung über. Die Gitterwirkung für das Gitterfeld $\phi(x) \equiv \phi(n)$ lautet

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x \in (a\mathbb{Z})^d} \frac{a^d}{a^{d-2}} \left(\sum_{\mu=1}^d \frac{(\phi(x + ae_\mu) - \phi(x))^2}{a^2} + \frac{m_L^2}{a^2} \phi^2(x) \right) \quad (11.77)$$

und besitzt nur einen Kontinuumsliches wenn wir das Feld wie folgt reskalieren,

$$\phi(m) \longrightarrow \tilde{\phi}(x) = \frac{1}{a^{(d-2)/2}} \phi(am). \quad (11.78)$$

Dann strebt die Gitterwirkung gegen die Wirkung des Klein-Gordon Feldes,

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \left((\nabla \tilde{\phi}(x), \nabla \tilde{\phi}(x)) + m^2 \tilde{\phi}^2(x) \right) \quad \text{mit } m = m_L/a.$$

Die Reskalierung (11.78) ist in Einklang mit der Dimension eines Skalarfeldes im Kontinuum, $[\phi] = [\text{Länge}]^{-(d-2)/2}$, und sie überträgt sich auf eine Renormierung der n -Punktfunktion

$$G(m_1, \dots, m_n) \longrightarrow \tilde{G}(x_1, \dots, x_n) = a^{-n(d-2)/2} G(am_1, \dots, am_n). \quad (11.79)$$

- Für große Werte des Arguments fallen die 2-Punktfunktionen der Gittertheorie und der Kontinuumstheorie exponentiell ab,

$$G(n) \xrightarrow{|n| \gg 1} e^{-m_L |n|}, \quad \tilde{G}(x) \xrightarrow{|x| \gg 1} e^{-m |x|}. \quad (11.80)$$

- Für große Werte des Arguments $|n| \gg 1/m_L$ wird $G(n)$ näherungsweise drehinvariant. Diese Eigenschaft ist notwendig für ein $SO(d)$ -invariante Korrelationsfunktion im Kontinuumsliches. Obwohl die Gitterregularisierung die Drehinvarianz bricht, wird diese im Kontinuumsliches wieder hergestellt.

Beim Kontinuumsliches treten vier Größen auf:

1. Die dimensionslose *nackte Masse* m_L in der Gitterwirkung (11.76).

2. Die dimensionslose *Korrelationslänge* auf dem Gitter ξ_L ergibt sich aus der 2-Punktfunktion,

$$\frac{1}{\xi_L} = - \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\log G(n)}{|n|}. \quad (11.81)$$

Im Allgemeinen ist ξ_L eine Funktion von m_L und eventuell weiteren nackter Kopplungskonstanten. Für das freie Skalarfeld ist $\xi_L = 1/m_L$.

3. Die *physikalische Masse* m des Teilchens, das durch das Feld ϕ beschrieben werden soll. Diese hat die Dimension einer Masse oder einer inversen Länge und der numerische Wert ist experimentell vorgegeben.
4. Durch Wahl der nackten Masse m_L ergibt sich die Korrelationslänge ξ_L in Gittereinheiten und diese soll die physikalische Masse beschreiben,

$$m = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{a \xi_L(m_L)}, \quad (11.82)$$

womit der *Gitterabstand* a eingeführt wäre. Der Abstand a ist also eine Funktion der gegebenen physikalischen Masse m und des dimensionslosen Parameters m_L .

Wir können die Verhältnisse auch unter einem *anderen Gesichtspunkt* interpretieren. Dem Abstand zwischen zwei nächsten Nachbarn auf dem Gitter wird zunächst willkürlich ein physikalischer Abstand a zugeordnet. Außerdem soll ϕ ein Teilchen der Masse m beschreiben. Das dimensionslose Produkt am entspricht der inversen Compton-Wellenlänge des Teilchens in Einheiten der willkürlich gewählten Gitterkonstanten. Diese Zahl soll identisch zur (dimensionslosen) inversen Korrelationslänge ξ_L^{-1} des Feldes auf dem Gitter sein. Dadurch wird bei Vorgabe von a und m der nackte Parameter $m_L(\xi_L)$ festgelegt. Eine Änderung der (unbeobachtbaren) Gitterkonstanten a kann durch Änderung des (ebenfalls unbeobachtbaren) nackten Parameters m_L kompensiert werden, so dass die *physikalischen Größen unverändert bleiben*. Man sagt, die Physik sei konstant längs der Trajektorie $m_L(a)$.

Der Kontinuumsliches besteht also im Wesentlichen aus zwei Schritten:

Die freien Parameter der Gittertheorie (hier m_L) müssen so gewählt werden, dass die Korrelationslängen im Vergleich zum Gitterabstand sehr groß werden, also $\xi_L \gg 1$ oder $\xi \gg a$ gilt. Für das freie Klein-Gordon-Feld bedeutet dies, dass der Parameter m_L sehr klein gewählt werden muss, damit die 2-Punktfunktion im Vergleich zum Gitterabstand langreichweitig wird.

Für jeden freien Parameter muss eine Größe des Gittermodells an eine entsprechende Größe der Natur (z.B. physikalische Massen) angepasst werden. Durch diesen Schritt wird dem Gitterabstand eine physikalische Länge zugeordnet.

Will man beispielsweise Pionen mit $\lambda_c \approx 10^{-13}$ cm beschreiben, und hat man dem Gitter willkürlich die Gitterkonstante $a = 10^{-15}$ cm zugeordnet, dann ist $\lambda_c/a \approx 100$. Die Korrelationslänge ξ_L sollte also ebenfalls 100 betragen, d.h. für die freie Theorie ist die nackte Masse $m_L = 0.01$. In *MC-Simulationen* geht man meist umgekehrt vor: man gibt den Parameter m_L vor und bestimmt anschließend für die bekannte Masse m nach (11.82) die zugehörige Gitterkonstante. Damit einerseits Gitterartefakte und andererseits die Endlichkeit des Gitters die Resultate nicht verfälschen, sollte bei jeder Simulation die Ungleichungen

$$1 \ll \xi_L \ll N \quad (11.83)$$

erfüllt sein. Die Gitter müssen also genügend gross sein, damit die interessanten Größen darauf Platz haben. Zur Zeit kann man auf schnellen Computern Skalarfeldtheorien auf Gittern mit 32^4 Punkten simulieren.

11.5 Kontinuumslices für Spinmodelle

In der Nähe eines kritischen Punktes eines allgemeineren klassischen d -dimensionalen Gittermodells divergiert die Korrelationslänge ξ_L . Dann kann das statistische Gittermodell als Gitterregularisierung einer Euklidischen Quantenfeldtheorie in d Dimensionen oder einer $d + 1$ -dimensionalen Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen interpretiert werden. Im zweiten Fall macht man den Grenzübergang

$$a \longrightarrow 0 \quad , \quad T = \frac{1}{aN_d} \quad \text{fest.} \quad (11.84)$$

In der Nähe eines kritischen Punktes ist die Korrelationslänge in Gittereinheiten

$$\frac{\xi}{a} = \xi_L = \kappa(\beta_c - \beta)^{-\nu}, \quad \beta \uparrow \beta_c. \quad (11.85)$$

Legen wir die Korrelationslänge ξ fest, dann fixiert (11.85) den Gitterabstand a als Funktion des Parameters β , also $a = a(\beta)$. Der Kontinuumslices wird offensichtlich erreicht wenn β gegen β_c strebt und ξ festgehalten wird. Der Parameter β ist nicht mehr frei, da er den Gitterabstand fixiert. Dafür gewinnt man ξ als neuen Parameter der Quantenfeldtheorie. Wir sehen hier die sogenannte *dimensionale Umwandlung* (engl. *dimensional transmutation*) am Werk, bei der ein dimensionsloser Parameter gegen einen skalenabhängigen Parameter eingetauscht wird.

Wir wollen nun annehmen, dass eine gewisse Korrelationsfunktion

$$\langle O(n)O(m) \rangle \sim e^{-m_{OL}|n-m|} \quad (11.86)$$

mit entsprechendem Abschirmparameter m_{OL} in einer Simulation bestimmt worden ist. Da der Abstand $|n-m|$ nur in Einheiten des Gitterabstandes bekannt ist, ergibt die Simulation die Abschirmmasse in Einheiten von $a(\beta)$. Wegen der angenommenen Universalität sollte in der Nähe des kritischen Punktes

$$m_O a(\beta) = m_{OL} = \kappa_O (\beta_c - \beta)^\nu, \quad \beta \uparrow \beta_c \quad (11.87)$$

gelten. Damit strebt das Produkt $m_O \xi$ gegen einen konstanten Wert in der Umgebung des kritischen Punktes,

$$m_O \xi = \kappa_m \kappa. \quad (11.88)$$

Die Zahlen κ und κ_m können in Simulationen bestimmt werden. Mit ihrer Hilfe kann die Abschirmmasse m_O in Einheiten des freien Parameters $1/\xi$ „gemessen“ werden.

11.6 Programm: Blockspintransformation

Das folgende Programm berechnet die Trajektorien der Blockspintransformation für das $2d$ -Isingmodell auf einem 4×4 Gitter. Der Blockkern $T(w', w)$ beruht auf der Mehrheitsregel (11.66). Die Hamiltonfunktion des geblockten System hat die Form (11.67).

```

/* Programm rengroupis2d.c */
/* Berechnet analytisch Trajektorien */
/* der MC-RG Transformation. Geblockt */
/* wird mit der Mehrheitsregel */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
#include "constrenising2.h"
#include "stdrenising.h"
int main(void){
    conf=1<<V; /* Anzahl Konfigurationen */
    nachbarn();
    puts("K1=_"); scanf("%lf",&k1);
    puts("K2=_"); scanf("%lf",&k2);
    puts("K3=_"); scanf("%lf",&k3);
    puts("K4=_"); scanf("%lf",&k4);
    printf("(%.3f,%.3f)",k1,k2);
    for (ig=0;ig<10;ig++){
        c1=0;c2=0;c3=0;c4=0;
        for (i=0;i<conf;i++){
            /* Binaerdastellun von i = Konfigurationen */
            for (p=0;p<V;p++){
                s[p]=(i>>p)%2;s[p]=2*s[p]-1;
            };
            h1=0;h2=0;h3=0;
            for (p=0;p<V;p++){
                h1=h1+s[p]*(s[nr[p]]+s[no[p]]);
                h2=h2+s[p]*(s[nro[p]]+s[nru[p]]);
            };
        };
    };
}

```

```

    h3=h3+s[p]*s[nr[p]]*s[no[p]]*s[nro[p]];
};
/* printf("%f %f %f %f\n",k1,k2,k3,k4);*/
boltz=exp(k1*h1+k2*h2+k3*h3);
blockspin(s);
for (p=0;p<VB;p++){
    kc1[p]=bs[p]*k11[p];
    kc2[p]=bs[p]*k12[p];
    kc3[p]=bs[p]*k13[p];
    kc4[p]=bs[p]*k14[p];
};
if ((kc1[1]>=0)&&(kc1[2]>=0)&&(kc1[3]>=0)&&(kc1[4]>=0)){
    if (kc1[1]*kc1[2]*kc1[3]*kc1[4]==0) c1=c1+0.5*boltz;
    else c1=c1+boltz;}
if ((kc2[1]>=0)&&(kc2[2]>=0)&&(kc2[3]>=0)&&(kc2[4]>=0)){
    if (kc2[1]*kc2[2]*kc2[3]*kc2[4]==0) c2=c2+0.5*boltz;
    else c2=c2+boltz;}
if ((kc3[1]>=0)&&(kc3[2]>=0)&&(kc3[3]>=0)&&(kc3[4]>=0)){
    if (kc3[1]*kc3[2]*kc3[3]*kc3[4]==0) c3=c3+0.5*boltz;
    else c3=c3+boltz;}
if ((kc4[1]>=0)&&(kc4[2]>=0)&&(kc4[3]>=0)&&(kc4[4]>=0)){
    if (kc4[1]*kc4[2]*kc4[3]*kc4[4]==0) c4=c4+0.5*boltz;
    else c4=c4+boltz;}
};
l1=log(c1);l2=log(c2);l3=log(c3);l4=log(c4);
k1=(l1-l4)/16;
k2=(l1-2*l3+l4)/32;
k3=(l1-4*l2+2*l3+l4)/32;
k4=(l1+4*l2+2*l3+l4)/32;
printf("(%.3f,%.3f)",k1,k2);
};
printf("\n");
return 0;
}

```

In der folgenden Headerdatei `constrenising2.h` werden die Konstanten und Variablen definiert. Die Array $Kl1[VB], \dots$ sind Repräsentanten der 4 Klassen von Konfigurationen auf dem geblockten Gitter.

```

/* Headerdatei constrenising2.h */
#define N 4 /* Gitterlaenge */
#define V (N*N) /* Anzahl Gitterpunkte */
#define VB (V/4) /* Anzahl Gitterpunkt des geb. Gitters */
short x,y,xm,yp,ym,yp;
short s[V],nr[V],no[V],nro[V],nru[V];
short bs[VB],kc1[VB],kc2[VB],kc3[VB],kc4[VB];
short k11[VB]={1,1,1,1},k12[VB]={1,1,-1,1};
short k13[VB]={-1,-1,1,1},k14[VB]={-1,1,1,-1};
unsigned int ig,i,il,j,jl,conf;
unsigned short p,q;
double k1,k2,k3,k4,c1,c2,c3,c4,l1,l2,l3,l4,boltz;
int h1,h2,h3;
FILE *fp;

```

In der folgenden Headerdatei `stdrenising.h` werden die nächsten und übernächsten Nachbarn eines Gitterpunktes berechnet, sowie die zu einer Spinkonfiguration $s[V]$ gehörende Blockspinkonfiguration $bs[VB]$.

```
/* Headerdatei stdrenising.h */
/* Bereitstellung der naechsten Nachbarn */
void nachbarn(void)
{
    for (il=0; il<V; il++){
        y=il/N;
        x=il-y*N;
        xp=x+1,yp=y+1,ym=y-1;
        nr[il]=y*N+xp%N;
        no[il]=(yp%N)*N+x;
        nro[il]=(yp%N)*N+xp%N;
        nru[il]=((ym+N)%N)*N+xp%N;
    };
}
void blockspin(short *s)
{
    for (il=0; il<VB; il++){
        p=(2*il)/N; j1=p*N+2*il;
        bs[il]=s[j1]+s[j1+1]+s[j1+N]+s[j1+N+1];
    };
}
```